

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITÉ D'ÉVRY-VAL D'ESSONNE**

Spécialité : **Mécanique**

Présentée par

**Zhuo-Wei CHEN**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ÉVRY-VAL D'ESSONNE**

Titre de la thèse :

**SIMULATION NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES  
ORGANES PELVIENS**

Directeur de thèse : Zhi-Qiang FENG

Co-directeur de thèse : Pierre JOLI

soutenue le 27 juin 2013, devant le jury composé de :

Rapporteurs : François GOULETTE, Professeur, Mines ParisTech  
François PEYRAUT, Professeur, Université de Technologie Belfort-Montbéliard

Examineurs : Marc-Emmanuel BELLEMARE, MCF, Université d'Aix-Marseille  
Zhi-Qiang FENG, Professeur, Université d'Évry - Val d'Essonne  
Samuel FOREST, Directeur de Recherche, Mines ParisTech  
Pierre JOLI, MCF, Université d'Évry - Val d'Essonne



*À ma famille,*

*à mes amis.*



# Remerciements

*Je souhaite remercier tout d'abord mon directeur de thèse, M. Zhi-Qiang Feng, Professeur des Universités et Directeur du Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry, pour la confiance qu'il m'a accordée en m'accueillant au sein de son équipe. Je lui suis également reconnaissante pour ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai énormément appris à ses côtés et je lui adresse toute ma gratitude.*

*J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-directeur de thèse, M. Pierre Joli, Maître de Conférences du Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés, son écoute ainsi que sa relecture minutieuse de mon manuscrit, qui ont été essentiels à la bonne réussite de cette thèse. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.*

*Je voudrais remercier également les rapporteurs de cette thèse M. François Goulette, Professeur à Mines ParisTech, et M. François Peyraut, Professeur à l'université de Technologie Belfort-Montbéliard, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.*

*J'ajoute à ces remerciements M. Marc-Emmanuel Bellemare, Maître de Conférences à l'Université d'Aix-Marseille, ainsi que M. Samuel Forest, Directeur de Recherche à Mines ParisTech, pour avoir accepté d'examiner mon travail.*

*J'adresse de sincères remerciements à toute l'équipe du projet MoDyPe avec qui j'ai eu le plus grand plaisir à travailler, en particulier M. Thierry Bay et M. Mehdi Rahim, qui m'ont fourni la matière première à mon travail.*

*Je souhaite par ailleurs remercier l'ensemble de mes collègues du Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry, qui ont toujours su entretenir une ambiance à la fois studieuse et chaleureuse.*

*Enfin je remercie mes parents, ma famille et mes amis, en Chine comme en France, pour le soutien de tous les instants qu'ils ont su m'apporter au cours de ces trois ans.*

## **Résumé :**

Le prolapsus des organes pelviens (vessie, rectum, utérus, vagin) est un problème de santé qui touche de plus en plus de femmes. Ce trouble, dont la fréquence augmente avec le vieillissement de la population, altère inévitablement la qualité de vie des malades. Pour autant, les causes de cette pathologie sont mal connues et les pratiques chirurgicales demeurent mal évaluées. La réalisation d'un simulateur du comportement dynamique des organes pelviens permettant au chirurgien d'estimer l'impact fonctionnel de son geste avant sa réalisation est donc un besoin identifié. Ce travail concerne ainsi le développement, par la méthode des éléments finis, d'un modèle numérique du mouvement des organes pelviens et de leurs interactions. Un modèle est construit à partir d'une segmentation de l'IRM des patiente, permettant de générer la géométrie des organes pelviens. Des lois hyperélastiques sont ensuite adoptées pour modéliser le comportement mécanique des organes. Des résultats qualitatifs sont obtenus, permettant de comprendre les causes de certaines formes de prolapsus et d'estimer l'effet virtuel des interactions entre les organes.

**Mots clés :** organes pelviens - éléments finis - hyperélasticité - tissus mous - déformation

## **Abstract :**

Pelvic organ prolapse is a health problem that occurs only in women and becomes more common. These disorders whose frequency increases with the aging of the population affect the patients' quality of life. However, the causes of these diseases are poorly understood and the surgical practices remain poorly evaluated. The realization of a simulator will allow surgeon to estimate the functional impact of his actions before implementation, to perform the surgery in a more controlled and reliable way. This work concerns the development of a numerical model of pelvic organs' movement and their interactions based on the finite element methods. A first model is constructed from patients MRI images, allowing the generation of the organ geometries. Hyperelastic modeling of the organs behaviors were considered. Qualitative results could help to understand the reasons for the prolapse and to estimate the potential effect of organs interactions.

**Key words :** pelvic organs - finite element - hyperelasticity - soft tissue - deformation



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Cadre du problème . . . . .	1
Objectif de l'étude . . . . .	1
Projet MoDyPe . . . . .	1
Schéma général de fonctionnement . . . . .	1
Contributions . . . . .	1
<b>1 Contexte médical</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Région pelvienne chez la femme . . . . .	7
1.3 Le prolapsus des organes pelviens et ses traitements . . . . .	8
1.3.1 Le prolapsus des organes pelviens . . . . .	8
1.3.2 Les traitements . . . . .	12
1.4 Analyse anatomique de la mobilité des organes . . . . .	13
1.5 Conclusions . . . . .	20

<b>2</b>	<b>Comportement mécanique des tissus mous biologiques</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Mécanique des milieux continus non linéaire . . . . .	24
2.2.1	Cinématique . . . . .	25
2.2.2	Mesure des contraintes . . . . .	29
2.2.3	Équations d'équilibre . . . . .	31
2.2.4	Formulation intégrale forte . . . . .	32
2.2.5	Formulation intégrale faible . . . . .	33
2.3	Hyperélasticité . . . . .	33
2.3.1	Introduction . . . . .	33
2.3.2	La compressibilité et l'incompressibilité . . . . .	35
2.3.3	Modèles hyperélastiques isotropes . . . . .	37
2.3.3.1	Loi matériau de type Blatz-Ko . . . . .	37
2.3.3.2	Loi matériau de type Mooney-Rivlin . . . . .	38
2.3.3.3	Loi matériau de type Gent . . . . .	40
2.3.3.4	Loi matériau de type Yeoh . . . . .	41
2.3.3.5	Un exemple numérique . . . . .	43
2.4	Anisotropie . . . . .	46
2.4.1	Hyperélasticité anisotrope . . . . .	47
2.4.2	Modèle Gent HGO . . . . .	49
2.4.3	Exemples numériques . . . . .	52
2.4.3.1	Traction uniaxiale homogène . . . . .	52
2.4.3.2	Traction uniaxiale simple . . . . .	56
2.5	Caractérisation et identification des propriétés des tissus pelviens . . . . .	59
2.5.1	Principe théorique de l'identification . . . . .	59
2.5.2	Résultats expérimentaux d'organes pelviens issus de la littérature . . . . .	61
2.5.3	Conclusion sur le choix d'un modèle hyperélastique . . . . .	65
2.6	Conclusions . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Définition géométrique du système pelvien</b>	<b>71</b>
3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Génération d'un modèle à partir des données d'IRM . . . . .	72
3.3	Un maillage quadrangulaire de 2-dimension . . . . .	75
3.4	Un maillage de tétraèdre de 3-dimension . . . . .	76
3.4.1	Procédure de reconstruction sous SolidWorks . . . . .	77

3.4.1.1	Création du maillage . . . . .	77
3.4.1.2	Reconstruction surfacique automatique . . . . .	78
3.4.2	Un maillage tétraédrique sous Ansys . . . . .	79
3.5	La modélisation géométrique des organes avec un maillage hexaédrique . . . . .	81
3.5.1	Étape d'initialisation . . . . .	82
3.5.2	Ajustement de la surface . . . . .	85
3.5.3	Ajout d'une épaisseur aux contours des organes . . . . .	86
3.6	Conclusions . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Simulations du prolapsus des organes pelviens</b>	<b>89</b>
4.1	Quelques approches de simulation numérique . . . . .	89
4.2	Simulation par éléments finis . . . . .	91
4.2.1	Modélisation du contact . . . . .	91
4.2.1.1	Cinématique du contact . . . . .	92
4.2.1.2	Loi de contact et modèle de frottement . . . . .	93
4.2.1.3	Loi complète de contact avec frottement . . . . .	95
4.2.1.4	Méthode du bipotentiel . . . . .	96
4.2.2	Quasi-statique . . . . .	98
4.2.3	Formulation par la méthode des éléments finis . . . . .	99
4.2.4	Simulation en 2D . . . . .	102
4.2.4.1	Simulation basée sur des données de la littérature . . . . .	102
4.2.4.2	Test de validation . . . . .	104
4.2.5	Simulation en 3D . . . . .	109
4.3	Conclusions . . . . .	113
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>113</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>121</b>



# Liste des figures

1	Architecture de projet . . . . .	5
1.1	Anatomie de la région pelvienne chez la femme . . . . .	8
1.2	L'anatomie pelvienne normale chez la femme et trois types de prolapsus . . .	10
1.3	Points de référence pour l'évaluation du prolapsus d'organes pelviens . . .	11
1.4	Pessaires . . . . .	13
1.5	Localisation de la zone de séparation . . . . .	14
1.6	Plancher pelvien . . . . .	14
1.7	Localisation des ligaments sacroépineux et sacrotubéral . . . . .	16
1.8	Dysfonctionnement des muscles élévateurs de l'anus . . . . .	16
1.9	Fixations des ouvertures du vagin et de l'urètre dans le périnée . . . . .	17
1.10	Points d'ancrage de la vessie . . . . .	18
1.11	Vue latérale présentant les composants du système de soutien . . . . .	19
2.1	Définition cinématique du problème . . . . .	26
2.2	Densité de forces internes . . . . .	29
2.3	Configuration et maillage initiaux . . . . .	43
2.4	Configurations déformées en fonction du temps . . . . .	44
2.5	Contrainte de Von Mises . . . . .	45
2.6	Déplacement de trois points sélectionnés . . . . .	46
2.7	Evolution de l'énergie . . . . .	46
2.8	Angle $\beta$ . . . . .	48
2.9	Système de coordonnées cylindriques . . . . .	49
2.10	Essai de traction uniaxiale homogène . . . . .	53
2.11	Contraintes de Cauchy vs. déformation de l'expérience et du modèle . . . .	53
2.12	Influence de $J_m$ sur le niveau de contrainte . . . . .	54
2.13	Influence de $J_m$ sur les déformations principales . . . . .	55

2.14	$\lambda_2$ vs. $J_4$ pour différentes valeurs de $\beta$ . . . . .	56
2.15	Evolution des trois déformations principales pour différentes valeurs de $\beta$ . . . . .	56
2.16	Essai de traction uniaxiale simple . . . . .	57
2.17	Test de traction uniaxiale simple - calcul numérique avec FER . . . . .	58
2.18	Déplacement dans la direction z . . . . .	58
2.19	Réponse des tissus pelviens à une sollicitation de traction uniaxiale . . . . .	62
2.20	Confrontation de la réponse des tissus pelviens . . . . .	62
2.21	Réponses de la vessie et du rectum . . . . .	64
2.22	Propriétés biomécaniques des ligaments utérins . . . . .	65
2.23	Courbes contrainte-déformation pour différents modèles hyperélastiques . . . . .	66
2.24	Réponses de l'utérus . . . . .	67
2.25	Réponses du rectum . . . . .	67
2.26	Réponses de la vessie . . . . .	68
3.1	Image IRM servant de base au développement du modèle géométrique . . . . .	72
3.2	Interface du logiciel de segmentation . . . . .	73
3.3	Vue latérale du modèle géométrique complet . . . . .	74
3.4	Utérus : présence de mailles très irrégulières . . . . .	74
3.5	Modèle en 2D des organes pelviens . . . . .	75
3.6	Nuages de points utilisés . . . . .	76
3.7	Confrontation de deux maillages sans/avec un lissage . . . . .	78
3.8	Confrontation de deux différents de surfaces . . . . .	79
3.9	Un exemple de vessie . . . . .	80
3.10	Un maillage de tétraèdre . . . . .	80
3.11	Étapes de la modélisation géométrique . . . . .	81
3.12	Calcul du premier descripteur : l'axe curviligne . . . . .	82
3.13	Positionnement du second descripteur : le polyèdre de contrôle . . . . .	83
3.14	Courbe de Bézier servant de guide au placement de la surface initiale . . . . .	84
3.15	Deux types d'initialisation pour la construction d'un utérus . . . . .	84
3.16	Reconstruction des organes pelviens . . . . .	85
3.17	Un maillage 3D des organes pelviens . . . . .	86
4.1	Contact cinématique . . . . .	92
4.2	Correction sur le cône de Coulomb selon les statuts du contact . . . . .	98
4.3	Comparaison entre la configuration initiale et la déformée finale . . . . .	103
4.4	Exemple d'une séquence segmentée . . . . .	104

4.5	Confrontation de déformations entre le résultat numérique et images IRM . . . . .	106
4.6	Configurations de 12 séquences . . . . .	108
4.7	Contours de déplacement ( $U_z$ ) . . . . .	111
4.8	Contrainte de Von Mises . . . . .	112
4.9	Contact entre utérus et vessie . . . . .	112
4.10	Le modèle de Maxwell . . . . .	117
4.11	Le modèle de Kelvin-Voigt . . . . .	118
4.12	Contact glissant . . . . .	119



# Liste des tableaux

1.1	Les stades d'évaluation de Prolapsus des Organes Pelviens . . . . .	12
2.1	Paramètres des tissus mous selon le modèle Mooney-Rivlin . . . . .	63
2.2	Les coefficients du modèle Yeoh . . . . .	68
2.3	Les valeurs de $d$ VS les pressions intérieures . . . . .	69



# Introduction générale

## Cadre du problème

Le prolapsus des organes pelviens est un problème de santé qui ne se produit que chez les femmes et qui devient de plus en plus fréquent. Ce problème de santé, dont la fréquence augmente avec le vieillissement de la population, altère la qualité de vie des malades, causant l'incontinence urinaire, la dysfonction sexuelle, et la difficulté à la défécation etc. [HCN<sup>+</sup>02]. Le traitement des prolapsus des organes pelviens implique une réparation chirurgicale [BW92, OSB<sup>+</sup>97, SWvdE<sup>+</sup>01, TS02, HSC04]. Selon certaines estimations, environ la moitié des femmes ayant accouché éprouvent un certain degré de prolapsus qui, pour 10 à 20% d'entre elles, nécessite des soins médicaux [TS02]. Toutefois, les pratiques chirurgicales restent mal maîtrisées. Il a ainsi été estimé que chez près d'un tiers des femmes ayant subi une chirurgie de réparation, le prolapsus des organes pelviens se reproduit [OSB<sup>+</sup>97], dont 80% dans les deux ans suivant la chirurgie [BW92].

La réalisation d'un simulateur du comportement dynamique des organes pelviens, permettant au chirurgien d'estimer l'impact fonctionnel de son geste avant sa réalisation, est donc un besoin identifié. La démarche adoptée propose un simulateur non temps réel mais qui s'insère dans la routine clinique comme un outil de planification préopératoire spécifique à la patiente. La modélisation de la problématique se traduit par la décomposition suivante en tâches élémentaires : acquérir les contours externes des organes par une segmentation de l'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) des patientes, calculer les maillages à l'issue de la modélisation géométrique, appliquer les lois de comportement pour simuler leurs déplacements, et vérifier la conformité des résultats en les comparant aux IRM dynamiques des patientes.

L'intérêt pour la biomécanique remonte au 15<sup>ème</sup> siècle, lorsque Léonard de Vinci (1452-1519) étudiait le vol des oiseaux [Mas62], puis a continué tout au long de la fin du 19<sup>e</sup> et au début du 20<sup>e</sup> siècle. Cependant, il est suggéré par Humphrey [Hum03] que la biomécanique

n'a pas vraiment émergé comme un champ d'étude distinct de la mécanique classique avant le milieu des années 1960. Définie par Fung, la biomécanique est la mécanique appliquée à la biologie qui cherche à comprendre la mécanique des systèmes vivants [Fun93]. La biomécanique a participé à des problèmes cliniques, notamment dans les domaines du système cardio-vasculaire et musculo-squelettiques [Fun93, WG01, Hum02]. La description numérique des matériaux et du comportement structurel a permis de nombreuses avancées sur ces thèmes, et l'importance de la biomécanique a ainsi augmenté considérablement dans les dernières décennies. En effet, les progrès dans les domaines de la modélisation constitutive, de la mécanique numérique, des méthodes numériques, et de l'informatique ont conduit à l'application généralisée de procédures numériques pour l'analyse des systèmes mécaniques. En particulier, la méthode des éléments finis a prévu une procédure généralisée pour analyser la réponse contrainte / déformation d'une structure.

Le travail présenté dans ce manuscrit traite principalement de la modélisation des tissus mous biologiques et de la simulation numérique des interactions entre les organes pelviens, et constitue donc une application des techniques numériques en biomécanique.

Classiquement, pour construire un modèle mécanique déterministe, nous avons besoin des informations suivantes :

- la géométrie des objets mis en jeu
- le comportement physique des matériaux composant ces objets
- le type de contact entre les objets
- les conditions limites en force et en déplacement imposés sur les objets

Cependant la nature biomécanique des objets (organes vivants, matériaux anisotropes, quasi-incompressibles), la complexité des interactions (ligaments, fascias, viscosité, frottement), la complexité géométrique des objets (organes creux avec épaisseurs variables et rayons de courbure pouvant être très faibles), la non connaissance explicite des conditions limites, font que l'on est très loin en apparence d'un problème de mécanique classique.

La biomécanique des organes pelviens féminins est un domaine de recherche récent. Du point de vue anatomique et biomécanique, DeLancey [DeL93] a étudié en 1993 le prolapsus génital et a constaté que le soutien normal des organes pelviens dépend d'une combinaison de soutiens aponévrotiques et musculaires. Weiss *et al.* ont par la suite développé un modèle tridimensionnel aux éléments finis de l'utérus et ont étudié la distribution de contrainte-déformation de l'organe sous conditions statiques, puis sous la condition d'une pression amniotique interne en 2004 [WBN<sup>+</sup>04]. Avec l'aide de techniques de modélisation de calcul, les chercheurs ont alors fait des progrès dans :

- les propriétés mécaniques des tissus d’organes pelviens obtenus par des essais de traction uniaxiale ([CLB<sup>+</sup>04, FLB<sup>+</sup>05, RBB<sup>+</sup>06, JCRB<sup>+</sup>10, PCM<sup>+</sup>10, PMM<sup>+</sup>11, GRB<sup>+</sup>11]);
- la compréhension de la fonction et du rôle des muscles du plancher pelvien pendant l’accouchement et la délivrance ([dMP<sup>+</sup>05, MPP<sup>+</sup>07, NPBC08, PJT<sup>+</sup>09, LKNN10, JAMD12]);
- les simulations numériques des interactions entre les organes pelviens causées par des pressions internes ou externes ([BHGA09, PBR<sup>+</sup>09, VRRB<sup>+</sup>10]).

## Objectifs de l’étude

D’un point de vue mécanique, les organes pelviens ont des géométries complexes avec des comportements très spécifiques de leurs matériaux. Ils peuvent être considérés comme des structures biomécaniques en interaction mutuelle soumises à des forces de pression dans un espace (cavité pelvienne) contraint par des ligaments, des os (bassin, pubis), des muscles (plancher pelvien) et des tissus mous (fascia pelvien). L’objectif principal de ce travail concerne ainsi la modélisation numérique par éléments finis du mouvement et de la déformation de modèles des organes pelviens en utilisant l’IRM dynamique comme la vérité terrain pour leur évaluation. Nous proposons un algorithme qui combine la méthode du bipotentiel, la modélisation de corps hyperélastique quasi incompressible et une résolution quasi-statique non-linéaire.

## Projet MoDyPe

Cette thèse de recherche s’inscrit dans un projet pluridisciplinaire MoDyPe (sous la référence ANR-09-SYSC-008), qui est initié en janvier 2010, suite aux travaux de [BPMD07] et [PBR<sup>+</sup>09], dont les participants sont :

- Trois centres hospitalo-universitaires :
  - Le service de chirurgie digestive du CHU La Timone de Marseille à l’origine du projet
  - Le service de gynécologie du CHU de Nîmes
  - Le service d’urologie de l’hôpital Sainte Marguerite de Marseille
- Deux laboratoires scientifiques :
  - Le laboratoire des Sciences de l’Information et des Systèmes, LSIS\* (Caractérisation

---

\*. <http://www.lsis.org/>

### Recalage & Évaluation)

Le laboratoire de Mécanique et d’Énergétique de l’université d’Evry, LMEE<sup>†</sup> (Modélisation Physique & Simulation)

Ce projet a pour objectif d’apporter une aide à la décision pré-opératoire en évaluant le geste chirurgical appliqué sur la patiente. Dans un premier temps, il ne s’agit pas de produire un système temps-réel, mais de permettre au chirurgien de simuler les modifications envisagées sur un modèle spécifique de la patiente.

Alors que les centres hospitaliers ont pour rôle de fournir l’expertise nécessaire à la mise en œuvre d’un projet portant essentiellement sur l’amélioration de la thérapeutique, les équipes scientifiques ont pour rôle principal de lever les verrous scientifiques et technologiques majeurs dans leurs domaines respectifs, que sont d’une part la modélisation physique et la simulation, et d’autre part l’imagerie médicale et la modélisation géométrique.

## Schéma général de fonctionnement

Le découpage en tâches à réaliser est guidé par les étapes classiques d’un tel projet (acquisition-segmentation-modélisation-évaluation) [BCR<sup>+</sup>11]. Chacun des sous-projets menés en parallèle propose comme résultat intermédiaire un prototype logiciel de recherche qui répond à un besoin identifié du monde médical. La figure 1 présente l’architecture globale du projet en mettant en évidence les partenaires prépondérant pour les actions considérées.

L’acquisition des images nécessaires au développement du simulateur s’intègre dans le bilan radiologique des malades ayant un trouble de la statique pelvienne. Elle est réalisée au cours d’une IRM pelvienne comprenant une séquence dynamique sagittale complétée par une acquisition volumique. L’exploitation de ces 2 examens constitue l’objet de la tâche 1 (clinique). Les segmentations produites seront à la base d’un modèle géométrique initial des organes concernés, produit au cours de la tâche 2 (image). Ce modèle est construit en tenant compte des contraintes de calculabilité d’un modèle physique volumique permettant la reproduction du mouvement observé en IRM dynamique. La mise en œuvre du modèle physique et la production du contexte de simulation sont traitées dans la tâche 3 (physique). L’évaluation des simulations produites et l’objectivation des paramètres de corrections éventuels seront déterminées par comparaison avec les données issues de la vérité terrain fournie par l’IRM dynamique. Ainsi, la tâche 4 consiste à recalibrer le modèle complet (géométrique et

---

<sup>†</sup>. <http://lmee.univ-evry.fr/>

physique) avec l'IRM dynamique et à caractériser les séquences produites par les 2 modalités (IRM et simulation).

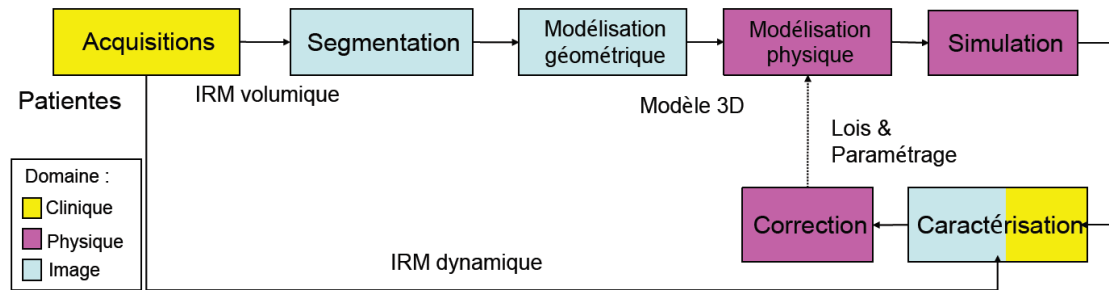


FIGURE 1 – Architecture de projet

## Contributions

Le premier chapitre de ce travail est consacré au contexte médical, qui présente en premier lieu l'environnement anatomique de la région pelvienne. Les quatre organes principaux : la vessie, le rectum, l'utérus et le vagin sont présentés, ainsi que certains types du prolapsus des organes pelviens et leur traitement. Pour mieux définir les conditions limites et obtenir un résultat plus réel, une compréhension de la nature de soutien aponévrotique et musculaire pour les organes pelviens normaux est proposé s'appuyant sur la littérature médicale.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons le comportement mécanique des tissus mous biologiques. Dans un premier temps, nous présentons la méthode de la mécanique des milieux continus non linéaire. Dans un second temps, nous présentons les modèles hyperélastiques isotropes et anisotropes permettant de caractériser le comportement des tissus mous biologiques. Ensuite, nous proposons l'utilisation de la loi constitutive Gent pour modéliser la partie isotrope constituée de la matrice non collagénique du tissu. Cette loi générale a en effet la capacité de reproduire le modèle Néo-Hookéen, et de se combiner avec la loi constitutive Holzapfel-Gasser-Ogden pour représenter la partie anisotrope hyperélastique des fibres de collagène présents dans le tissu biologique. Nous terminons ce chapitre en définissant le principe d'identification de courbe de comportement à partir d'essais mécaniques.

Dans la troisième partie, nous nous intéressons à la reconstruction bidimensionnelle et tridimensionnelle des organes pelviens. Nous commençons par présenter la segmentation des organes pelviens par une méthode semi-automatique mise en œuvre par le LSIS dans

le cadre du projet. Cette segmentation permet d'obtenir un nuage de points. Nous montrons comment un maillage tétraédrique réalisé de manière automatique à partir de ce nuage de points induit une hétérogénéité au niveau de la taille des éléments qui ne peut être satisfaisant du point de vue du calcul numérique. La seconde partie de ce chapitre est dédiée à la création d'un maillage bidimensionnel quadrangulaire et d'un maillage volumique tétraédrique de manière semi-automatique en utilisant un logiciel CAO. Nous présenterons ainsi brièvement une procédure que nous avons mis au point pour la modélisation géométrique des organes à partir d'un nuage de points.

Le dernier chapitre est consacré aux simulations numériques des organes pelviens, sur la base des lois de comportement identifiées précédemment. D'abord, nous présentons nos algorithmes sur la résolution de problèmes hyperélastiques avec contact. Pour finir, nous présentons des résultats de simulations de différents modèles 2D et 3D.

# Chapitre 1

## Contexte médical

### 1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour but de présenter la structure de la cavité pelvienne, c'est à dire la localisation des principaux organes ciblés dans ce travail (vessie, utérus, vagin et rectum) et la nature des liaisons biomécaniques. La compréhension des concepts anatomiques et médicaux est un préalable nécessaire en vue de la mise en œuvre de simulations numériques cohérentes avec la réalité. Nous commençons par une brève description des différents prolapsus des organes pelviens et des traitements thérapeutiques associés puis poursuivons une présentation de la cavité pelvienne et de la mobilité des organes dans cet environnement anatomique.

### 1.2 Région pelvienne chez la femme

La région pelvienne chez la femme (Fig. 1.1) est une zone anatomiquement complexe. Elle comprend un ensemble d'éléments viscéraux, vasculaires, nerveux, musculaires et aponevrotiques contenus dans une loge osseuse, le bassin. Elle est composée de quatre organes principaux formés de tissus mous : la vessie (en avant), le rectum (en arrière) et l'utérus non gravide en continuité avec le vagin (au milieu).

Dans la partie antérieure du pelvis se situe la vessie, réservoir qui conserve l'urine avant son évacuation par l'urètre. L'urètre traverse le plancher pelvien pour atteindre le périnée, où il s'ouvre à l'extérieur.

Dans sa partie postérieure, on y trouve le rectum, un tube d'environ 15 cm chez l'adulte.

En prolongement du côlon sigmoïde et adossé au coccyx, le rectum se termine dans le canal anal qui traverse ensuite le plancher pelvien pour s'ouvrir à l'extérieur au niveau du périnée.

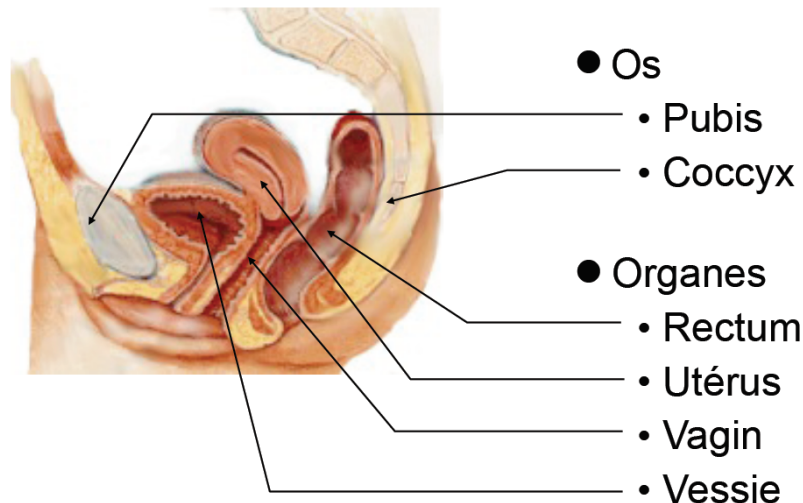


FIGURE 1.1 – Anatomie de la région pelvienne chez la femme

L'utérus non gravide humain est un organe creux, à parois épaisses, situé profondément dans la cavité pelvienne. D'après [MN11] l'utérus mesure en moyenne 7.5 cm de longueur, 5 cm de largeur à sa partie supérieure, et entre 2.5 cm et 4 cm d'épaisseur. Le vagin, situé entre le rectum et la vessie, traverse le plancher pelvien et est inséré dans l'utérus à l'intérieur de la cavité pelvienne.

## 1.3 Le prolapsus des organes pelviens et ses traitements

### 1.3.1 Le prolapsus des organes pelviens

Le terme prolapsus des organes pelviens se réfère à l'affaiblissement structural du soutien des principaux organes contenus dans le bassin osseux conduisant à une descente d'un ou plusieurs de ces organes dans le vagin. Selon certaines estimations, environ la moitié des femmes multipares expérimentent un certain degré de prolapsus et 10 à 20% d'entre elles nécessitent des soins médicaux [TS02]. Les symptômes associés à un prolapsus des organes pelviens sont une augmentation anormale de la pression pelvienne, des douleurs au bas du dos, des excoriations vulvo-vaginales, des dysfonctionnements intestinaux et des difficultés sexuelles [HSC04]. L'*US National Center for Health Statistics* rapporte en 2007 que le prolapsus est un diagnostic menant à plus de 517000 hystérectomie (ablation chirurgicale de

l'utérus) par an aux États-Unis [HDW<sup>+</sup>10].

Le prolapsus des organes pelviens subvient fréquemment à la suite : 1) d'un accouchement. Normalement, les organes pelviens sont maintenus en place par les muscles et les tissus dans le bas du ventre. Lors de l'accouchement ces muscles peuvent être affaiblis ou étirés. Si ils ne se rétablissent pas, ils ne peuvent alors plus soutenir correctement les organes pelviens ; 2) d'une intervention chirurgicale, comme l'ablation de l'utérus (hystérectomie), qui peut altérer d'autres organes de la cavité pelvienne ; 3) d'une prise de poids excessive (obésité), d'une constipation fréquente, d'une toux de longue durée, de tumeurs au niveau des principaux organes, autant de facteurs pouvant conduire à une augmentation pathologique de la pression interne de la cavité pelvienne. En effet Bonney [Bon34] a suggéré que le phénomène du prolapsus est similaire à la manœuvre d'une infirmière pour retourner le doigt d'un gant chirurgical tourné vers l'intérieur. La compression de l'air à l'intérieur du gant pousse le doigt invaginé vers l'extérieur de la même manière que les augmentations de pression abdominale poussent le vagin et l'utérus à descendre.

Plusieurs organes pelviens peuvent descendre en même temps. De cette relaxation résulte une variété de syndromes comme :

- La cystocèle. Il se produit lorsque les tissus et les muscles qui maintiennent la vessie en place sont étirés ou affaiblis. Le déplacement induit de la vessie par rapport à sa position naturelle entraîne une pression contre la paroi du vagin formant ainsi un renflement. (Fig. 1.2b)
- Le prolapsus utérin. Un basculement antéro-postérieur de l'utérus entraîne un affaissement du col de l'utérus et un gonflement des tissus vers le bas du vagin. (Fig. 1.2c)
- La rectocèle. Un déplacement du rectum par rapport à sa position naturelle peut entraîner une pression excessive sur la paroi postérieure du vagin et un affaiblissement des tissus qui séparent les deux organes. Un renflement du rectum vers le fond du vagin est caractéristique de ce type prolapsus. (Fig. 1.2d)

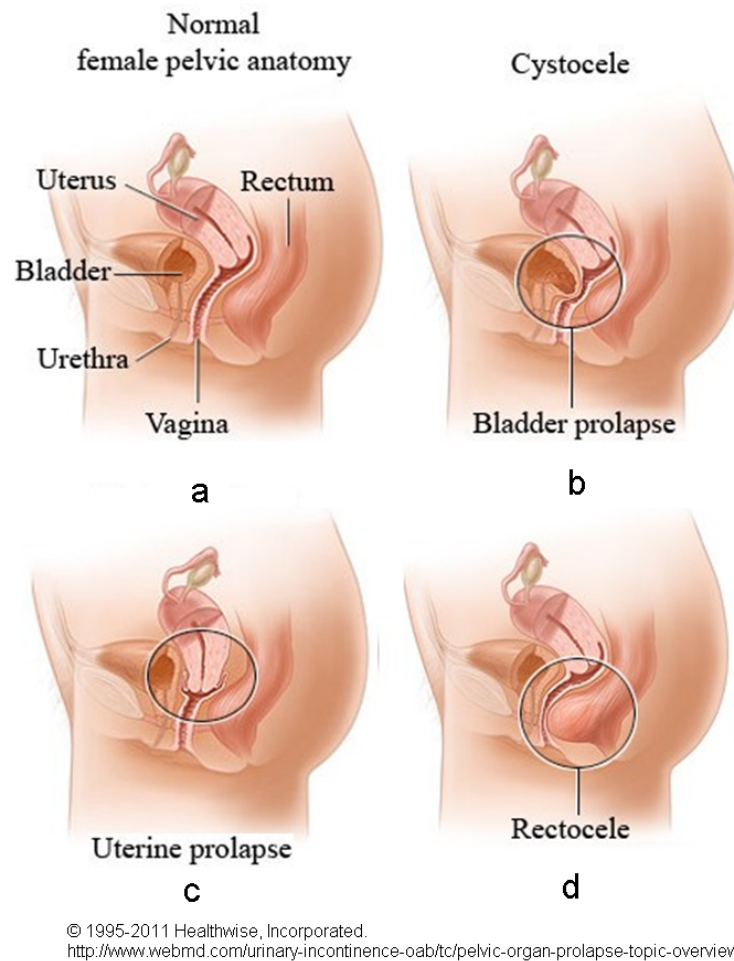


FIGURE 1.2 – L'anatomie pelvienne normale chez la femme et trois types de prolapsus

En 1996, un comité multidisciplinaire a été mis en place pour établir un système standardisé d'évaluation et de description des prolapsus des organes pelviens [BMB<sup>+</sup>96]. Le système résultant a été désigné "Examen Quantitative de Prolapsus des Organes Pelviens". Ce système utilise neuf repères anatomiques qui sont mesurés alors que le patient se situe dans une position semi-debout et effectue une forte expiration bloquée (valsalva maximale) (Figure 1.3). Ce système décrit le prolapsus observé de manière quantitative par un stade de progression pouvant varier de 0 à 4 (Table 1.1). Six points sont référencés par rapport au plan de l'hymen, deux sur la paroi antérieure du vagin, deux dans le vagin supérieur, et deux sur la paroi vaginale postérieure (Figure 1.3).

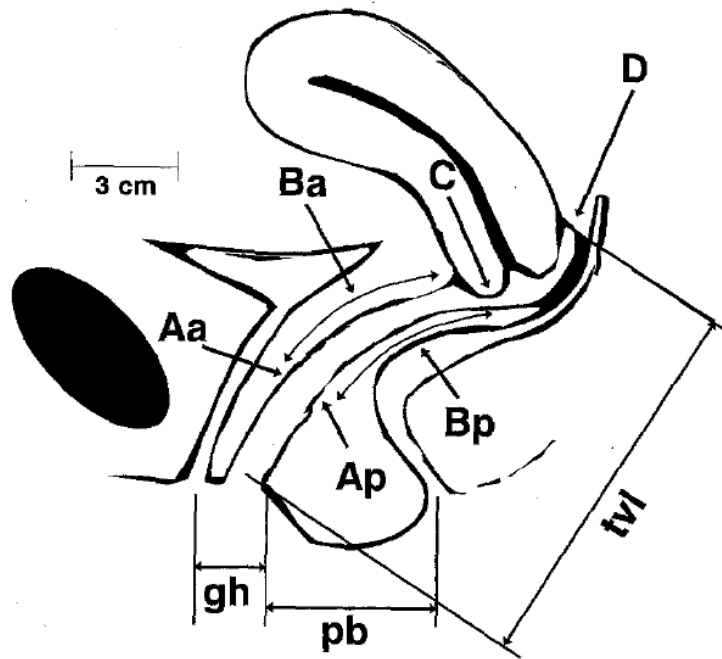


FIGURE 1.3 – Points de référence pour l'évaluation quantitative du prolapsus d'organes pelviens mesuré au cours d'un valsalva maximum ([BMB<sup>+</sup>96])

Point Aa : Désigne la position proximale de la paroi du vagin antérieure située à 3 cm du méat urétral externe ;

Point Ba : Désigne la position distale de la paroi antérieure du vagin ;

Point C : Désigne le bord le plus distal du col de l'utérus ou de la collerette vaginale (si le col de l'utérus est absent) ;

Point D : Désigne la position de la partie postérieure du fornix ;

Point Ap : Désigne la position proximale de la paroi vaginale postérieure située à 3 cm de l'hymen postérieur ;

Point Bp : Désigne la position distale de la paroi vaginale postérieure distale ;

gh : Hiatus génitaux ;

pb : Corps périnéal ;

tvL : La longueur totale du vagin (au repos).

TABLE 1.1 – Les stades d'évaluation de Prolapsus des Organes Pelviens. Adapté du rapport trimestriel de la société américaine urogynécologique.1998 ;17(2).

---

Stade 0	Aucun
Stade 1	Tous les points de référence sont à une distance inférieure de 1 cm au dessus du niveau de l'hymen
Stade 2	Le point de prolapsus maximal est à une distance inférieure de 1 cm de l'hymen (au-dessus ou au-dessous de l'hymen)
Stade 3	Le point de prolapsus maximal est à une distance supérieure de 1 cm en-dessous de l'hymen, mais moins de 2 cm de la longueur totale du vagin se trouve en dessous de l'hymen
Stade 4	Protrusion complète (2 cm au-delà de l'hymen ; évansion complète du vagin et du col de l'utérus, s'il est présent)

---

### 1.3.2 Les traitements

Des études ont montré que le risque tout au long de la vie de subir au moins une chirurgie pour traiter une dysfonction du plancher pelvien (prolapsus ou d'incontinence urinaire) est de 11% [OSB<sup>+</sup>97]. Certaines femmes traitent leurs symptômes de façon non invasive par l'utilisation de pessaires, de traitements médicamenteux, de séances de physiothérapie ou de thérapies comportementales [HCN<sup>+</sup>02]. Les cas plus graves (incontinences et ptôses) requièrent une correction chirurgicale. L'opération consiste alors à remonter l'organe prolapsé dans une position idéale pour ensuite le fixer par une consolidation avec du matériel local ou du tissu autologue, hétérologue, ou synthétique. Cependant, des troubles du plancher pelvien subsistent chez un tiers des femmes ayant subi cette intervention [OSB<sup>+</sup>97]. Des exercices réguliers de renforcement des muscles pelviens constituent un traitement pouvant limiter la progression d'un prolapsus mineur et soulager des symptômes bénins [DB95]. Les pessaires sont utilisés depuis longtemps pour traiter un prolapsus génital et peuvent être constituer une solution appropriée, temporaire ou permanente, pour le patient [Luf06]. La plupart des pessaires sont faits de silicone, une substance inerte qui n'absorbe pas les odeurs. Il en existe de formes et de tailles différentes afin de répondre à des caractéristiques anatomiques et des besoins individuels particuliers (Figure 1.4). Jusqu'à présent, les appareils les plus courants sont les pessaires en forme d'anneau, mais les formes variées de vagin peuvent nécessiter l'utilisation d'autres types de pessaires. Plus de 40 opérations distinctes ont ainsi été décrites pour le traitement du segment apical du prolapsus vaginal [Rid76]. Dans une revue de la ré-

paration du prolapsus de la voûte vaginale, Sze et Karram [SK97] ont décrit cinq opérations vaginales utilisées pour suspendre la voûte du prolapsus vaginal : (1) suspension du ligament sacro-épineux, (2) fixation iliococcygien, (3) fixation fascia endopelvien vaginale, (4) colpopexie plateau postérieur, et (5) culdoplasty McCall haute. Parmi celles-ci, la suspension du ligament sacro-épineux est l'opération la plus étudiée et semble la plus souvent pratiquée [SK97].



© AOGQ 2000-2012.

<http://www.gynecoquebec.com/gynecologie/santedelafemme/sujets-39-pessaires.php>

FIGURE 1.4 – Pessaires

## 1.4 Analyse anatomique de la mobilité des organes

Afin d'estimer la mobilité des organes pelviens d'origine mécanique, il est important d'avoir une description macroscopique du vrai pelvis appelé également cavité pelvienne.

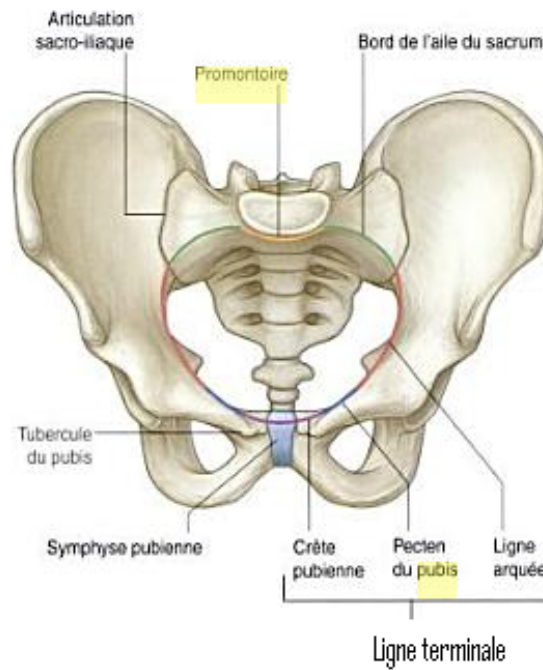


FIGURE 1.5 – Localisation de la zone de séparation entre cavité pelvienne et cavité abdominale ([DVM10])

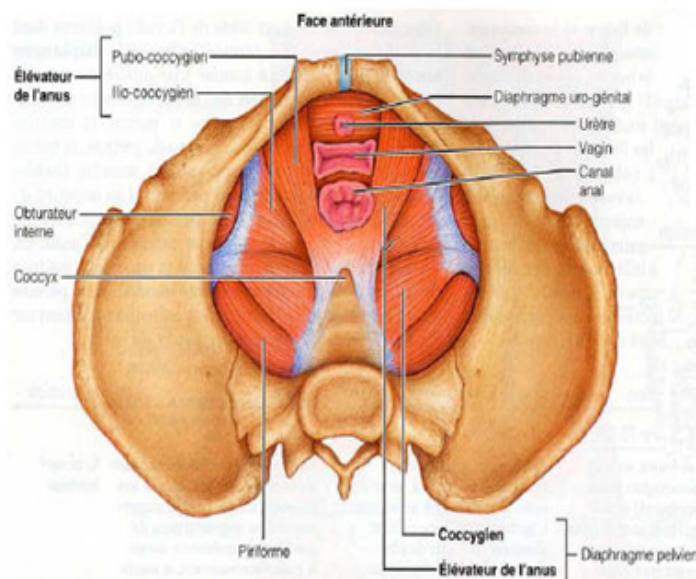


FIGURE 1.6 – Plancher pelvien ([DVM10])

Le pelvis est de forme cylindrique constitué latéralement d'une paroi, d'une ouverture

circulaire inférieure, et d'une ouverture supérieure définissant la zone de séparation avec la cavité abdominale. L'ouverture supérieure est définie à partir de la ligne terminale au niveau du pubis (Voir Figure 1.5). Elle est béante c'est à dire qu'elle ne constitue pas un obstacle aux organes pelviens, de sorte que la vessie, lorsqu'elle est pleine, peut déborder sur la cavité abdominale.

Le plancher pelvien est au fond de la cavité pelvienne et agit comme une couche de soutien des organes pelviens [DeL93, MBB<sup>+</sup>05]. Il est quasiment exclusivement musculaire, peu déformable, et a pour fonction supplémentaire de constituer des zones d'adhérence multiples pour le fascia et les ligaments. Il participe également à la fonction sphinctérienne (Fig. 1.6).

La paroi de la cavité pelvienne est constituée d'os (sacrum, coccyx, os coxaux en dessous de la ligne moyenne), de deux ligaments (sacrotubéral et sacroépineux) et de deux muscles (piriforme et obturateur interne). Les deux ligaments ont pour principale fonction de stabiliser le sacrum en l'empêchant de se déplacer vers le haut et les deux muscles relient le pubis au fémur afin d'assurer de mouvement de rotation de la hanche (Fig. 1.7).

L'interaction entre les muscles du plancher pelvien et les ligaments de soutien est crucial pour le maintien des organes pelviens. Tant que les muscles élévateurs de l'anus fonctionnent normalement, le plancher pelvien est fermé et les ligaments ainsi que le fascia sont au repos (Fig. 1.8). Le fascia stabilise alors naturellement les organes dans leur position au-dessus des muscles élévateurs de l'anus. Lorsque les muscles du plancher pelvien se relâchent ou sont endommagés, les organes s'affaissent. Dans cette configuration, ils sont maintenus en place par les ligaments (Fig. 1.8). D'après DeLancey ([DeL93]), cette situation est comparable à un navire flottant sur l'eau dans son poste à quai, attaché par des cordes de chaque côté à un dock. Le navire correspond ici à l'utérus ; les cordes correspondent aux ligaments ; et l'eau correspond à la couche de soutien formé par les muscles du plancher pelvien. Les cordes fonctionnent pour maintenir le navire (l'utérus) dans le centre de son poste à quai en reposant sur l'eau (muscles du plancher pelvien). Si le niveau d'eau venait à tomber assez bas, cela pourrait entraîner la rupture des cordes. L'utérus et le vagin sont stabilisés en position par le fascia et les ligaments mais si la musculature du plancher pelvien se trouve affaiblie alors elle ne soutient plus les organes en place et le tissu conjonctif (fascia et ligament) se trouve endommagé en raison d'une surcharge significative.

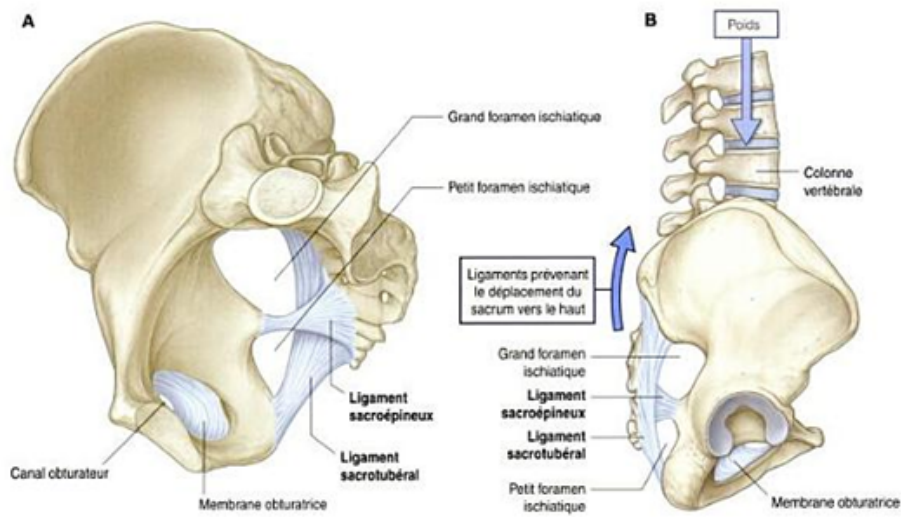


FIGURE 1.7 – Localisation des ligaments sacroépineux et sacrotubéral sur la paroi latérale et postérieure de la cavité pelvienne ([DVM10])

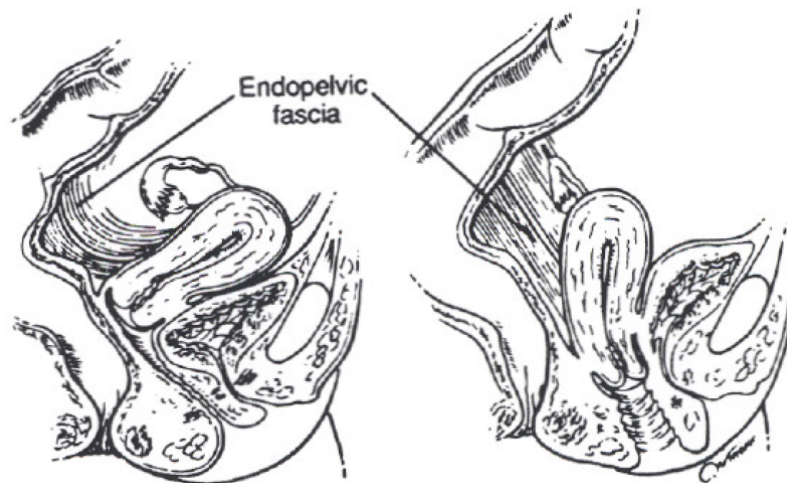


FIGURE 1.8 – les muscles éleveurs fonctionnels (gauche), non fonctionnels (droite) ([DeL93])

D'après [MMB<sup>+</sup>] le système osseux pelvien et rachidien joue un rôle capital pour l'orientation des forces régnant dans la cavité abdomino-pelvienne. Dans un fonctionnement physiologique normal, les forces générées par le diaphragme et la musculature abdominale exercent leur influence sur le promontoire et le pubis. Par contre dans des conditions pathologiques, ces forces voient leurs résultantes s'appliquer sur le plancher pelvien, contribuant ainsi à

le fragiliser. Il convient alors de considérer que le plancher pelvien, au moins dans sa partie antérieure, puisse être moins rigide que la paroi pelvienne et que cette faiblesse soit en corrélation avec l'orientation des efforts.

D'après la figure 1.1, il apparaît que le rectum est solidement clampé sur le plancher pelvien et débouche via le canal anal sur l'anus, lui-même parfaitement clampé sur la partie postérieure du périnée. Les ligaments latéraux du rectum s'étendent de la paroi pelvienne latérale au rectum (au niveau de la troisième vertèbre du sacrum) [AMHD01]. Par contre la vessie et l'utérus semblent libres, uniquement reliés au périnée antérieur respectivement par l'urètre et le vagin. On observe que l'utérus s'appuie en grande partie sur la vessie (Fig. 1.9) et que sa position réelle chez l'adulte dépend principalement de l'état des organes voisins : la vessie et le rectum [MN11].

La vessie est attachée au fascia et au plancher pelvien dans sa partie inférieure sur une base triangulaire dont les sommets sont les points de connexion de l'urètre et des 2 uretères venant des reins (voir Fig. 1.10). Dans cette partie, à proximité du plancher pelvien, le fascia est fibreux, tendu, fortement accroché à la paroi du pelvis et au pubis. La vessie possède également au droit de la symphyse pubienne un apex relié à l'ouraque jusqu'à l'ombilic. Ce n'est pas un point fixe comme on peut le constater sur la Figure 1.10, mais il peut constituer un point d'accrochage qui stabilise la vessie.

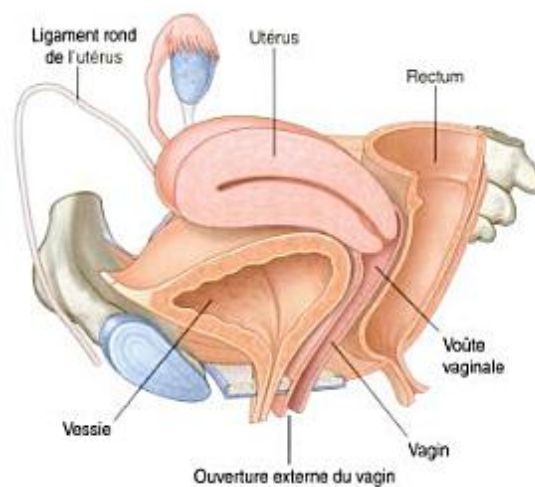


FIGURE 1.9 – Fixations des ouvertures du vagin et de l'urètre dans le périnée ([DVM10])

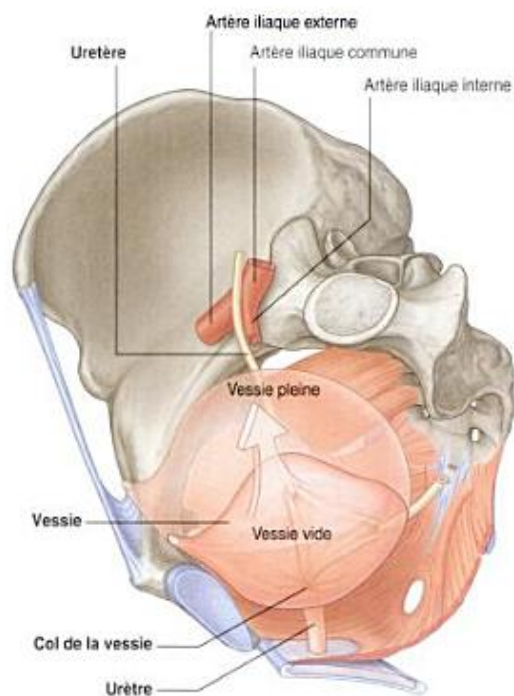


FIGURE 1.10 – Points d’ancrage de la vessie ([DVM10])

L’utérus est stabilisé par l’existence de ligaments transverses, antérieurs (pubocervical) et postérieurs (utéro-sacral), formés par le fascia pelvien et qui sont reliés aux bords du pelvis. Ces ligaments agiraient surtout au niveau du col de l’utérus laissant une certaine mobilité en rotation du corps de l’utérus nécessaire pour s’adapter à la réplétion de la vessie et du rectum. Il semble que le fascia stabilise la vessie et l’utérus en les solidarissant, au niveau du plancher antérieur comme nous l’avons vu précédemment, mais aussi au niveau des ligaments pubo-cervicaux qui entourent la vessie. Par contre le rectum semble dissocié du comportement urogénital, et est lié essentiellement au plancher pelvien postérieur et au sacrum. Toutefois, il est à signaler l’existence d’un tissu de séparation entre la paroi postérieure du vagin et la paroi antérieure du rectum, le septum recto vaginal, et qu’un affaiblissement de ce tissu serait mis en jeu dans le prolapsus vaginal ou rectal [DeL93].

Le paracolpium est un tissu conjonctif qui entoure le vagin rattachant les deux tiers supérieurs du vagin. Il se compose de deux parties : La partie supérieure (niveau I) est constituée d’une feuille relativement longue de tissu qui suspend le vagin en l’attachant aux parois pelviennes ; Dans la partie médiane du vagin (niveau II), le paracolpium rattache le vagin latéralement plus directement sur les parois pelviennes et sur le fascia supérieur des muscles élévateurs de l’anus. Dans le dernier tiers du vagin (niveau III), la paroi vaginale est liée

directement aux structures voisines sans l'intermédiaire du paracolpium .

La paroi vaginale antérieure supporte l'urètre par son attachement latéral aux muscles releveurs (pubo-coccygeus) et au fascia endopelvien à partir de l'arc tendineux du fascia pelvien. Cet arc est attaché à l'os pubien ventralement et à l'épine sciatique dorsalement (Fig. 1.11). C'est une structure située bilatéralement de chaque côté de l'urètre et du vagin. Elle agit comme un câble en forme de chaînette d'un pont suspendu et fournit le soutien nécessaire pour suspendre l'urètre reposant sur la paroi vaginale antérieure.

Les muscles releveurs de l'anus se composent de trois parties : le pubococcygeus, le puborectalis, et le muscle iliococcygien. Le muscle pubococcygeus et le puborectalis forment un U. Ils partent de l'os pubien de chaque côté de la ligne médiane et passent derrière le rectum pour former une élingue. Le muscle iliococcygien s'élève latéralement à partir de l'arc tendineux et forme un feuillet horizontal qui s'étend autour de l'ouverture dans la région postérieure du pelvis, fournissant ainsi un 'plateau' sur lequel reposent les organes pelviens (Fig. 1.11).

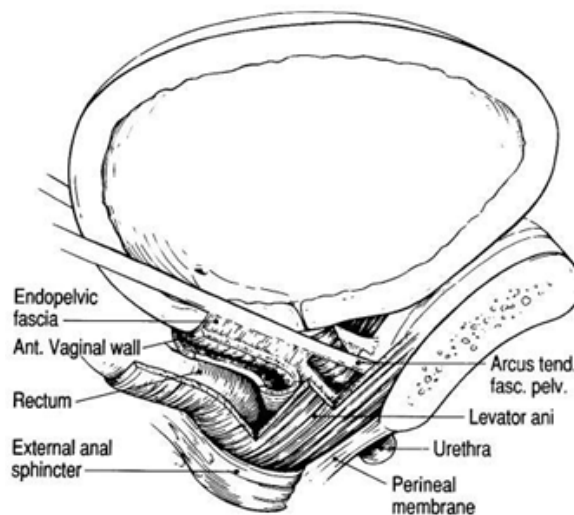


FIGURE 1.11 – Vue latérale présentant les composants du système de soutien ([AMHD01])

De l'analyse anatomique faite ci-dessus, nous pouvons en déduire des considérations biomécaniques sur la mobilité des organes :

- les orifices de sortie de l'urètre et du vagin dans le périnée constituent des points quasiment fixes par rapport au pubis (sauf dysfonctionnement grave du périnée).
- Le plancher est fixe et rigide, un relâchement se situerait plus au niveau des sphincters et des muscles de la continence (muscles des sangles pubo-rectale et pubo-vesicale).

- La paroi musculo-squelettique du pelvis peut être considérée comme fixe et rigide au regard de l'élasticité des organes pelviens.
- Le rectum est fixé au plancher pelvien. La partie dorsale du rectum ne bouge pas, elle s'appuie sur l'arrière du plancher pelvien.
- La vessie est accrochée sur une partie du fascia tendu suivant un plan d'inclinaison correspondant aux points de connexion des 2 uretères et de l'urètre et agissant comme un hamac. L'inclinaison de ce support est à priori celle du deuxième segment du vagin. Il faut envisager un affaiblissement de cette partie du fascia plus ou moins importante suivant la pathologie du patient. L'urètre, organe très court est parfaitement maintenu au périnée. La vessie est retenue au niveau de son apex très faiblement dans la direction de l'ombilic. Elle est également entourée par des ligaments latéraux appartenant au fascia, qui partent du pubis pour rejoindre le col de l'utérus.
- L'utérus est mobile en rotation, soutenu au niveau du col par un ensemble de ligaments issus du fascia. Le vagin est maintenu en inclinaison dans ses parties médiane et supérieure, comme suspendu par le fascia ligamentaire de manière plus ou moins rigide aussi bien sur sa paroi antérieure que sa paroi postérieure. L'urètre semble sur cette partie supportée par le vagin. Le vagin est maintenu séparé du rectum par le septum, un cloisonnement dont l'affaiblissement est à considérer.

## 1.5 Conclusions

Tout au long de ce premier chapitre, nous avons présenté la structure et la fonction de la région pelvienne, en particulier les quatre organes principaux : la vessie, le rectum, l'utérus et le vagin, ainsi que certains types de prolapsus des organes pelviens et leur traitement. Nous avons fait une description anatomique de la cavité pelvienne dans l'état des connaissances actuelles, et certaines considérations biomécaniques sur la mobilité des organes ont été analysées.

Comme nous l'avons dit en introduction, la modélisation de la cavité pelvienne est loin d'être un problème classique de mécanique. La grande partie des difficultés vient des inconnues au niveau des conditions limites mais aussi au niveau d'un manque d'identification anatomique à partir des IRM sur les points d'ancrage des organes sur les bords de la cavité. L'introduction de ligaments mettant en jeu l'interaction des organes avec le fascia est nécessaire si l'on veut recréer des troubles de la statique pelvienne. Le soutien normal des organes pelviens dépend d'une combinaison de soutiens aponévrotiques et musculaires. La

compréhension de la nature de ce soutien permet de mieux définir les conditions limites pour tendre vers des simulations réalistes.



## Chapitre 2

# Comportement mécanique des tissus mous biologiques

### 2.1 Introduction

Le comportement biomécanique des tissus mous est modélisé en grande déformation de manière quasi-incompressible (faible variation de volume) et, en raison de l'existence de fibres intégrées de renforcement, par une relation anisotrope fortement non linéaire entre les contraintes (densité de forces internes) et les déformations internes. Un cadre approprié pour la modélisation d'un tel comportement en mécanique des milieux continus est basé sur la théorie des invariants qui permet de s'affranchir de la structure des matériaux (approche phénoménologique). Une représentation de l'élasticité finie anisotrope basée sur les éléments de la théorie des invariants est présentée dans Ericksen & Rivlin [ER57]. Spencer (1954 [Spe54]) a été un des premiers à utiliser le cadre de la mécanique des milieux continus pour déterminer les contraintes et les déformations dans des tissus mous comme des ligaments, des tendons ou des parois artérielles. Il a établi des nouvelles lois de comportement de matériaux à partir de l'expression de la fonction de densité d'énergie de déformation. Pour cela, il a considéré celle-ci comme une fonction d'invariants cinématiques déterminées à partir de la fonction de transformation entre l'état initial (non déformé) et l'état final (état déformé). Cette approche a été ensuite mise en œuvre numériquement par la méthode des éléments finis pour la modélisation de tissus mous avec collagène (voir [PdPC<sup>+</sup>07, WMG96] pour les ligaments et [HGO00] pour les parois artérielles).

Cependant une grande partie des tissus biologiques a un comportement anisotrope c'est à dire que les propriétés mécaniques de ces matériaux ne sont pas les mêmes dans toutes les

directions [Hol06]. La plupart des densités d'énergie associées à des tissus mous utilisent par conséquent des modèles isotropes transverses ou orthotropes sous la forme d'une fonction puissance ou sous forme exponentielle. Il est usuel de considérer que l'anisotropie est due à la présence de fibres de collagènes [GOH06] et de considérer que la matrice du tissu biologique a un comportement isotrope. On dispose aujourd'hui de plusieurs modèles d'énergie de déformation dans la littérature (Fung *et al.*, 1979 [FFP79]; Holzapfel *et al.*, 2000 [HGO00]; Schröder *et al.*, 2005 [SNB05]). Rubod *et al.* [RBB<sup>+</sup>06] ont établi un protocole expérimental pour caractériser les propriétés biomécaniques des tissus vaginaux. Les propriétés d'anisotropie mécanique ont ainsi été mises en évidence. Des tests de traction uniaxiale, à vitesse de déformation constante, ont été réalisés pour les ligaments utérosacrés, ronds et larges dans le travail de Rivaux *et al.* [RRD<sup>+</sup>11], démontrant un comportement hyperélastique. Harb a proposé une approche GAO (Genetic algorithm & Analytical Optimization) pour identifier les paramètres des modèles biomécaniques [Har13]. Peña *et al.* [PCM<sup>+</sup>10, PMM<sup>+</sup>11] ont récemment étendu les modèles précédents pour y inclure des propriétés viscoélastiques et le comportement de ramollissement.

La connaissance du comportement mécanique des tissus mous de la région pelvienne, qui sont des milieux hétérogènes, non-linéaires, anisotropes et quasi-incompressibles (leur teneur en eau représente environ 80% du poids), nécessite la mise en œuvre d'un modèle biomécanique, par le biais des lois de comportement. L'objectif de ce chapitre est de passer en revue les principales lois constitutives de la littérature pour modéliser les tissus mous biologiques.

## 2.2 Mécanique des milieux continus non linéaire

Deux sources de non-linéarité existent dans l'analyse des solides continus, à savoir, la non-linéarité matérielle et la non-linéarité géométrique. La première se produit lorsque le comportement contrainte-déformation donné par la relation constitutive (ou loi de comportement) est non linéaire, tandis que la seconde se produit lorsque des changements dans la géométrie, même de faibles importances, sont à considérer car ils induisent un effet significatif sur le comportement du solide. La Mécanique des Milieux continus qu'elle soit linéaire ou non linéaire, traite dans les deux cas des mêmes sujets tels que la cinématique, la contrainte à l'équilibre, et le comportement constitutif. Mais dans le cas linéaire, on admet l'hypothèse que les déformations sont suffisamment faibles pour qu'elles n'induisent pas d'effets sur la configuration géométrique et donc sur les équations d'équilibre du solide, contrairement au

cas non linéaire où l'amplitude des déformations n'est pas limitée ce qui nécessite d'établir les équations d'équilibre en tenant compte du changement de configuration géométrique.

Dans ce travail, la mécanique des milieux continus est appliquée pour décrire les déformations et les états de contrainte internes de la matière considérée d'une manière phénoménologique. Bien entendu, cette approche n'est pas une description exacte de la matière elle-même, mais elle permet de rendre compte de manière suffisamment précise les phénomènes à l'échelle macroscopique. C'est cette approche qui est utilisée avec succès en ingénierie mécanique.

### 2.2.1 Cinématique

Un corps physique peut être interprété comme une accumulation de points matériels, dont l'emplacement peut être décrit par des vecteurs de position. Considérons l'étude du comportement d'un solide  $\mathcal{B}$  (Fig. 2.1). Dans la configuration initiale, le solide  $\mathcal{B}$  occupe un domaine ouvert, simplement connexe et borné  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ . L'ensemble fermé  $\bar{\Omega}_0 \subset \mathbb{R}^3$  est défini par :

$$\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0 \quad (2.1)$$

où  $\partial\Omega_0$  est le contour de  $\bar{\Omega}_0$ . Une particule matérielle  $M$  de  $\mathcal{B}$  est identifiée par son vecteur de position de référence  $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}_0$ .

Dans le cadre de la dynamique, nous cherchons à prédire le comportement du solide  $\mathcal{B}$  sur un intervalle de temps  $\mathbf{I} = [t_0, t_1]$ . Pour tout instant  $t \in \mathbf{I}$ , nous définissons une application  $\varphi_t$  telle que le nouveau domaine qu'occupe le solide  $\mathcal{B}$ , noté  $\bar{\Omega}_t$ , soit l'ensemble des points matériels  $m$  définis par :

$$m = \varphi_t(M) \quad \forall M \in \bar{\Omega}_0 \quad (2.2)$$

Dans la formulation lagrangienne totale, nous exprimons la position courante d'une particule en fonction de sa position initiale et du temps. Il est important de noter que  $M$  et  $m$  font ici respectivement référence à une même particule du solide  $\mathcal{B}$  dans la configuration initiale (ou matérielle) et dans la configuration courante (ou spatiale).

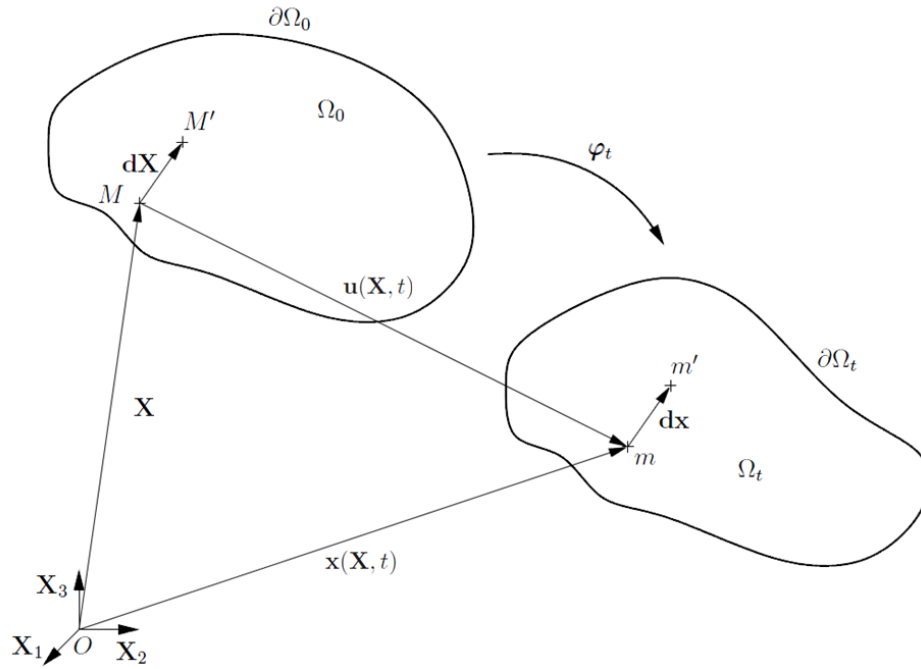


FIGURE 2.1 – Définition cinématique du problème

La position d'une particule du solide dans la configuration courante  $\Omega(t)$  est définie par son vecteur de position courant  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ . Le déplacement d'un point matériel correspond à la différence entre sa position courante et initiale.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.3)$$

Considérons maintenant une seconde particule  $M'$  du solide  $\mathcal{B}$ , infiniment proche de  $M$  et telle que  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$ . Il est possible d'estimer la position courante de cette dernière en fonction de celle de  $M$  en écrivant :

$$\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{X}') = \varphi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) + \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}. \quad (2.4)$$

Sur la figure 2.1, nous avons également :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{x} \quad (2.5)$$

Pour décrire localement le processus de déformation, un tenseur  $\mathbf{F}$  est introduit qui relie les vecteurs tangents de la configuration initiale et courante l'un à l'autre. On établit ainsi un

mapping faisant correspondre un élément de ligne matériel lié à la configuration initiale  $d\mathbf{X}$  en  $\bar{\Omega}_0$ , à un élément de ligne spatial  $d\mathbf{x}$  associé à la configuration courante  $\bar{\Omega}_t$ . En reportant (2.5) dans (2.4), nous avons :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} \quad (2.6)$$

Par la structure de cette équation, il est clair que  $\mathbf{F}$  représente un gradient que l'on désigne comme étant le tenseur gradient de déformations. Il est défini par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{Id}$  est le tenseur identité. Le tenseur gradient des déplacements, noté  $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X})$ , se calcule par :

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3(\mathbf{X})}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Afin de s'assurer que le mapping de transformation linéaire est bijectif,  $\mathbf{F}$  n'est pas autorisé à être singulier, ainsi, l'existence de l'inverse du gradient de déformation est garantie.

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}) = \text{grad}[\mathbf{X}] = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.9)$$

Une condition suffisante pour satisfaire cette condition d'inversibilité locale, c'est que le déterminant de  $\mathbf{F}$  ne doit pas être nul. En cohérence avec la continuité de  $\varphi_t$ , nous postulons :

$$J = \det \mathbf{F} > 0 \quad (2.10)$$

Du point de vue physique cela est raisonnable, car un déterminant négatif signifierait que le corps pourrait s'interpénétrer.

Le tenseur gradient des déformations  $\mathbf{F}$  n'est pas utilisé sous cette forme pour exprimer

les déformations subies par un domaine. En effet, il ne constitue pas une grandeur objective puisqu'il est affecté par les rotations de corps rigide. Pour s'assurer la construction d'un tenseur de déformation objectif, on effectue une décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  qui permet de séparer la partie déformation pure de la partie rotation de corps rigide. Nous obtenons alors :

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (2.11)$$

où :

- $\mathbf{V}$  est le tenseur Eulérien de déformation pure gauche,
- $\mathbf{U}$  est le tenseur Lagrangien de déformation pure droit,
- $\mathbf{R}$  est le tenseur des rotations de corps rigide par rapport aux axes de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{U}$ .

Il est possible alors de construire un tenseur de déformation objectif, le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit donné par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2.12)$$

Ce tenseur permet d'exprimer le carré de l'élément de ligne  $d\mathbf{x}$  en fonction du carré de l'élément de ligne du matériau  $d\mathbf{X}$  :  $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C}d\mathbf{X}$ . Le tenseur  $\mathbf{C}$  est également symétrique et défini positif. On remarque qu'il est égal au tenseur identité à l'état initial pour lequel les déformations sont, par définition, nulles. Nous utiliserons donc plus volontiers le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  qui rapporte une déformation nulle à l'état initial :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}(\mathbf{X}) - \mathbf{Id}) \quad (2.13)$$

En utilisant les définitions de  $\mathbf{C}$  et de  $\mathbf{F}$ , le tenseur  $\mathbf{E}$  peut s'écrire, après développement, sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X}) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) \right) \quad (2.14)$$

Cette écriture met en évidence une partie linéaire et une partie non-linéaire. Sous l'hypothèse des petites perturbations, nous retrouvons bien le tenseur des déformations infinitésimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . En effet, si les termes de  $\mathbf{F}$  sont petits devant 1, il est possible de négliger le terme du second ordre et le tenseur des déformations est alors linéaire en déplacement.

### 2.2.2 Mesure des contraintes

Si un corps physique est chargé par des forces extérieures, un état de chargement interne est généré, décrit généralement par la notion de contrainte interne. Il est facile d’imaginer que dans une section transversale arbitraire au sein d’un corps continu, la force résultante, appelée en tant que vecteur contrainte, est fonction de l’orientation de la section transversale. Cette orientation peut être caractérisée par un vecteur normal perpendiculaire à la section transversale. Dans la configuration courante on indique le vecteur contrainte par  $\mathbf{t}$  et le vecteur normal par  $\mathbf{n}$ . Nous écrivons l’expression d’une force qui s’exerce sur un élément de surface  $ds$  de la configuration courante (figure 2.2).

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds \tag{2.15}$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à l’élément de surface  $ds$ . Le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  est appelé tenseur des contraintes vraies (ou tenseur de Cauchy) qui représente les contraintes réelles à l’intérieur du corps et est associé à la configuration courante.

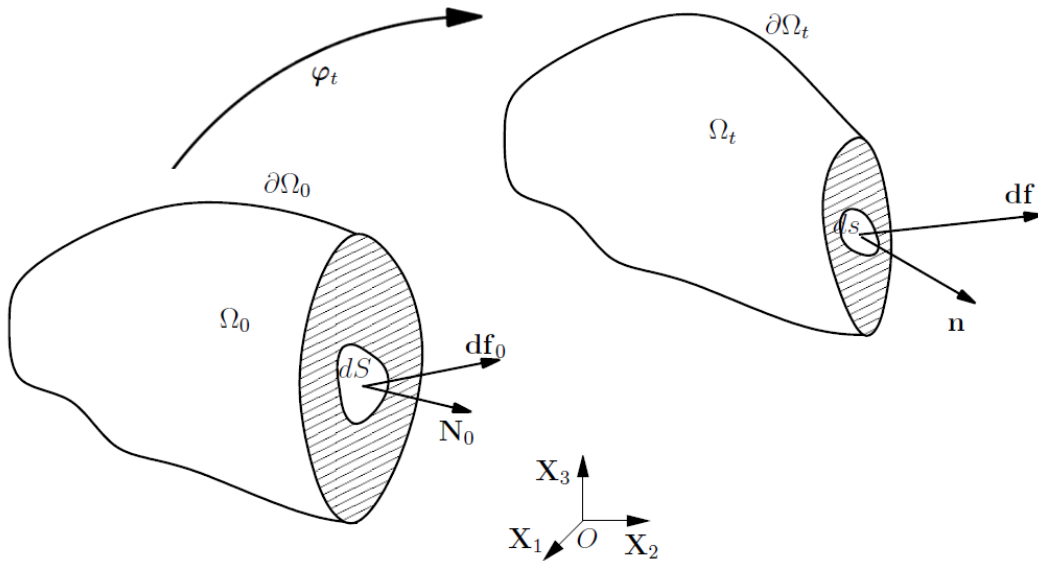


FIGURE 2.2 – Densité de forces internes

Nous écrivons maintenant une seconde formulation des efforts intérieurs en faisant intervenir cette fois l’élément de surface dans la configuration initiale. Ainsi, nous définissons

le tenseur  $\mathbf{P}$ , appelé premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, qui représente les contraintes actuelles par rapport à une surface de la configuration initiale :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}_0 dS \quad (2.16)$$

La formule de transformation des éléments de surface s'écrit :

$$\mathbf{n} ds = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}_0 dS \quad (2.17)$$

Ainsi, en introduisant (2.17) dans (2.15) et (2.16), nous obtenons la relation entre les deux tenseurs des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.18)$$

Cependant, de par sa construction,  $\mathbf{P}$  n'est exprimé ni purement par rapport à la configuration initiale ni purement par rapport à la configuration actualisée. De plus, il n'est pas symétrique (tout comme  $\mathbf{F}$ ). Nous cherchons donc à transporter  $d\mathbf{f}$  dans la configuration initiale :

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}_0 dS = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}_0 dS \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{S}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Ce nouveau tenseur des contraintes est symétrique et exclusivement exprimé par rapport à la configuration initiale. C'est donc ce tenseur qui sera utilisé pour écrire les relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations :

$$\delta\mathbf{S} = \mathbb{D} : \delta\mathbf{E} \quad (2.20)$$

où  $\mathbb{D}$  est le tenseur d'élasticité du matériau considéré traduisant son comportement mécanique. Du fait de la symétrie de  $\delta\mathbf{S}$  et de  $\delta\mathbf{E}$ , ce tenseur ne possède que 21 composantes indépendantes et, dans une écriture vectorielle de tenseur des contraintes et des déforma-

tions, peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{1111} & \mathbb{D}_{1122} & \mathbb{D}_{1133} & \mathbb{D}_{1112} & \mathbb{D}_{1113} & \mathbb{D}_{1123} \\ \mathbb{D}_{1122} & \mathbb{D}_{2222} & \mathbb{D}_{2233} & \mathbb{D}_{2212} & \mathbb{D}_{2213} & \mathbb{D}_{2223} \\ \mathbb{D}_{1133} & \mathbb{D}_{2233} & \mathbb{D}_{3333} & \mathbb{D}_{3312} & \mathbb{D}_{3313} & \mathbb{D}_{3323} \\ \mathbb{D}_{1112} & \mathbb{D}_{2212} & \mathbb{D}_{3312} & \frac{(\mathbb{D}_{1212} + \mathbb{D}_{1221})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{1213} + \mathbb{D}_{1231})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{1223} + \mathbb{D}_{1232})}{2} \\ \mathbb{D}_{1113} & \mathbb{D}_{2213} & \mathbb{D}_{3313} & \frac{(\mathbb{D}_{1312} + \mathbb{D}_{1321})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{1313} + \mathbb{D}_{1331})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{1323} + \mathbb{D}_{1332})}{2} \\ \mathbb{D}_{1123} & \mathbb{D}_{2223} & \mathbb{D}_{3323} & \frac{(\mathbb{D}_{2312} + \mathbb{D}_{2321})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{2313} + \mathbb{D}_{2331})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{2323} + \mathbb{D}_{2332})}{2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.2.3 Équations d'équilibre

Pour tout  $t \in \mathbf{I}$  et pour tout  $\mathbf{X}_0 \in \Omega$ , la fonction  $\varphi(\mathbf{X})$  doit vérifier :

$$\text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \rho \ddot{\varphi}(\mathbf{X}) \quad (2.22)$$

où DIV est l'opérateur de divergence rapporté à la configuration initiale,  $\mathbf{b}$  représente les forces volumiques appliquées à  $\mathcal{B}$  et  $\rho \ddot{\varphi}$  est le terme d'inertie.

Afin de ne faire apparaître que des termes de déplacement, nous écrivons :

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{X}) = \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{X})}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \quad (2.23)$$

Ainsi, nous obtenons la nouvelle équation d'équilibre sous forme locale :

$$\text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \quad (2.24)$$

Afin de compléter la formulation du problème, nous devons ajouter à l'équation (2.24) les conditions aux limites sur la frontière  $\partial\Omega_0$  et les conditions initiales. Pour cela, la frontière de  $\overline{\Omega}_0$  est décomposée en deux parties :  $\Gamma_u$  sur laquelle les déplacements sont imposés (conditions aux limites de type Dirichlet) et  $\Gamma_\sigma$  sur laquelle les actions extérieures sont connues

(conditions aux limites de type Neumann). Ce découpage vérifie :

$$\begin{aligned}\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma &= \partial\Omega, \\ \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma &= \emptyset\end{aligned}\quad (2.25)$$

Ainsi, les conditions aux limites sont définies par :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}_0 &= \overline{\mathbf{T}} \quad \text{sur } \Gamma_\sigma, \\ \mathbf{u} &= \overline{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u\end{aligned}\quad (2.26)$$

Concernant les conditions initiales, elles permettent de définir la position et la vitesse du solide  $\mathcal{B}$  à l'instant  $t = 0$  par :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{t=0}(\mathbf{X}) &= \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{dans } \overline{\Omega}_0, \\ \mathbf{u}_{t=0}(\mathbf{X}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad \text{dans } \overline{\Omega}_0\end{aligned}\quad (2.27)$$

## 2.2.4 Formulation intégrale forte

Dans la suite, nous allons modifier le système d'équations aux dérivées partielles (2.24) afin de permettre sa résolution par la méthode des éléments finis. Nous utiliserons pour cela la méthode des résidus pondérés associée à des fonctions de pondération de type Galerkin.

La première étape consiste à multiplier l'équation (2.24) par un champ de fonctions de pondération. Pour cela, nous choisissons le champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible suivant :

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \{\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}) \mid \delta\mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0 \text{ sur } \Gamma_u\} \quad (2.28)$$

Après intégration sur l'ensemble du domaine  $\overline{\Omega}_0$ , nous obtenons la formulation intégrale forte de l'équation d'équilibre :

$$\int_{\overline{\Omega}_0} \text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}) \cdot \delta\mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega + \int_{\overline{\Omega}_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}) \cdot \delta\mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega = \int_{\overline{\Omega}_0} \rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \cdot \delta\mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega \quad (2.29)$$

## 2.2.5 Formulation intégrale faible

La seconde étape consiste à effectuer une intégration par parties du premier membre de l'équation (2.29) puis à utiliser le théorème de la divergence. Ceci permet de faire intervenir les efforts extérieurs dans la formulation :

$$\int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\partial\Omega - \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{P}(\mathbf{X}) \cdot \text{GRAD} \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega + \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega = \int_{\bar{\Omega}_0} \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega \quad (2.30)$$

Dans [Wri02], une seconde écriture de l'équation (2.30) est obtenue en faisant intervenir le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\partial\Omega - \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{S}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{E}(\mathbf{X}) \, d\Omega + \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega = \int_{\bar{\Omega}_0} \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega \quad (2.31)$$

## 2.3 Hyperélasticité

### 2.3.1 Introduction

Les propriétés mécaniques des élastomères et des caoutchoucs permettent d'atteindre des déformations de 500 %, voire de 1000 % dans certains cas. Bien entendu, la loi de Hooke ne permet pas d'aborder un tel comportement et il est nécessaire de développer des lois matériaux spécifiques. Dans ce paragraphe, nous aborderons le domaine des matériaux hyperélastiques. Pour cela, nous développerons en détail l'implantation des lois comme Mooney-Rivlin, Yeoh et Gent dans un code de calcul par éléments finis.

Pour ce type de matériau, il est possible de définir une densité d'énergie de déformation  $W$  fonction de  $\mathbf{E}$ . Ainsi, la loi de comportement d'un matériau hyperélastique peut être écrite sous la forme d'une relation classique contrainte-déformation :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.32)$$

Pour des raisons de calcul, il est souvent préférable d'effectuer la dérivation par rapport

au tenseur de Cauchy-Green droit. Nous obtenons alors :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.33)$$

En effet, l'hypothèse d'isotropie du matériau permet d'écrire que le potentiel  $W$  ne dépend que des trois invariants de  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} W = W(I_1, I_2, I_3) \quad \text{où} \quad I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}), \\ I_2 &= \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)), \\ I_3 &= \det(\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Les relations (2.34) conduisent à :

$$\mathbf{S} = 2 \left( \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (2.35)$$

En utilisant les règles de calcul de l'algèbre tensoriel ainsi que le théorème de Caley-Hamilton, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{Id}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{Id} - \mathbf{C}, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (2.38)$$

Après réarrangement des différents termes de (2.34), nous obtenons :

$$\mathbf{S} = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{Id} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (2.39)$$

Cette dernière écriture sera celle utilisée par la suite pour déterminer le tenseur des contraintes. Par la suite, il est nécessaire de déterminer le tenseur d'élasticité  $\mathbb{D}$  qui entre en jeu dans le calcul de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}_{\Gamma}^e$ . Pour cela, il est nécessaire de calculer la dérivée seconde du potentiel  $W$  par rapport à  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} = 4 \frac{\partial^2 W(I_1, I_2, I_3)}{\partial \mathbf{C}^2} \quad (2.40)$$

Ainsi, la définition d'une densité d'énergie élastique  $W$  et l'application des équations (2.39) et (2.40) permettent d'intégrer complètement une loi de comportement d'un matériau hyperélastique dans un code de calcul par éléments finis. Nous allons étudier les cas particuliers de quelques densités d'énergie parmi les plus utilisées dans les codes industriels.

### 2.3.2 La compressibilité et l'incompressibilité

Lorsqu'une certaine compressibilité intervient dans la cinématique de déformation, la déformation est décomposée en une partie incompressible (isochore)  $\mathbf{F}^{iso}$  et une partie de compression volumique pure (sphérique)  $\mathbf{F}^{vol}$  [Flo61]. On écrit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{iso} \mathbf{F}^{vol} \quad (2.41)$$

où

$$\mathbf{F}^{vol} = J^{1/3} \mathbf{I}, \quad \mathbf{F}^{iso} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (2.42)$$

avec  $J = \det(\mathbf{F}) = I_3^{1/2}$

Cette décomposition est telle que  $\det(\mathbf{F}^{iso}) = 1$ . Il est facile de voir que  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}^{iso}$  ont les mêmes vecteurs propres. La partie isochore du tenseur de déformations de Cauchy-Green à droite peut être alors définie comme

$$\mathbf{C}^{iso} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (2.43)$$

A partir des relations (2.41) et (2.43), le potentiel de déformation  $W(\mathbf{C})$  se décompose en une partie isochore et une partie volumique :

$$W(\mathbf{C}) = W_{iso}(\mathbf{C}^{iso}) + W_{vol}(J) \quad (2.44)$$

En combinant les équations (2.33) et (2.44), il en découle la décomposition des contraintes en une partie volumique  $\mathbf{S}_{vol}$  et une partie isochore  $\mathbf{S}_{iso}$  :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{vol} + \mathbf{S}_{iso} \quad (2.45)$$

avec

$$\mathbf{S}_{vol} = 2 \frac{\partial W_{vol}(J)}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial W_{vol}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = Jp\mathbf{C}^{-1} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{S}_{iso} = 2 \frac{\partial W_{iso}(\mathbf{C}^{iso})}{\partial \mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} dev(\mathbf{S}) \quad (2.47)$$

Dans la relation (2.46)  $p$  représente la pression hydrostatique. Dans la relation (2.47) on introduit l'opérateur déviatorique  $dev$  [WMG96] :  $dev() = () - \frac{1}{3}(trace())\mathbf{I}$ . De même, le tenseur des contraintes de Cauchy peut se décomposer, en utilisant l'égalité  $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$ , en la somme d'un tenseur hydrostatique  $\boldsymbol{\sigma}_{vol}$  et d'un tenseur à trace nulle  $\boldsymbol{\sigma}_{iso}$ , dit déviateur :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{vol} + \boldsymbol{\sigma}_{iso} \quad (2.48)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}_{vol} = p\mathbf{I} = \frac{dW_{vol}(J)}{dJ}\mathbf{I} \quad (2.49)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{iso} = dev\boldsymbol{\sigma} \quad (2.50)$$

Pour les matériaux incompressibles, on a  $W_{vol}(J) = 0$  puisque  $J = 1$ , donc on a  $I_3 = 1$ . Il en résulte une dépendance vis-à-vis des deux premiers invariants  $I_1$  et  $I_2$ . La densité d'énergie de déformation s'écrit :

$$W = W(\mathbf{F}) - p(J - 1) \quad (2.51)$$

La contrainte peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} \quad (2.52)$$

En calculant la poussée vers l'avant de (2.52), la contrainte de Cauchy est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I} \quad (2.53)$$

L'incompressibilité est prise compte par le calcul implicite de la pression hydrostatique  $p$  de manière à satisfaire la contrainte algébrique  $J=1$ . Quand on travaille avec des matériaux qui manifestent une légère compressibilité, dits quasi-incompressibles, on remplace le terme  $-p(J-1)$  par  $\frac{K}{2}(J-1)^2$  avec  $K$  le module de compressibilité initial.  $K$  peut être également considéré du point de vue numérique comme un facteur de pénalité, plus il est élevé, plus  $J$  tend vers 1, et donc plus on tend vers un comportement incompressible.

### 2.3.3 Modèles hyperélastiques isotropes

De nombreux modèles ont été proposés afin de représenter le comportement mécanique des matériaux hyperélastiques. Parmi ces modèles, on choisit de représenter brièvement quelques modèles les plus connus.

#### 2.3.3.1 Loi matériau de type Blatz-Ko

La loi matériau de Blatz-Ko [BK62] est utilisée pour modéliser le comportement mécanique de mousses élastomères ou de caoutchoucs en polyuréthane. Nous retrouvons par exemple ce type de matériau dans les sièges automobiles pour améliorer leur confort. Ce dernier a un comportement compressible et le potentiel d'énergie de déformation proposé est :

$$W = \frac{G}{2} \left[ \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right] \quad (2.54)$$

où  $G$  est le module de cisaillement. En dérivant le potentiel (2.54) par rapport aux trois invariants du tenseur  $\mathbf{C}$  :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{G}{2} \frac{1}{I_3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_3} = \frac{G}{2} \left[ -\frac{I_2}{I_3^2} + \frac{1}{\sqrt{I_3}} \right] \quad (2.55)$$

Nous pouvons maintenant reporter ces résultats dans la formulation (2.39) du tenseur des

contraintes  $\mathbf{S}$ , nous obtenons :

$$\mathbf{S} = G \mathbf{F}^{-1} \left\{ \sqrt{I_3} \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \right\} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.56)$$

où  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  est le tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche associé à  $\mathbf{F}$ . Notant que  $J = \sqrt{\det(2\mathbf{E} + \mathbf{I})}$ , le tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  peut également être écrit en fonction du tenseur  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = G \left\{ J(2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-1} - (2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-2} \right\} \quad (2.57)$$

Nous déterminons maintenant la matrice d'élasticité  $\mathbb{D}$  en dérivant le tenseur des contraintes par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit :

$$\mathbb{D} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2} \quad (2.58)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} D_{ijkl} = & G \left\{ -2J(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-1}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-1} + J(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lk}^{-1}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ij}^{-1} \right. \\ & \left. + 2 \left[ (2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-1}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-2} + (2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-2}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

**Remarque 1 :** L'utilisation de cette loi de comportement hyperélastique peut entraîner, dans certains cas, des difficultés d'ordre numérique. En effet, il arrive que la condition de préservation de l'orientation ne soit pas respectée ce qui entraîne la divergence de l'algorithme de résolution de Newton-Raphson [PL01, Pey03].

**Remarque 2 :** Notons également que l'utilisation de cette loi matériau pour la simulation de problèmes de contact en statique a fait l'objet de plusieurs travaux dans le cadre du développement de la méthode du bi-potentiel [FPL03, Pey04].

### 2.3.3.2 Loi matériau de type Mooney-Rivlin

Cette deuxième loi matériau a été développée par Mooney [Moo40] afin de modéliser le comportement des caoutchoucs. Pour cela, il a établi le postulat suivant :

- le matériau est incompressible et isotrope dans l'état non-déformé,

– la relation entre contraintes et déformations de cisaillement est linéaire.

Il propose ainsi le potentiel d'énergie élastique :

$$W(I_1, I_2) = a_{01}(I_1 - 3) + a_{10}(I_2 - 3) \quad (2.60)$$

Plus tard, Rivlin [Riv48] a développé, d'un point de vue mathématique, un modèle plus large :

$$W(I_1, I_2) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij}(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.61)$$

où  $i$  et  $j$  varient de 0 à  $\infty$  et  $a_{00} = 0$ . En ne considérant que les termes du premier ordre, nous obtenons le modèle (2.60), d'où le nom de Mooney-Rivlin.

Dans notre cas, nous utilisons une expression légèrement différente qui fait intervenir les trois invariants du tenseur  $\mathbf{C}$ . Ce modèle nécessite l'utilisation de trois constantes : les deux premières définissent les caractéristiques mécaniques du matériau et la dernière contrôle l'incompressibilité du matériau. Ce potentiel s'écrit sous la forme :

$$W(I_1, I_2, I_3) = a_{01}(I_1 - 3) + a_{10}(I_2 - 3) + \frac{1}{2}K(I_3 - 1)^2 \quad (2.62)$$

Comme pour la loi matériau précédente, nous calculons les dérivées partielles de ce nouveau potentiel par rapport aux trois invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$  :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = a_{01} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = a_{10} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_3} = K(I_3 - 1) \quad (2.63)$$

En reportant ces résultats dans l'équation (2.39), nous arrivons à l'expression du tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S} = 2(KI_3(I_3 - 1)\mathbf{C}^{-1} + (a_{01} + a_{10}I_1)\mathbf{I} - a_{10}\mathbf{C}) \quad (2.64)$$

Dans ce cas précis, nous n'aboutissons pas à une formulation du type  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$  mais cela n'est pas nécessaire au niveau de la programmation de la méthode des éléments finis. En effet, il est tout aussi simple de calculer les trois invariants à partir du tenseur  $\mathbf{C}$  que de calculer  $\mathbf{E}$  à l'aide de  $\mathbf{C}$ .

Nous pouvons maintenant déterminer le tenseur d'élasticité  $\mathbb{D}$  en dérivant la seconde formulation de  $\mathbf{S}$  par rapport à  $\mathbf{E}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = & 4 \left( KI_3(2I_3 - 1) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right. \\ & \left. - KI_3(I_3 - 1) \mathbf{C}^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{C}^{-1} + a_{10} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - a_{10} \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Les produits de tenseurs  $\otimes$  et  $\overline{\otimes}$  utilisés ci-dessus sont définis à partir du calcul indiciel de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} &= \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{kl} \\ (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{jl} + \mathbf{A}_{il} \mathbf{B}_{jk}) \end{aligned} \quad (2.66)$$

### 2.3.3.3 Loi matériau de type Gent

Le modèle hyperélastique matériau Gent [Gen96] est un modèle phénoménologique de l'élasticité du caoutchouc qui est basé sur le concept de limitation de l'extensibilité de la chaîne. Dans ce modèle, la fonction de densité d'énergie de déformation est réalisée de sorte qu'elle a une singularité lorsque le premier invariant du tenseur des déformations de Cauchy-Green droit atteint une valeur limite  $I_m$ .

La fonction de densité d'énergie de déformation pour le modèle Gent est :

$$W = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \quad (2.67)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement et  $J_m = I_m - 3$ .

À la limite  $I_m \rightarrow \infty$ , le modèle Gent se réduit au modèle Néo-Hookéan. Cela peut être vu en exprimant le modèle Gent sous la forme

$$W = -\frac{\mu}{2x} \ln \left( 1 - (I_1 - 3)x \right) \quad ; \quad x = \frac{1}{J_m} \quad (2.68)$$

Une expansion de la série de Taylor de  $\ln(1 - (I_1 - 3)x)$  à la limite  $x \rightarrow 0$  aboutit à

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (2.69)$$

qui est l'expression de la densité d'énergie de déformation d'un solide Néo-Hookéan.

Comme pour les lois matériaux précédentes, nous calculons les dérivées partielles de ce nouveau potentiel par rapport aux trois invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$ , et reportons les résultats dans l'équation (2.39), nous obtenons l'expression du tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S} = \frac{\mu J_m J^{-2/3}}{(J_m - \hat{I}_1 + 3)} \left( \mathbf{I} - \frac{I_1}{3} \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (2.70)$$

Le tenseur d'élasticité  $\mathbb{D}$  est :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= a \left( \mathbf{I} - \frac{I_1}{3} \mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \left( \mathbf{I} - \frac{I_1}{3} \mathbf{C}^{-1} \right) \\ &\quad - b \left( \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} + \left( 1 + \frac{I_1}{3} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} - I_1 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\ &\quad + \frac{2}{d} \left( J^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + (J^2 - 1) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\mu J_m J^{-4/3}}{(J_m - \hat{I}_1 + 3)^2} \\ b &= \frac{2\mu J_m J^{-2/3}}{3(J_m - \hat{I}_1 + 3)} \end{aligned} \quad (2.72)$$

où  $\hat{I}_1 = I_1 J^{-2/3}$ .

### 2.3.3.4 Loi matériau de type Yeoh

Le modèle Yeoh (appelée aussi la forme polynomiale du troisième ordre réduit) décrit les matériaux caoutchouteux isotropes incompressibles [Yeo93]. La fonction de densité d'éner-

gie de déformation est :

$$W(I_1) = \sum_{i=1}^3 c_{i0}(I_1 - 3)^i \quad (2.73)$$

où  $c_{i0}$  sont des constantes matérielles.

Une particularité de ce modèle est qu'il ne dépend que du premier invariant  $I_1$ . Il s'applique à la caractérisation des propriétés élastiques de caoutchouc vulcanisé, remplis par du carbone noir. Il a été démontré qu'il pouvait s'adapter à différents modes de déformation en utilisant les données obtenues à partir d'un essai de traction uniaxiale seulement. Cela conduit à des exigences réduites sur les essais de matériaux.

Pour des raisons numériques, il s'avère utile de séparer la déformation dans les parties volumétrique et isochore par une séparation multiplicative d'un gradient de déformation comme nous l'avons présenté précédemment. Le premier invariant de  $\mathbf{C}^{iso}$  (La partie isochore du tenseur de déformations de Cauchy-Green à droite  $\mathbf{C}$ ) est alors définie par  $\hat{I}_1 = J^{-2/3}I_1$  qui remplace  $I_1$  dans  $W(I_1)$ .

L'expression du tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  obtenue est définie par :

$$\mathbf{S} = 2 \left( \sum_{i=1}^3 i c_{i0} (\hat{I}_1 - 3)^{i-1} \right) J^{-2/3} \left[ \mathbf{I} - \frac{I_1}{3} \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (2.74)$$

Le tenseur d'élasticité  $\mathbb{D}$  est :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= 4J^{-4/3} \alpha \left[ \mathbf{I} - \frac{I_1}{3} \mathbf{C}^{-1} \right] \otimes \left[ \mathbf{I} - \frac{I_1}{3} \mathbf{C}^{-1} \right] \\ &\quad - \frac{4}{3} J^{-2/3} \beta \left[ \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{I_1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - I_1 \mathbf{C}^{-1} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{C}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=2}^3 i(i-1) c_{i0} (\hat{I}_1 - 3)^{i-2} \\ \beta &= \sum_{i=1}^3 i c_{i0} (\hat{I}_1 - 3)^{i-1} \end{aligned} \quad (2.76)$$

### 2.3.3.5 Un exemple numérique

Afin d'évaluer l'implémentation des lois hyperélastiques, nous avons choisi de simuler l'impact d'un projectile mou (flash-ball) sur une partie du corps humain (cuisse) [CJCF10]. En effet un choc entre deux structures hyperélastiques de nature très différentes constitue un test relativement sévère sur lequel il sera facile d'interpréter les résultats notamment au niveau de la restitution d'énergie. Le modèle continu est discrétisé par la méthode des éléments finis, il comprend 2432 huit-nœuds éléments hexaédriques et 3300 nœuds, comme montré dans la figure 2.3.

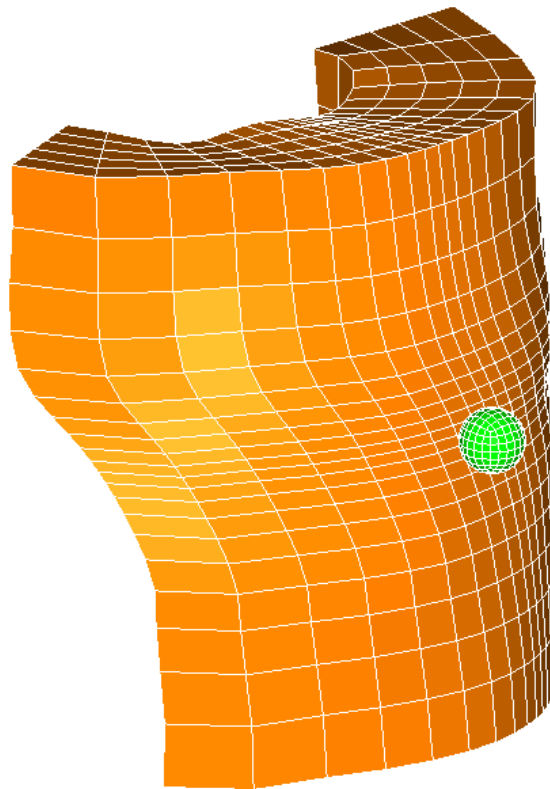


FIGURE 2.3 – Configuration et maillage initiaux

Plus précisément, dans le problème étudié, le flash-ball est creux et est constitué d'un matériau caoutchouc de type Blatz-Ko, et la cuisse est constituée (approche simplifiée) d'un tissu mou homogène intégrant la peau et les muscles de type Mooney-Rivlin. Les rayons intérieur et extérieur de la balle sont 0.011m et 0.022m respectivement. La vitesse d'impact initiale de la balle est de 100m/s. Les paramètres du modèle Blatz-Ko sont le module de cisaillement  $G = 50$  MPa, la densité de masse  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> ; Les paramètres du modèle

Mooney-Rivlin sont  $C_{01} = 0.31$  MPa [HFAT05],  $C_{10} = 0.0775$  MPa ( $C_{10}=C_{01}/4$  [VC96]),  $K = 6$  MPa, la densité de masse  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>.

Figure 2.4 montre les configurations déformées de ces deux corps au cours de la simulation. La zone d'impact est assez large en raison de la souplesse de balle, ce qui n'induit pas de danger létal mais peut provoquer de sévères traumatismes.

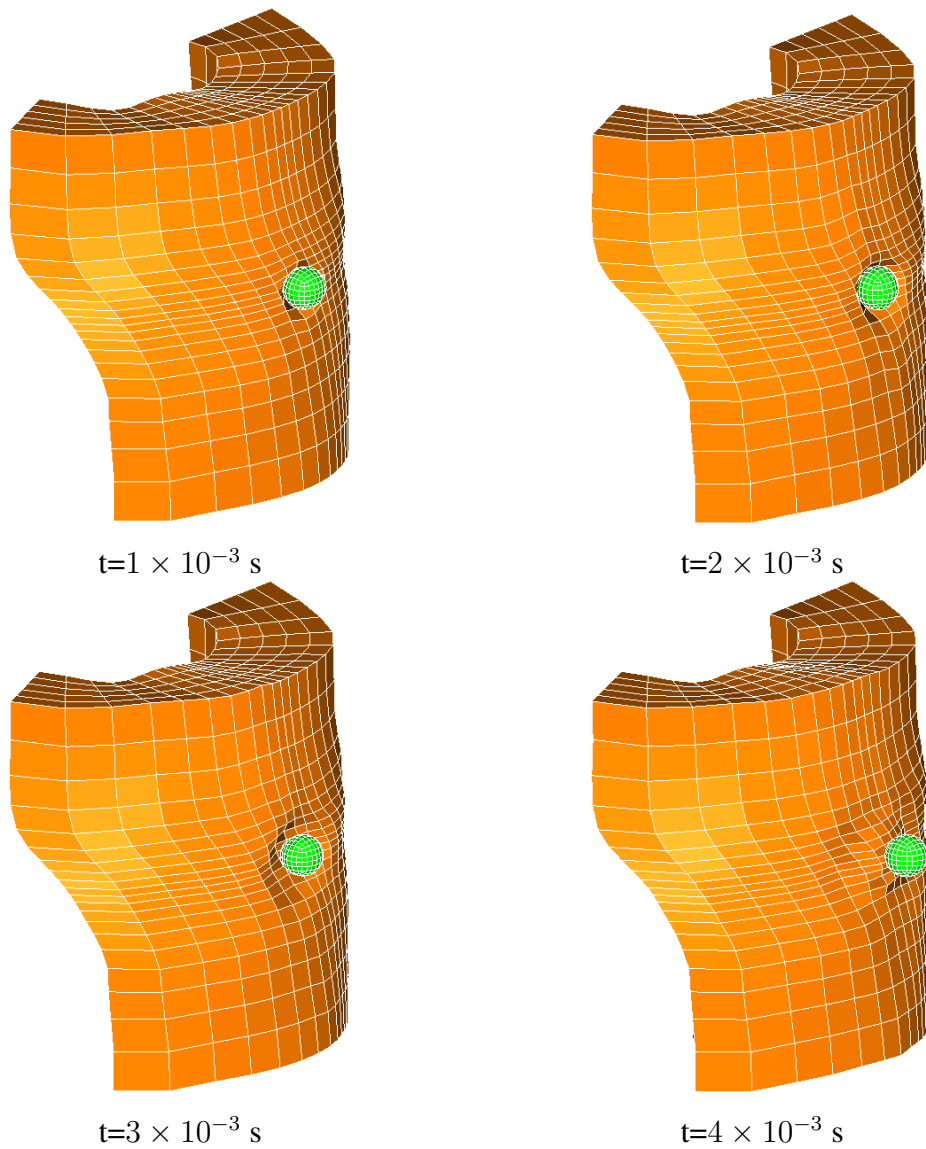


FIGURE 2.4 – Configurations déformées en fonction du temps

Afin d'observer plus clairement la répartition de la contrainte de Von Mises à l'intérieur de la zone de contact, nous avons découpé les deux corps par un plan diamétral de la sphère,

comme indiqué dans la figure 2.5. Il est à noter que la concentration est localisée dans la zone d'impact comme prévu. La valeur maximale de la contrainte de von Mises est 102.6 MPa, ce qui peut constituer un indicateur d'évaluation pour classer les niveaux de blessures des tissus mous par des médecins par exemple.

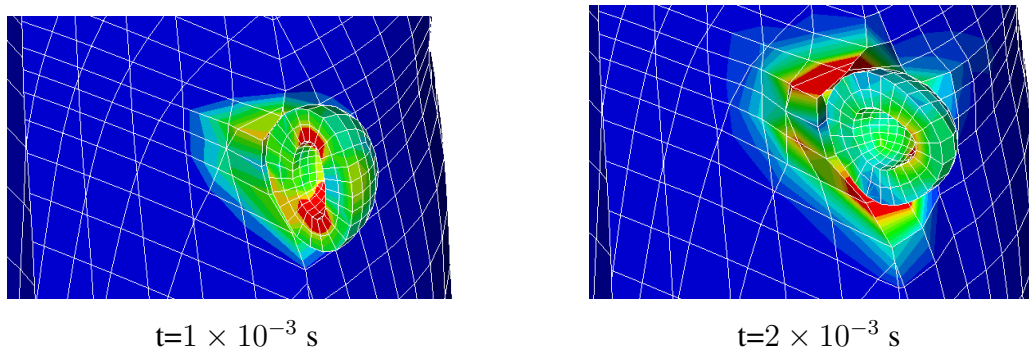


FIGURE 2.5 – Contrainte de Von Mises

Afin d'observer la déformation de la surface sur la zone d'impact, nous avons choisi trois points spécifiques A, B, C situés sur une ligne de maillage de la cuisse comme il est indiqué sur la Figure 2.6a. Le point A se trouve au centre de la zone d'impact et les deux autres points B et C sont situés de manière approximative symétriquement de part et d'autre du point A. La Figure 2.6b montre le déplacement de ces trois points dans la direction d'impact. Nous pouvons voir que le déplacement du point A augmente rapidement dans le sens de l'impact, tandis que les deux autres points se déplacent en sens inverse d'une quantité très proche compte tenu, comme signalé ci-dessus, que les positions de ces deux points ne sont pas tout à fait symétriques. Finalement, après le rebond de la balle, on observe bien un retour vers 0 des déplacements traduisant ainsi la réversibilité des déformations hyperélastiques.

La figure 2.7 montre les courbes évolution de l'énergie cinétique  $E_k$ , de l'énergie de déformation élastique  $E_e$  et de l'énergie mécanique totale  $E_t$ . L'énergie mécanique totale est censée être parfaitement conservée dans le cas de contact sans frottement. Cependant, on observe des légères fluctuations de l'énergie totale qui est un phénomène bien connu dû à l'intégration numérique explicite qui génère des oscillations à haute fréquence d'ordre numérique dans la solution. Toutefois on constate bien un transfert de l'énergie cinétique initiale durant l'impact en énergie de déformation élastique des deux corps sans instabilité numérique.

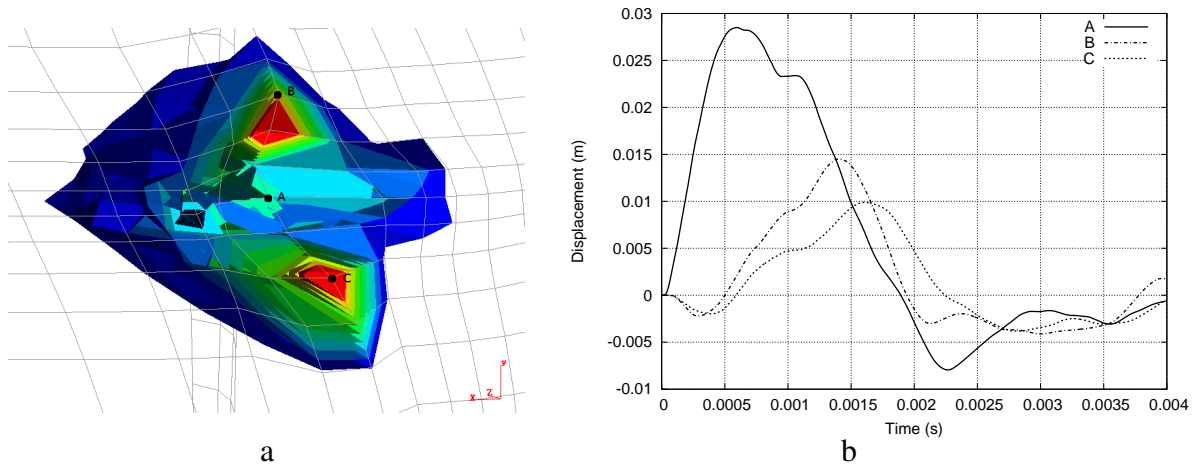


FIGURE 2.6 – Déplacement de trois points sélectionnés

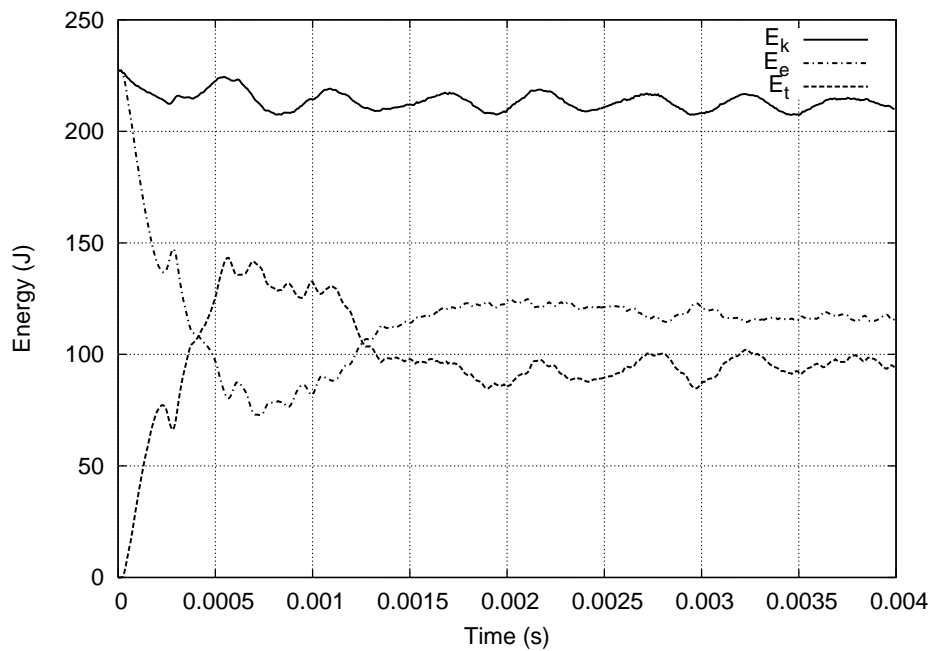


FIGURE 2.7 – Evolution de l'énergie

## 2.4 Anisotropie

Un matériau anisotrope est un matériau dont les propriétés diffèrent selon la direction considérée. Un tel matériau a une orientation propre : sa réponse mécanique à une sollicita-

tion diffère selon que la direction de cette sollicitation correspond ou non à son orientation propre. En particulier, un essai de traction donnera des résultats dépendant de l'orientation dans laquelle l'éprouvette a été taillée dans le matériau. Comme la plupart des organes biologiques contiennent des structures fibreuses musculaires ou à base de collagène, ce phénomène est donc typiquement présent en biomécanique [GOH06].

### 2.4.1 Hyperélasticité anisotrope

Les lois de comportements hyperélastiques anisotropes sont souvent utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis pour déterminer les déformations et les contraintes au sein de tissus biologiques tels que les ligaments, les tendons ou les parois artérielles [WMG96, AS98, RS00]. Holzapfel *et al.* [HGO00] ont proposé plusieurs approches théoriques pour modéliser le comportement anisotrope des artères en considérant la présence de structures fibreuses dans la paroi. Les densités d'énergie les plus utilisées impliquent des lois puissance ou exponentielles [FFP79, HGO00, SNB05]. Comme il est admis que l'anisotropie est due aux fibres de collagène [GOH06], alors que la matrice se comporte de manière isotrope, la densité d'énergie comporte généralement une partie isotrope et une partie anisotrope [WMG96] :

$$W = W_{iso} + \sum_{a=1}^n W_{ani}^a \quad (2.77)$$

Chaque densité anisotrope  $W_{ani}^a$  fait référence à une direction privilégiée du matériau. Pour modéliser les ligaments ou les tendons, le nombre de famille de fibres  $n$  est égal à 1. Il est égal à 2 pour représenter le comportement des parois artérielles. Dans la loi HGO proposée par [HGO00], deux densités anisotropes sont superposées avec deux directions privilégiées  $\mathbf{a}^1$  et  $\mathbf{a}^2$  correspondant à deux familles de fibres distinctes :

$$\mathbf{a}^1 = \{\cos(\beta), \sin(\beta), 0\}^T \quad ; \quad \mathbf{a}^2 = \{\cos(\beta), -\sin(\beta), 0\}^T \quad (2.78)$$

où  $\beta$  représente l'angle entre les fibres de collagène et la direction circonférentielle sur des tissus extraits d'aorte abdominale humaine comme on peut le voir sur la figure 2.8.  $\beta$  est prédite à  $43.39^\circ$  dans le travail de Balzani *et al.* ([BNSH06]). Dans notre travail, nous considérons  $\beta$  comme un paramètre du modèle variant de  $0$  à  $90^\circ$ . Par la suite, on notera en abrégé

$c$  et  $s$  le cosinus et le sinus de l'angle  $\beta$ .

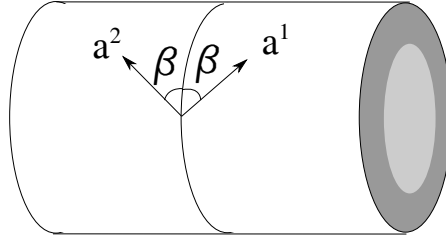


FIGURE 2.8 – Angle  $\beta$

Les lois hyperélastiques anisotropes incluent les trois invariants classiques  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  de la matrice de dilataion  $\mathbf{C}$  comme mentionné dans (2.34) ainsi que deux invariants additionnels  $J_4$  et  $J_5$  liés à l'anisotropie des tissus et définis en fonction du tenseur structurel  $\mathbf{M}$  [Spe87, Boe87, ZS93].

$$J_4 = \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{M}), \quad J_5 = \text{tr}(\mathbf{C}^2\mathbf{M}) \quad (2.79)$$

Le tenseur structurel  $\mathbf{M}$ , qui représente l'isotropie transverse, est relié à la direction préférentielle des fibres  $\mathbf{a}$  :

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad (2.80)$$

Dans le cas du modèle HGO, ce tenseur s'écrit, en tenant compte de (2.78) :

$$\mathbf{M}^{a^1} = \begin{bmatrix} c^2 & cs & 0 \\ cs & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{M}^{a^2} = \begin{bmatrix} c^2 & -cs & 0 \\ -cs & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Il est à noter que (2.79) et (2.80) donnent

$$J_4 = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) = \|\mathbf{F}\mathbf{a}\|^2 \quad (2.82)$$

$\|\cdot\|$  représente la norme Euclidienne. La racine carrée de  $J_4$  représente donc l'étirement dans la direction des fibres. Il peut également être interprété comme la coordonnée radiale

de  $\mathbf{Fa}$  dans un système de coordonnées cylindrique où l'angle polaire  $\theta$  représente l'angle déformé entre les fibres de collagène et la direction circonférentielle (voir figure 2.9).

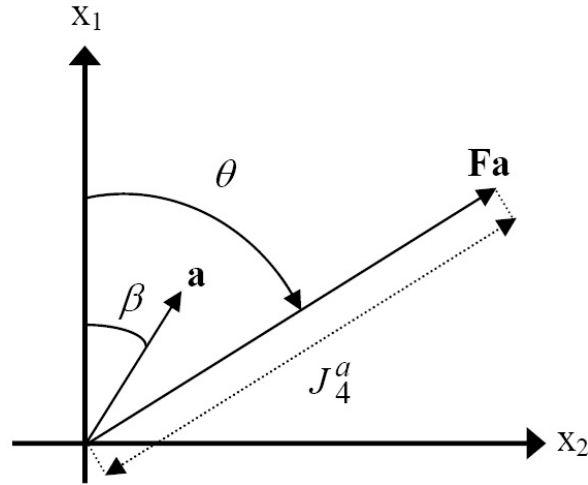


FIGURE 2.9 – Système de coordonnées cylindriques

## 2.4.2 Modèle Gent HGO

Nous proposons d'utiliser la loi constitutive Gent pour modéliser le comportement isotrope de la matrice non collagénique en raison de sa généralité et de sa capacité à reproduire le modèle Néo-Hookéan. On propose ensuite de la combiner avec la loi constitutive Holzapfel-Gasser-Ogden pour représenter le comportement anisotrope hyperélastique des tissus mous biologiques [CFJZ13]. Ce modèle particulier a été mis en œuvre dans un code par éléments finis développé par le LMEE [Fen08].

Pour des raisons numériques, il s'avère utile de séparer la déformation liée à la partie déviatorique des contraintes et de la déformation liée à la partie sphérique par une division multiplicative d'un gradient de déformation comme dans (2.41). D'après la section (2.3.2), on peut construire les invariants modifiés suivants :

$$\hat{I}_1 = I_1 J^{-2/3}, \quad \hat{I}_2 = I_2 J^{-4/3}, \quad \hat{J}_4^a = J_4^a J^{-2/3}, \quad \hat{J}_5^a = J_5^a J^{-4/3} \quad (2.83)$$

Le modèle HGO utilise la formulation en invariants modifiés avec la densité d'énergie  $W$

définie par :

$$W = \hat{W}(\hat{I}_1, \hat{J}_4^a) + W_H(J) \quad (2.84)$$

$$W_H(J) = \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right) \quad (2.85)$$

$$\hat{W}(\hat{I}_1, \hat{J}_4^a) = W_{iso}(\hat{I}_1) + \sum_{a=1}^2 W_{ani}(\hat{J}_4^a) \quad (2.86)$$

$$W_{ani}^a = \begin{cases} \frac{k_1}{2k_2} \left[ e^{k_2(\hat{J}_4^a - 1)^2} - 1 \right] & \text{if } \hat{J}_4^a \geq 1 \\ 0 & \text{if } \hat{J}_4^a < 1 \end{cases} \quad (2.87)$$

Généralement, les tissus mous biologiques sont supposés être incompressibles. L'équation (2.85), qui a été proposé par Horgan et Saccomandi [HS03], représente un terme de pénalité ajouté au modèle éléments finis pour tenir compte du comportement du matériau incompressible, dans laquelle  $d$  est le paramètre incompressibilité matériau. Le module d'élasticité isostatique  $K$  est défini par :  $K = 2/d$ . Certains autres modèles peuvent être trouvés dans [HS04, HS06]. La contribution anisotrope  $W_{ani}$  est de type exponentiel qui ne dépend que du quatrième invariant. Comme  $\hat{J}_4^a$  représente le carré de l'allongement dans la direction  $\mathbf{a}$ , et que la densité est nulle lorsque  $\hat{J}_4^a$  est inférieur à 1, le modèle HGO prend en compte le fait que les fibres ne travaillent pas en compression. La preuve de la convexité de  $W_{ani}^a$  par rapport à  $\mathbf{F}$  est donnée dans [BNSH06, SNB05].

La matrice non collagénique est modélisée par la densité isotrope d'énergie suivant le modèle de Gent défini ci-dessus (2.67). On rappelle enfin, qu'en dérivant  $W$  à partir de (2.52) et en introduisant la matrice des cofacteurs de  $\mathbf{C}$ ,  $Cof(\mathbf{C}) = I_3 \mathbf{C}^{-T}$ , on obtient classiquement [SNB05] :

$$\mathbf{S} = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) + \frac{\partial W}{\partial I_3} cof(\mathbf{C}) + \frac{\partial W}{\partial J_4^1} \mathbf{M}^{a^1} + \frac{\partial W}{\partial J_4^2} \mathbf{M}^{a^2} + \frac{\partial W}{\partial J_5^1} (\mathbf{C} \mathbf{M}^{a^1} + \mathbf{M}^{a^1} \mathbf{C}) + \frac{\partial W}{\partial J_5^2} (\mathbf{C} \mathbf{M}^{a^2} + \mathbf{M}^{a^2} \mathbf{C}) \right] \quad (2.88)$$

Pour le cas particulier qui nous intéresse, l'équation (2.88) est réduit à :

$$\mathbf{S} = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \text{cof}(\mathbf{C}) + \frac{\partial W}{\partial J_4^1} \mathbf{M}^{a^1} + \frac{\partial W}{\partial J_4^2} \mathbf{M}^{a^2} \right] \quad (2.89)$$

où les dérivées premières de la densité d'énergie par rapport aux invariants se calculent à partir de (2.87, 2.67) :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = I_3^{-1/3} \frac{dW_{iso}}{d\hat{I}_1} \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_3} = -\frac{1}{3I_3} \left[ \hat{I}_1 \frac{dW_{iso}}{d\hat{I}_1} + \sum_{a=1}^2 \hat{J}_4^a \frac{dW_{ani}}{d\hat{J}_4^a} \right] + \frac{1}{2d} \left( 1 - \frac{1}{J^2} \right) \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial W}{\partial J_4^a} = I_3^{-1/3} \frac{dW_{ani}}{d\hat{J}_4^a} \quad (2.92)$$

$$\frac{dW_{iso}}{d\hat{I}_1} = \frac{\mu J_m}{2(J_m - \hat{I}_1 + 3)} \quad (2.93)$$

$$\frac{dW_{ani}}{d\hat{J}_4^a} = k_1 (\hat{J}_4^a - 1) e^{k_2 (\hat{J}_4^a - 1)^2} \quad (2.94)$$

Les contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  se déduisent de  $\mathbf{S}$  par la relation classique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (2.95)$$

Afin de mettre en évidence la séparation entre la partie sphérique et la partie déviatorique des contraintes, l'opérateur déviatorique  $dev$  est utilisé comme introduit précédent :

$$\boldsymbol{\sigma} = W'_H \mathbf{I} + \frac{2}{J} dev \left[ \widehat{\mathbf{F}} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \widehat{\mathbf{C}}} \widehat{\mathbf{F}}^T \right] \quad ; \quad dev \square = \square - \frac{1}{3} (\text{trace} \square) \mathbf{I} \quad (2.96)$$

Le premier terme de (2.96) correspond à la partie sphérique des contraintes, associée à la dilatation, et le second terme correspond à la partie déviatorique.

Les modules tangents  $\mathbb{D}$  de la loi de comportement s'expriment classiquement à l'aide

des dérivées premières et secondes de la densité d'énergie par [SNB05] :

$$\begin{aligned}
\mathbb{D} &= a \left( \mathbf{I} - \frac{I_1}{3} \mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \left( \mathbf{I} - \frac{I_1}{3} \mathbf{C}^{-1} \right) \\
&\quad - b \left( \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} + \left( 1 + \frac{I_1}{3} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} - I_1 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\
&\quad + \frac{2}{d} \left( J^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + (J^2 - 1) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right) + c (\mathbf{M} \otimes \mathbf{M})
\end{aligned} \tag{2.97}$$

avec

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2\mu J_m J^{-4/3}}{(J_m - \hat{I}_1 + 3)^2} \\
b &= \frac{2\mu J_m J^{-2/3}}{3(J_m - \hat{I}_1 + 3)} \\
c &= 4k_1(1 + 2k_2(\hat{J}_4 - 1)^2) e^{k_2(\hat{J}_4 - 1)^2}
\end{aligned} \tag{2.98}$$

## 2.4.3 Exemples numériques

### 2.4.3.1 Traction uniaxiale homogène

Nous considérons le modèle Gent + HGO dans le cadre d'un essai quasi statique de traction uniaxiale homogène (figure 2.10). Ce test est habituellement utilisé pour identifier les propriétés mécaniques de bandes de tissus artériels [Hol06, BNSH06].

Pour adapter ce modèle numérique avec les données expérimentales fournies dans [BNSH06], les paramètres obtenus après identification sont :  $\mu = 17.41$  kPa,  $J_m = 60.0$  kPa,  $k_1 = 0.0017$  kPa,  $k_2 = 882.847$  et  $\beta = 43.39^\circ$ . Les trois dernières données proviennent de [BNSH06]. La figure 2.11 montre la réponse de notre modèle constitutif Gent + HGO, celle du modèle constitutif Néo-Hookéan + HGO donnée par [BNSH06], ainsi que les données de l'expérience. Comme on peut le voir, la correspondance est assez bonne, même meilleur que modèle constitutif HGO combiné avec le modèle Néo-Hookéan, le caractère exponentiel est mieux pris en compte en utilisant le modèle Gent.

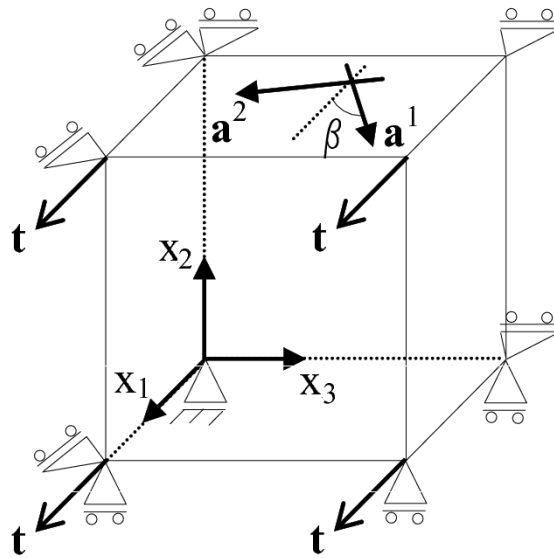
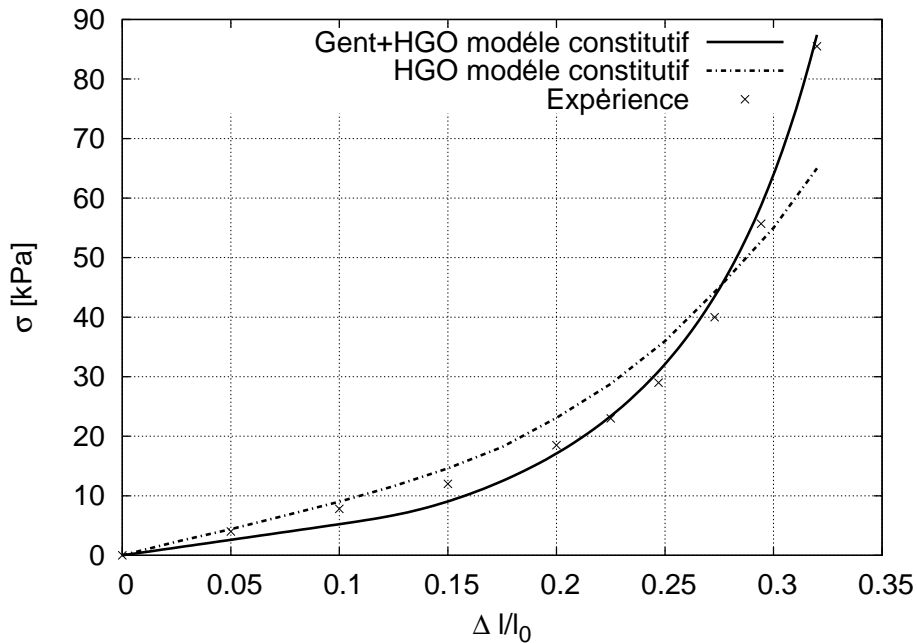


FIGURE 2.10 – Essai de traction uniaxiale homogène

FIGURE 2.11 – Contraintes de Cauchy  $\sigma$ (kPa) vs. déformation  $\Delta l/l_0$  de l'expérience et du modèle constitutif

Rappelons que le modèle Gent a un paramètre matériel supplémentaire  $J_m$  par rapport au modèle Néo-Hookéan. Rappelons également que lorsque ce paramètre tend vers l'infini, le modèle de Gent tend vers le modèle Néo-Hookéan. Les résultats obtenus montrent clairement

l'influence de ce paramètre qui limite l'extensibilité et son importance pour corrélérer avec les résultats expérimentaux.

Pour la suite, on se place toujours dans le cas d'un essai de traction, mais on modifie la valeur du paramètre  $\beta = 70.0^\circ$ , tout en considérant différentes valeurs de  $J_m$ . La figure 2.12 montre l'influence de  $J_m$  sur les niveaux de contraintes obtenus. On remarque la forte variation des résultats lorsque  $J_m$  varie de 1 à 10, plus  $J_m$  augmente, plus le déclenchement des contraintes liées à la limite d'extensibilité est retardé. Ce phénomène se poursuit pour  $10 < J_m < 100$  mais, bien sûr, plus le déclenchement est retardé moins il est possible d'atteindre des niveaux de contraintes élevés dans la plage des déplacements imposés. La figure 2.13 montre l'influence de  $J_m$  sur les élongations principales, on y remarque un point de bifurcation sur les élongations transverses à partir d'un certain seuil de l'élongation longitudinale. En dessous de ce seuil le comportement transverse est conforme à un comportement classique isotrope, dans lequel les deux élongations transversales diminuent et sont identiques. Par contre au delà de ce seuil, une des deux élongations transversales augmente.

Pour évaluer la dépendance des élongations principales sur  $J_4$ , une étude analytique a été réalisée par Peyraut *et al.* [[PFLR10]] pour différentes valeurs d'angle initial  $\beta$ . Cette étude a montré l'existence d'un angle critique ( $\beta_c \approx 54.73^\circ$ ) déterminé analytiquement. En effet, il semble que la correspondance entre les élongations principales et  $J_4$  n'est pas biunivoque lorsque  $\beta$  est plus grand que  $\beta_c$ , tandis que l'unicité est vérifiée dans le cas contraire. Sur la figure 2.14 sont représentées les courbes représentatives de  $\lambda_2$  en fonction de  $J_4$  pour différentes valeurs de  $\beta$ .

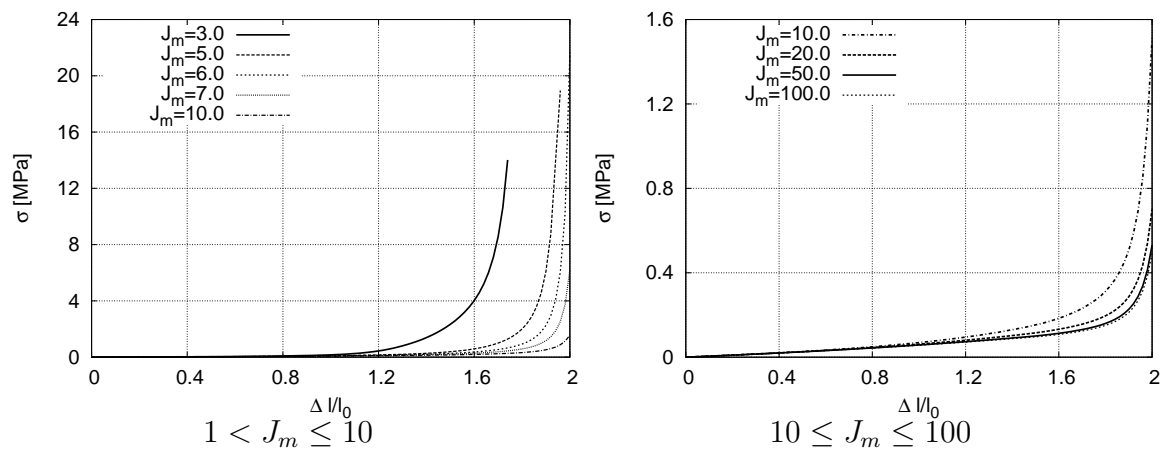
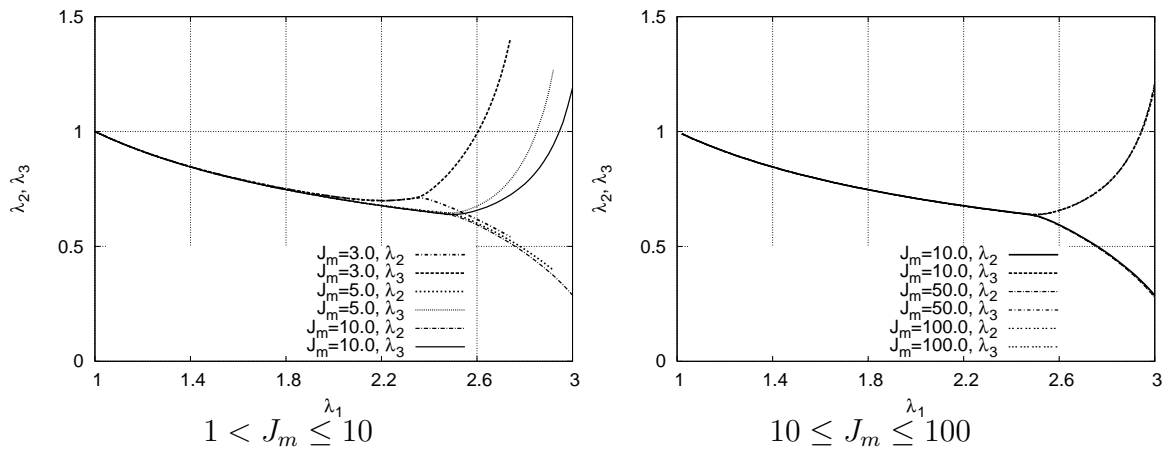


FIGURE 2.12 – Influence de  $J_m$  sur le niveau de contrainte

FIGURE 2.13 – Influence de  $J_m$  sur les déformations principales

Afin de valider numériquement l'existence d'un angle critique, on effectue trois tests de traction correspondant respectivement à trois angles initiaux différents :  $40^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $70^\circ$ . Les autres paramètres du matériau sont choisis d'après [HGO00] avec :  $\mu = 6.0$  kPa,  $J_m = 50.0$  kPa,  $k_1 = 2.3632$  kPa,  $k_2 = 0.8393$ . La figure 2.15 représente l'évolution des trois élongations principales pour chaque valeur de  $\beta$ . Comme on peut le voir sur la figure 2.14, si  $\beta < \beta_c$  (e.g.,  $\beta = 20^\circ$ ), alors pendant tout le processus de traction,  $J_4$  est toujours égal ou supérieur à 1, ce qui signifie que le tissu biologique est toujours étiré dans la direction des fibres. Dès le début, l'énergie liée à l'anisotropie de la déformation est prise en compte, cela explique pourquoi dans la figure 2.15 (gauche) les deux déformations principales  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  ne sont pas les mêmes. Le tissu biologique ne peut donc pas être raccourci dans la direction des fibres. En revanche, si  $\beta > \beta_c$  (e.g.,  $\beta = 70^\circ$ ),  $J_4$  peut être inférieure à 1 pendant un certain temps, ce qui signifie que le modèle HGO se comporte comme le modèle isotrope de Gent. Comme on peut le voir sur la figure 2.14, l'étendue de cette phase de transfert d'un comportement isotrope vers un comportement anisotrope augmente en corrélation avec l'angle initial, comme indiqué dans la figure 2.15 (droit). Durant cette phase le tissu biologique peut être raccourci dans la direction des fibres.

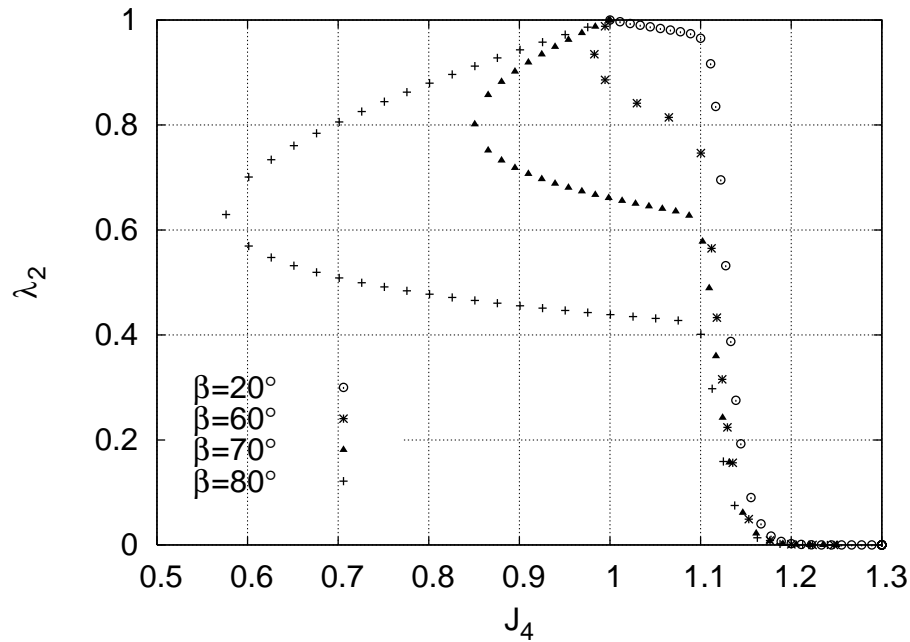


FIGURE 2.14 –  $\lambda_2$  vs.  $J_4$  pour différentes valeurs de  $\beta$  [PFLR10]

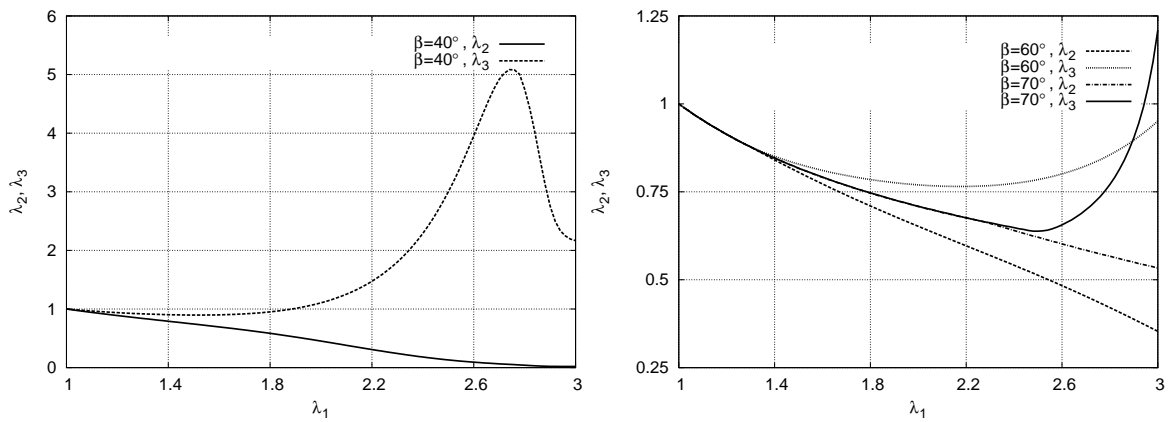


FIGURE 2.15 – Evolution des trois déformations principales pour différentes valeurs de  $\beta$

### 2.4.3.2 Traction uniaxiale simple

Nous considérons le modèle Gent + HGO dans le cadre d'un essai quasi statique de traction uniaxiale simple (figure 2.16). Dans ce cas, les déformations ne sont pas homogènes. La déformée numérique correspondant à la traction uniaxiale simple est présentée sur la figure 2.17 pour un angle  $\beta$  égal à  $49.98^\circ$ . Les paramètres du matériau sont :  $\mu = 15.28$  kPa,  $J_m = 50.0$  kPa,  $k_1 = 996.6$  kPa,  $k_2 = 524.6$ . La géométrie du modèle de bande de

l'adventice sont les suivants : longueur  $L = 10.0mm$ , largeur  $W = 3.0mm$  et épaisseur  $T = 0.5mm$ . Ce modèle se compose de 3200 éléments hexaédriques.

Figure 2.17 (droite) représente la configuration déformée et la contrainte de von Mises de l'échantillon. Selon les hypothèses structurales dans [HGO00] et [ZFHS04], le collagène est intégré en tant que deux familles de fibres qui sont disposés symétriquement par rapport à la direction de traction (axiale). On note un rétrécissement de la section dans la direction  $y$  et un gonflement dans la direction  $z$ , ce qui est typique d'un comportement non isotrope. Les fibres de collagène se courbent sous la charge, jusqu'à être capables de la supporter. Cela conduit à l'augmentation de l'épaisseur au milieu de l'échantillon comme le montre la figure 2.17 (droite). En raison du caractère d'incompressibilité, la largeur de l'échantillon diminue. Ce résultat est conforme aux observations réalisées dans [GOH06]. Le déplacement dans la direction  $z$  est montré dans la figure 2.18. On peut voir clairement que le déplacement dans la direction  $z$  est totalement symétrique par rapport à l'axe de l'éprouvette.

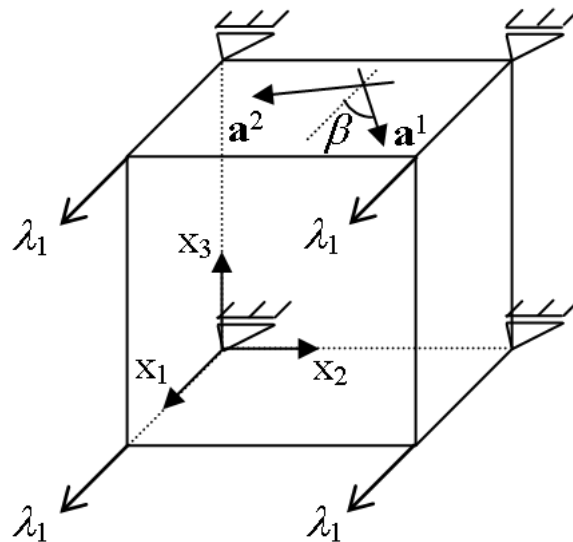


FIGURE 2.16 – Essai de traction uniaxiale simple

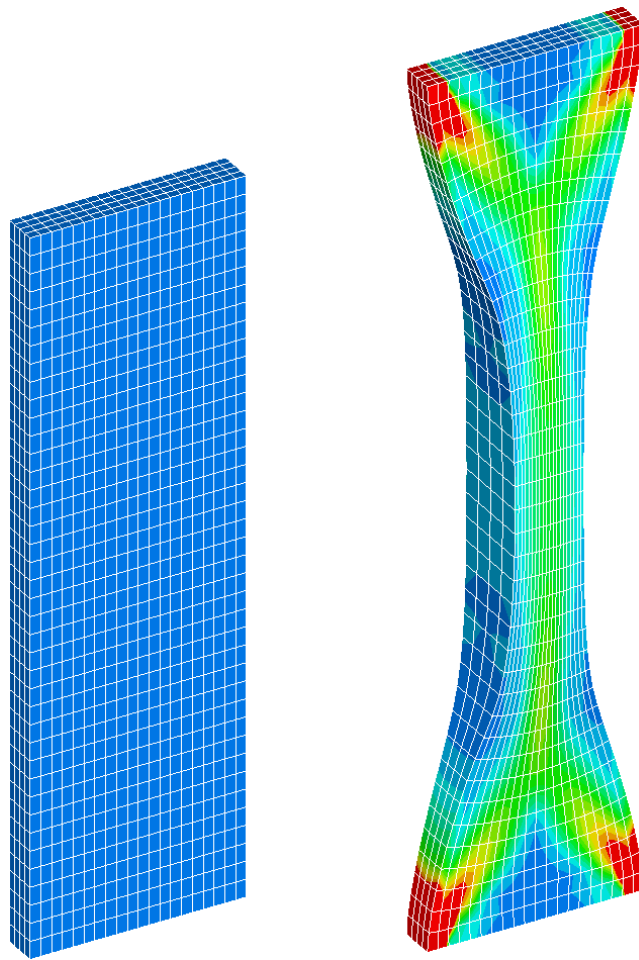


FIGURE 2.17 – Test de traction uniaxiale simple - calcul numérique avec FER

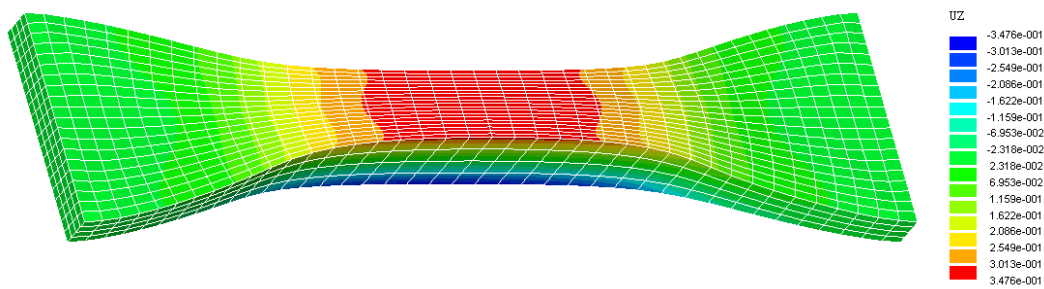


FIGURE 2.18 – Déplacement dans la direction z

## 2.5 Caractérisation et identification des propriétés des tissus pelviens

### 2.5.1 Principe théorique de l'identification

Nous venons de caractériser le comportement mécanique des tissus mous par différentes lois hyperélastiques, toutes paramétrées par des coefficients conformément à une approche phénoménologique. Il s'agit dans ce chapitre d'identifier ces coefficients à partir de résultats d'essais mécaniques.

Il est possible d'envisager plusieurs types d'essais mécaniques comme des essais de traction unidirectionnel, bidirectionnel, tridirectionnel (ou volumétrique) ou encore des essais de cisaillement pur.

Pour obtenir ces coefficients, on utilise une méthode d'ajustement de courbe par rapport aux données expérimentales. La fonction mathématique de cette courbe est liée au type d'essai et au modèle de comportement choisi et traduit une relation entre contrainte et déformation. Dans cette fonction apparaît de manière explicite les coefficients rendant ainsi possible une identification.

Pour procéder à cette identification, on construit une fonction objective comme étant la norme d'un résidu entre les quantités mesurées et les quantités numériques déduites de la fonction à ajuster. Dans notre cas les deux fonctions objectives suivantes sont possibles :

$$err^R = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\sigma_i^{calc}}{\sigma_i^{measured}}\right)^2 \quad (2.99)$$

Fonction objective représentant l'erreur relative.

$$err^A = \sum_{i=1}^n (\sigma_i^{measured} - \sigma_i^{calc})^2 \quad (2.100)$$

Fonction objective représentant l'erreur absolue.

Où  $n$  est le nombre total des données,  $\sigma_i^{calc}$  est la contrainte calculée au point  $i$ ,  $\sigma_i^{measured}$  est la contrainte expérimentale au point  $i$ . En général c'est l'erreur relative qui est choisie comme fonction objective à minimiser.

Compte tenu de ce qui a été décrit dans les paragraphes précédents, on peut considérer que

pour un matériau isotrope, le potentiel de déformation se décompose en une partie isochore et une partie volumique de la manière générale suivante :

$$W = f(\hat{I}_1 - 3, \hat{I}_2 - 3) + g(J - 1) \quad (2.101)$$

avec  $g(J - 1) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i}$ . Après un développement en série de Taylor on obtient :

$$W = \sum_{i,j=0}^N C_{ij} (\hat{I}_1 - 3)^i (\hat{I}_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i} \quad (2.102)$$

Ce potentiel de déformation est de forme polynomiale, le paramètre  $N$  désigne l'ordre du polynôme. Quel que soit le valeur de  $N$  on doit vérifier les conditions suivantes :

$$\mu_0 = 2(C_{10} + C_{01}) \quad , \quad k_0 = \frac{2}{d_1} \quad (2.103)$$

avec  $\mu_0$  qui représente le module de cisaillement initial et  $k_0$  le module de compressibilité initial, définis en petites déformation.

On peut montrer qu'en fixant un ordre au polynôme et en annulant de manière adéquate certains coefficients, on retrouve la plupart des modèles hyperélastiques énoncés plus haut.

Ainsi on retrouve le modèle de Yeoh pour  $N = 3$  et  $C_{ij} = 0$  ( $j \neq 0$ ) :

$$W = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i} \quad (2.104)$$

Pour le modèle polynomial complet, nous pouvons écrire  $\sigma_{calc}^i$  sous la forme suivante :

$$\sigma_{calc}^i = \sum_{i,j=0}^N C_{ij} X_{ij}(\lambda_k) \quad , \quad k = 1 \dots n \quad (2.105)$$

dans laquelle la fonction de  $X_{ij}(\lambda_k)$  est relative aux différents essais mécaniques. Afin de

minimiser l'erreur relative, nous devons vérifier :

$$\frac{\partial err^R}{\partial C_{ij}} = 0 \quad (2.106)$$

On obtient alors les équations suivantes :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i,j=0}^N \frac{X_{ij}(\lambda_k) X_{lm}(\lambda_k)}{(\sigma_k^{measured})^2} C_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{X_{lm}(\lambda_k)}{\sigma_k^{measured}} \quad , \quad l, m = 1 \dots N \quad (2.107)$$

Nous pouvons obtenir les coefficients  $C_{ij}$  par résolution de ces équations linéaires.

Dans la pratique, il existe des logiciels intégrés dans des codes de calculs mécaniques (ANSYS, NASTRAN, ...) permettant d'effectuer des identifications avec de nombreuses lois de comportement notamment Mooney-Rivlin, Ogden, et Yeoh etc. Citons notamment le logiciel MSC.Marc Mentat que nous avons utilisé, qui grâce aux fonctions d'ajustement de courbes calcule automatiquement les coefficients à partir de données expérimentales de contrainte/déformation et ceci pour différents types d'essai mécanique.

## 2.5.2 Résultats expérimentaux de tissus mous d'organes pelviens issus de la littérature

Ne disposant pas de moyens expérimentaux pour caractériser des tissus mous, nous nous sommes basés sur des résultats trouvés dans la littérature traitant spécifiquement des organes pelviens afin de déterminer les coefficients qui seront mis en jeu dans nos propres modèles hyperélastiques.

Rubod *et al.* ont déterminé un protocole expérimental permettant de caractériser de façon fiable le comportement de l'ensemble des tissus mis en jeu, en étudiant l'influence des conditions de prélèvement, de stockage des échantillons et des conditions d'essais [RBB<sup>+</sup>06] sur des tissus de cadavres humains. Des essais de traction uni-axiale à vitesse de déformation constante ont été réalisés sur des éprouvettes de géométrie normalisée [RBB<sup>+</sup>07]. Les courbes obtenues et présentées sur la figure 2.19, ont permis de mettre en évidence le comportement hyperélastique des tissus des trois organes pelviens principaux. On remarque que les pentes des courbes à l'origine sont très faibles. On remarque également que la vessie à un comportement presque linéaire contrairement au rectum et au vagin pour lesquels les pentes des courbes, soit la raideur du tissu, augmentent avec la déformation de manière régulière

pour tendre ensuite vers un comportement asymptotique.

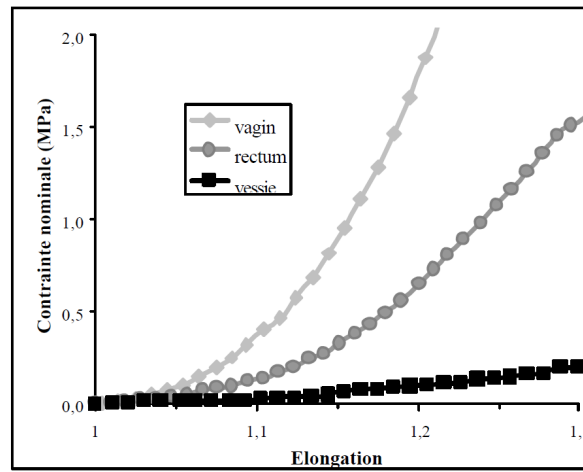


FIGURE 2.19 – Réponse des tissus pelviens à une sollicitation de traction uniaxiale [RBB<sup>+</sup>07]

À partir de ces résultats expérimentaux, dans un autre article [VRRB<sup>+</sup>10], Venugopala Rao *et al.* ont procédé à une identification de coefficients en utilisant une loi de comportement de type Mooney-Rivlin. Les résultats sont représentées sur la figure 2.20 et le tableau 2.1.

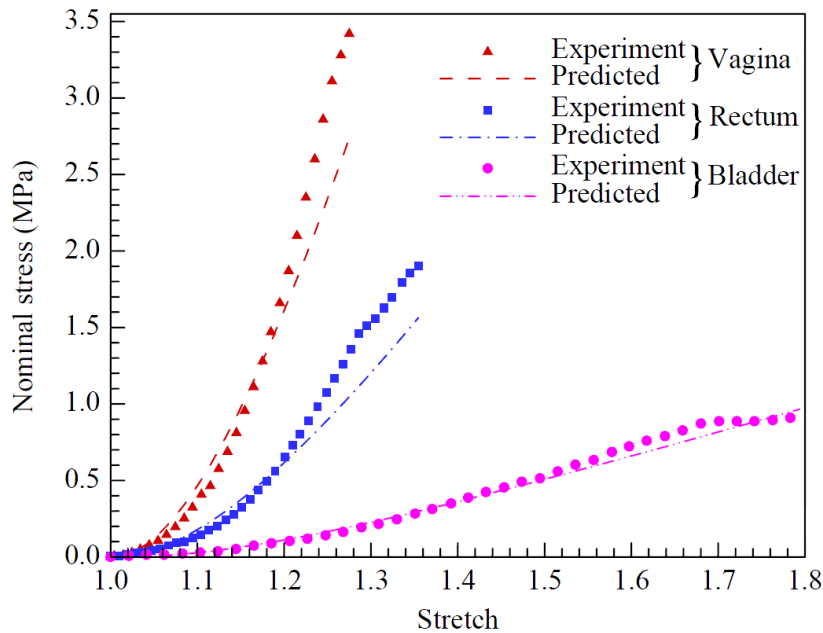


FIGURE 2.20 – Confrontation de la réponse des tissus pelviens [VRRB<sup>+</sup>10]

TABLE 2.1 – Paramètres des tissus mous selon la loi de comportement Mooney-Rivlin.

Coefficients matériaux	Vagin	Rectum	Vessie
$C_{10}$ (MPa)	19.5	7.45	1.52
$C_{01}$ (MPa)	-19.6	-7.48	-1.56

Même si les courbes semblent bien approcher les résultats expérimentaux, on remarque que la contrainte  $\mu_0 = 2(C_{10} + C_{01})$  n'est pas respectée ce qui pose un problème sur la physique du phénomène. Nous avons procédé également à la même identification à partir de leurs résultats expérimentaux et nous avons trouvé des résultats similaires. Dans un article plus récent [GRB<sup>+</sup>11], ils ont comparé les propriétés biomécaniques du tissu vaginal, de l'aponévrose abdominale et de la peau. Cette fois, les paramètres identifiés pour le tissu vaginal sont :  $C_{01} = 0.35 \pm 0.25$  (MPa),  $C_{10} = 1.32 \pm 0.057$  (MPa). Ces paramètres, qui semblent plus fiables physiquement, ont été obtenus en identifiant la courbe par morceaux c'est à dire en séparant les données relatives à de faibles déformations des données relatives à de grandes déformations, ce qui ne repose sur aucune justification théorique mais sur une interprétation physique du rôle des coefficients.

Dans les travaux de thèse de Boubaker [Bou09], il a été choisi la loi constitutive d'Ogden pour simuler la vessie et le rectum. L'identification a été faite à partir de leurs propres mesures et de celles de Rubold *et al.* [RBB<sup>+</sup>07] permettant ainsi d'avoir des éléments de comparaison. Avec leur mesures :

$$\sigma_{vessie} = 10^{-4}(\lambda^{10.36} - \lambda^{-5.18}) \quad \sigma_{rectum} = 16E^{-3}(\lambda^{11.15} - \lambda^{-5.57}) \quad (2.108)$$

Avec celles de Rubod *et al.* :

$$\sigma_{vessie} = 7.5E^{-4}(\lambda^{6.76} - \lambda^{-3.38}) \quad \sigma_{rectum} = 10^{-3}(\lambda^{14.6} - \lambda^{-7.3}) \quad (2.109)$$

Les courbes obtenues sont représentées sur la figure 2.21.

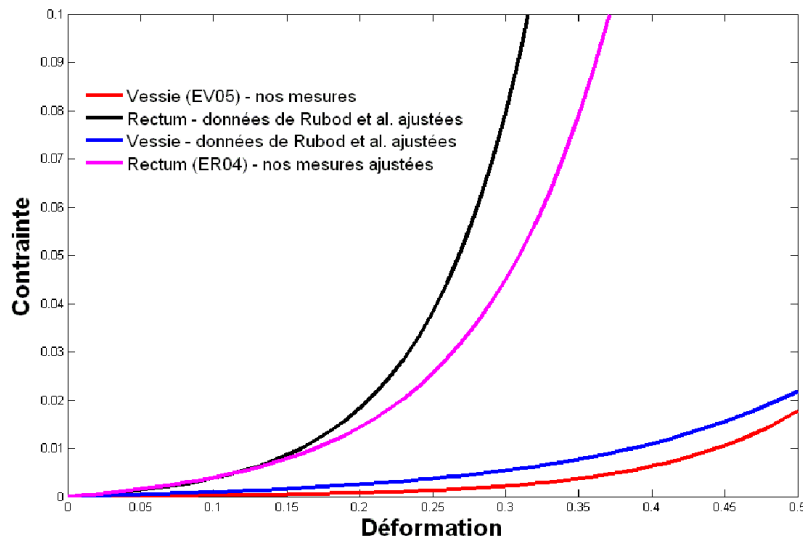


FIGURE 2.21 – Réponses de la vessie et du rectum [Bou09]

Ces résultats confirment les allures caractéristiques des courbes expérimentales et montrent que le modèle d'Ogden ne pose pas de problème d'identification contrairement au modèle de Mooney Rivlin qui nécessite des ajustements au niveau de l'identification des coefficients.

Les ligaments pelviens jouent un rôle déterminant dans les troubles de la statique pelvienne. Rivaux *et al.* [RRD<sup>+</sup>11] ont réalisé des essais statistiques de traction sur trois types de ligaments pelviens, utérosacrés, ronds et larges, jusqu'à la rupture. Un comportement hyperélastique caractéristique des tissus mous a été identifié pour ces trois ligaments. Il a été démontré que le ligament utérosacré était plus rigide que les ligaments ronds, larges et que le tissu vaginal comme on peut le voir sur la figure 2.22.

Pour ces trois ligaments, une identification selon la loi constitutive Mooney Rivlin a été réalisée comme précédemment, c'est à dire en séparant les données liées aux petites déformations de celles liées aux grandes déformations.

Gabriel *et al.* [GRB<sup>+</sup>11] ont comparé les propriétés biomécaniques des tissus vaginaux, des tissus de l'aponévrose abdominale, et des tissus de la peau. Le résultat montre que l'aponévrose est beaucoup plus rigide et moins extensible que le vagin et la peau, que le tissu vaginal est moins rigide, mais plus extensible que la peau. Il n'y a pas de différence entre le vagin et la peau en faibles déformations, mais une différence significative en fortes déformations. Les propriétés viscoélastiques mécaniques du tissu vaginal ont été étudiées par Peña *et al.* [PCM<sup>+</sup>10]. Plus récemment, le comportement de ramollissement ou de l'effet Mullins du tissu vaginal a été étudié et un modèle constitutif a été proposé [PMM<sup>+</sup>11]. Enfin citons pour compléter cette bibliographie, la thèse de Pacini [Pac05] dans laquelle il a été effectué

des essais sur un utérus humain et testé différentes lois de comportement.

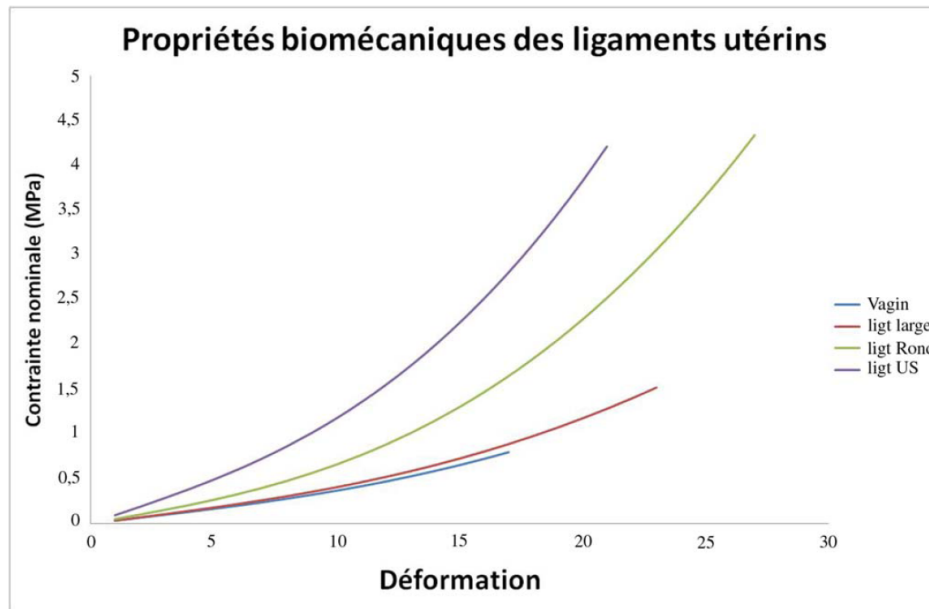


FIGURE 2.22 – Comparaison des courbes contrainte-déformation des ligaments utérosacrés, ronds et larges étudiés à celle d'un tissu vaginal sain [RRD<sup>+</sup>11]

### 2.5.3 Conclusion sur le choix d'un modèle hyperélastique isotrope pour tissus mous

Parmi les différentes fonctions de densité d'énergie disponibles dans la littérature ([Moo40, Riv48, AB93, HS96, Gen96, LDR98, FVFP06]), nous avons choisi le modèle constitutif de Yeoh pour la simulation de tissus mous isotropes. En effet ce modèle conduit à une fonction mathématique qui s'ajuste bien par rapport aux données car elle prend en compte la forme globale des courbes expérimentales contraintes / déformations. Une forme qui est caractérisée, comme nous l'avons vu sur les figures 2.20 et 2.22, par une très faible raideur initiale qui augmente progressivement pour tendre vers une valeur relativement constante. Pour illustrer le choix du modèle de Yeoh de manière pédagogique, nous reproduisons la figure 2.23 la comparaison de plusieurs courbes de contrainte-déformation en extension uniaxiale (Yeoh, Néo-Hookéan, Mooney-Rivlin, Gent) de matériaux hyperélastiques, construites à partir de seulement 3 points pour procéder à identification des coefficients. On remarque clairement que les 2 modèles Néo-Hookéan et Mooney-Rivlin ont des difficultés à s'adapter contrairement aux deux autres modèles de Gent et de Yeoh. Nous pensons que le modèle de Gent

qui présente une courbe plus raide correspond mieux à la modélisation des ligaments pelviens alors que le modèle de Yeoh correspond mieux à la modélisation des tissus mous des 3 organes vessie, vagin + utérus et rectum.

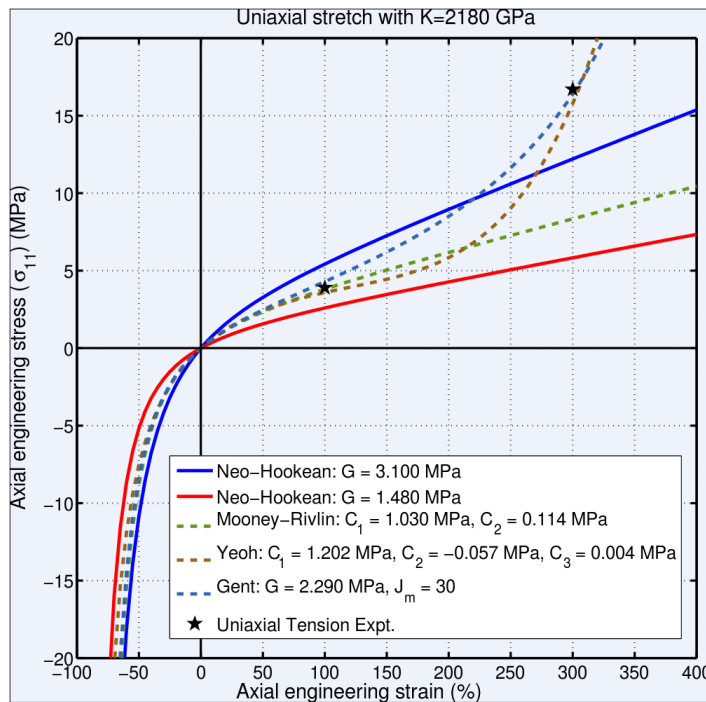


FIGURE 2.23 – Courbes contrainte-déformation en extension uniaxiale pour différents modèles hyperélastiques (Source Wikipedia)

Nous avons décidé d'identifier les coefficients des modèles de Yeoh pour les 3 organes à partir des résultats des essais de Venugopala Rao *et al.* [VRRB<sup>+</sup>10] en raison de la rigueur mis en œuvre dans leurs protocoles expérimentaux, dont les résultats sont en conformité avec ceux issus des travaux de thèse de Boubaker.

La comparaison entre les données expérimentales et les modèles identifiés de chaque organe est représentée dans les figures 2.24-2.26. Les coefficients sont reportés dans le tableau 2.2.

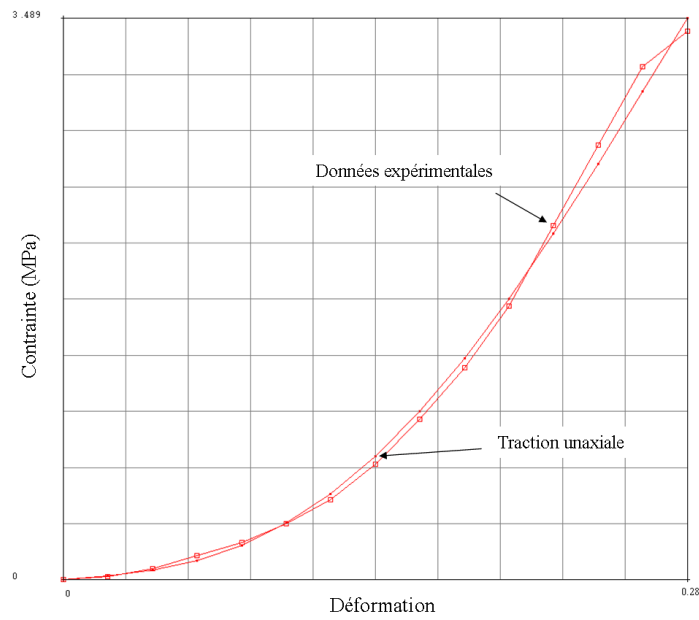


FIGURE 2.24 – Réponses de l’utérus

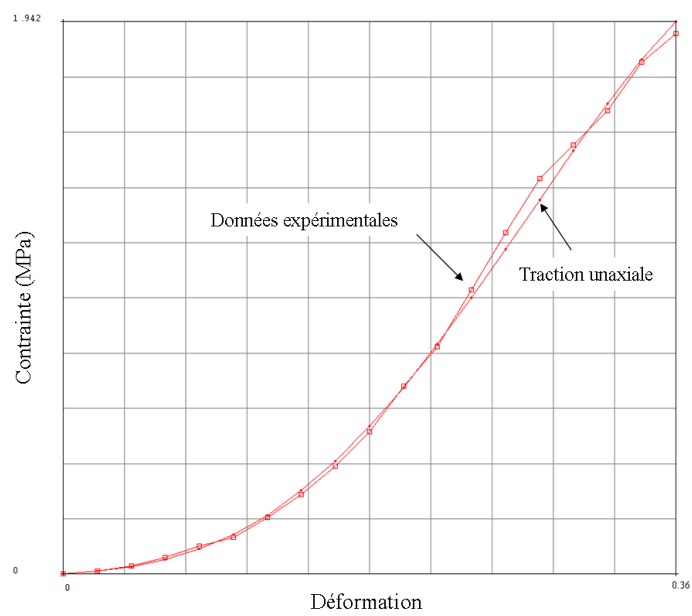


FIGURE 2.25 – Réponses du rectum

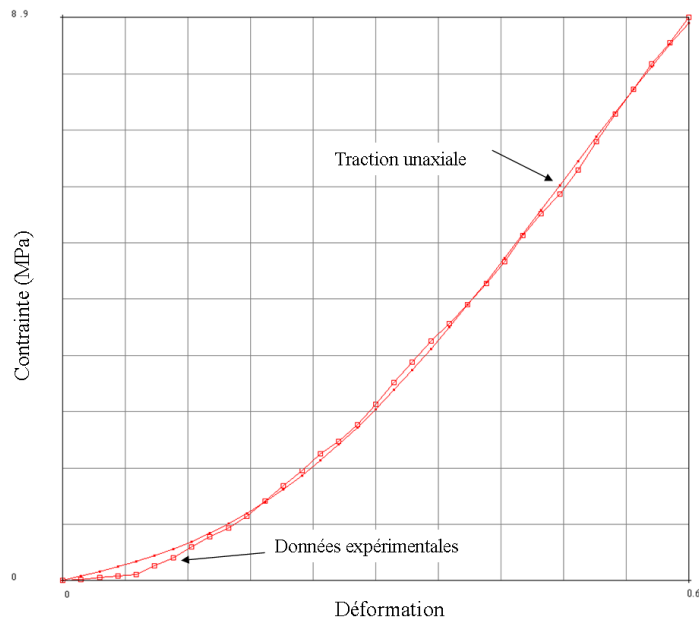


FIGURE 2.26 – Réponses de la vessie

TABLE 2.2 – Les coefficients du modèle Yeoh

Coefficients matériaux	Vagin(utérus)	Rectum	Vessie
$C_{10}$ (MPa)	0.175	0.088	0.071
$C_{20}$ (MPa)	8.648	3.092	0.202
$C_{30}$ (MPa)	8.632	2.871	0.048

Numériquement, lorsqu'on travaille avec des matériaux qui manifestent une légère compressibilité, dits quasi-incompressibles, il faut rajouter le terme  $\sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i}$  que nous avons décidé de remplacer par sa forme la plus simple  $\frac{1}{d} (J - 1)^2$ . Nous n'avons pas trouvé de références sur l'identification du coefficient  $d$  dans la littérature, nous pensons utiliser ce paramètre pour faire varier le comportement global des organes en définissant des zones de matériaux de compressibilité différente. Ainsi dans le cas de la vessie on peut la considérer comme étant pleine d'un matériau plus au moins compressible suivant qu'elle soit pleine ou vide. Si on la déforme sous une même sollicitation, alors on obtient des pressions internes très différentes suivant la valeur du coefficient  $d$ . A titre indicatif, nous présentons quelques résultats de simulations dans le tableau 2.3.

TABLE 2.3 – Les valeurs de  $d$  VS les pressions intérieures

	Vessie( $d$ )	Liquide( $d$ )	Pression intérieure(MPa)
1	0.01	0.05	55.859
2	0.05	0.10	22.387
3	0.05	0.50	8.756
4	0.10	0.50	8.317
5	0.05	5.00	4.775
6	0.50	5.00	2.266

## 2.6 Conclusions

Les relations constitutives sont fondamentales pour la résolution des problèmes en mécanique des milieux continus, et sont requis dans l'étude, par exemple, des interventions cliniques entraînant une action mécanique sur des tissus mous biologiques. La modélisation constitutive réaliste des tissus mous biologiques est une condition préalable pour quantifier les changements dans leur structure et leur fonction en réponse à un stimulus mécanique altéré.

Au cours de ce deuxième chapitre, nous avons abordé le comportement mécanique des tissus mous biologiques. Dans un premier temps, nous avons présenté les concepts théoriques de la modélisation par la mécanique des milieux continus non linéaire. Ensuite nous avons présenté des modèles hyperélastiques isotropes et anisotropes avec pour objectif de caractériser le comportement de ces tissus. Afin de valider des modèles isotropes que nous avons développés dans notre propre code de calcul FER, nous avons simulé par la méthode des éléments finis l'impact d'un projectile hyperélastique sur une partie du corps humain considérée également comme étant hyperélastique mais de nature différente. Nous avons ensuite présenté un modèle anisotrope (Gent + Holzapfel-Gasser-Ogden) en considérant une matrice non collagénique (Gent) dans laquelle il pourrait exister des fibres de collagènes (Holzapfel-Gasser-Ogden). Nous avons présenté un test simulant la traction d'un tendon et caractérisant bien l'anisotropie du matériau. Enfin, après avoir défini le principe d'identification de courbe de comportement à partir d'essais mécaniques, nous avons présenté des résultats expérimentaux trouvés dans la littérature. Il apparaît que le modèle de Yeoh est le plus adapté pour la modélisation des tissus mous issus des organes pelviens, vessie, vagin + utérus, rectum

et que le modèle de Gent est le plus adapté pour la modélisation des tissus mous issus des ligaments du fascia pelvien.

## Chapitre 3

# Définition géométrique du système pelvien

### 3.1 Introduction

Différentes étapes sont nécessaires pour obtenir une simulation réaliste de la déformation des organes pelviens. La « Segmentation » des organes à partir d'images IRM de patients constitue l'étape préliminaire pour mettre en œuvre une simulation dite "patient spécifique". Ensuite intervient la reconstruction 3D, c'est à dire la caractérisation géométrique des surfaces et des volumes à partir de fonctions mathématiques continues explicites ou implicites. Enfin la dernière étape consiste à mailler les organes de manière à obtenir des modèles discrets avec intégration de lois constitutives (lois de comportement) en accord avec une résolution numérique par la méthode des éléments finis. La méconnaissance des conditions limites et des paramètres matériaux est la principale difficulté de cette modélisation. C'est pourquoi il est important de caractériser les déformations obtenues afin de prévoir une méthode de réglage à partir, par exemple, d'images obtenues par IRM dynamique. Pour déterminer un comportement réaliste des organes, un modèle géométrique précis, associée à une modélisation physique réaliste, est donc nécessaire. L'analyse anatomique dans le chapitre 1 a permis d'extraire les contraintes nécessaires pour paramétrer le système, à savoir concevoir les organes en tant que formes creuses, épaisses, et lisses. Ce chapitre se concentre sur le processus de construction de la modélisation géométrique des organes de la région pelvienne.

## 3.2 Génération d'un modèle à partir des données d'IRM

Cette étude a été réalisée au sein de laboratoire LSIS et CHU La Timone [PBR<sup>+</sup>09] à partir d'images IRM (1.5 T Philips Gyroscan-Philips, Amsterdam, The Netherlands) de 15 patientes sans antécédent de pathologie pelvi-périnéale. L'acquisition d'images sagittales statiques T2 jointives épaisses de 1 mm des organes pelviens (TR = 5.5 ms, TE = 2.7 ms, matrice  $256 \times 256$ ) était faite en position couchée en utilisant une antenne de surface (Fig. 3.1). Le voxel était de  $1 \text{ mm}^3$ . Le rectum était balisé avec 30 ml de gel échographique. Cette acquisition pelvienne constitue la base du modèle.

Une acquisition sagittale dynamique de coupes épaisses de 10 mm était également réalisée au repos et au cours d'efforts de poussée en utilisant une séquence turbo spinecho T2 dynamique (TR = 3.6 ms, TE = 1.8 ms, FOV = 24 cm, matrice  $256 \times 256$ ).

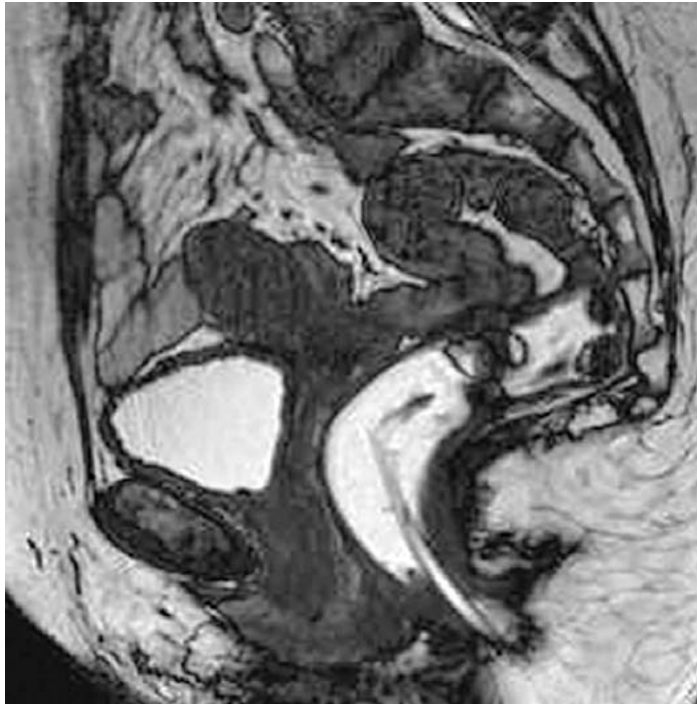


FIGURE 3.1 – Image IRM servant de base au développement du modèle géométrique

Le modèle volumique tridimensionnel a été obtenu à partir d'images statiques IRM en utilisant un logiciel libre de segmentation (logiciel OpenSource ITK-SNAP, [www.itksnap.org](http://www.itksnap.org)) basé sur l'évolution d'un contour actif. Le logiciel permet de visualiser simultanément les organes dans les trois plans de l'espace et de définir les limites des zones à segmenter. Un germe volumique est alors placé dans la zone délimitée (Fig. 3.2A). Ce germe croît auto-

matiquement, par itérations, jusqu'aux limites définies (Fig. 3.2B). La croissance du germe volumique entre chaque itération dépend de sa force d'expansion et de sa force de courbure. Ces paramètres sont modifiés en fonction du seuillage et de l'hétérogénéité des organes. L'arrêt de la segmentation est automatique et est basé sur la variation du volume du germe volumique. Le volume ( $V$ ) du contour actif est calculé à chaque itération. L'arrêt survient quand le ratio  $V(i + 10)/V_i$  est inférieur à 1.01. À la fin du processus de segmentation, les irrégularités géométriques sont automatiquement corrigées par lissage, le modèle géométrique tridimensionnel est ensuite généré comme indiqué dans figure 3.3. Le logiciel original a par ailleurs été modifié et complété par de nouveaux outils. Pirro *et al.* [PBR<sup>+</sup>09] ont développé la possibilité de placer manuellement plusieurs germes volumiques à l'intérieur de la zone à segmenter pour améliorer la qualité de la segmentation tout en diminuant la durée d'exécution. Les outils pour la segmentation de régions hétérogènes à l'intérieur d'un organe ont également été développés. Ils sont particulièrement utiles pour la segmentation de l'utérus et du rectum dont l'hétérogénéité est due à la présence de matières intraluminales.

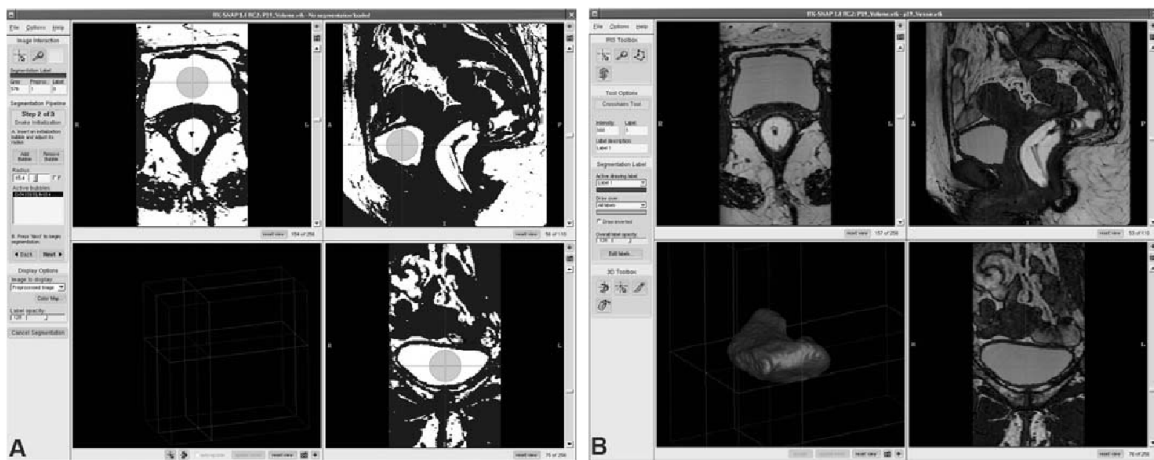


FIGURE 3.2 – A. Interface du logiciel de segmentation permettant la visualisation dans les trois plans de l'espace de l'organe à segmenter. Un germe volumique a été placé à l'intérieur de la vessie. B. Aspect en fin de segmentation de la vessie ([PBR<sup>+</sup>09])

Le modèle volumique a été transformé en un modèle discret en utilisant un maillage volumique basé sur une méthode de tétraédrisation. Afin d'apprécier la qualité du maillage, nous l'avons visualisé sous Ferview, un logiciel de post-traitement des données, développé par LMEE. La figure 3.4 montre un exemple où l'on observe des zones d'éléments finis très hétérogènes qui ne permettent pas d'envisager un calcul de comportement mécanique

cohérent par la méthode des éléments finis.

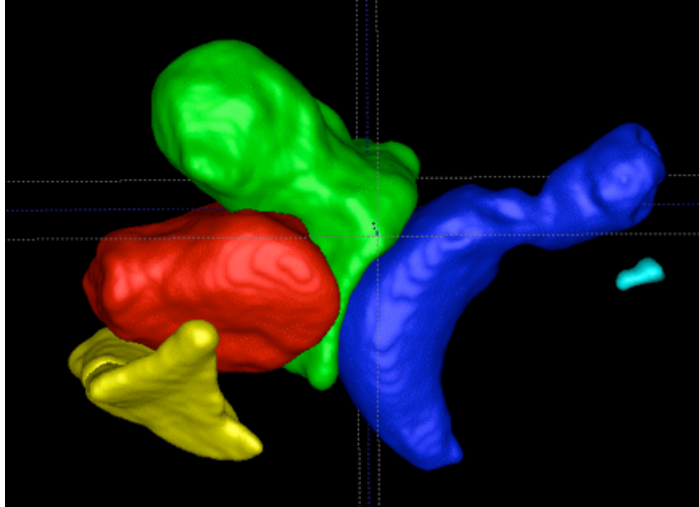


FIGURE 3.3 – Vue latérale du modèle géométrique complet

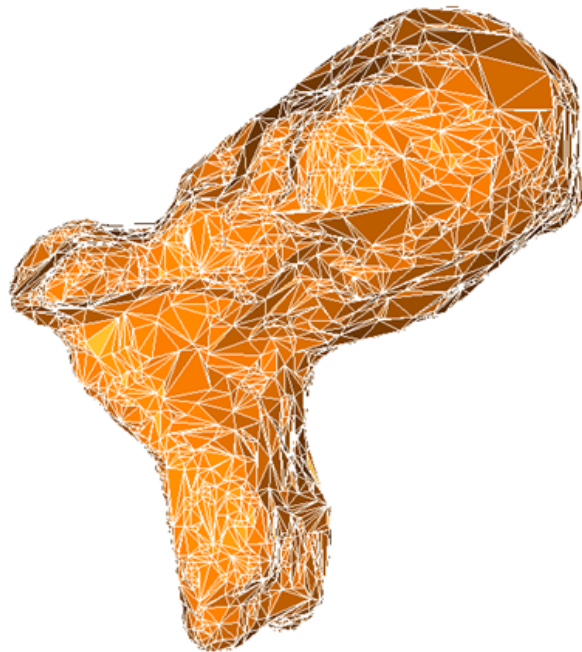


FIGURE 3.4 – Utérus : présence de mailles très irrégulières

### 3.3 Un maillage quadrangulaire de 2-dimension

Les résultats peu satisfaisants obtenus par la méthode de modélisation décrite dans la partie précédente nous ont amené à d'abord réaliser une modélisation en 2 dimensions dans le plan sagittal. Il s'agit dans ce cas de définir des contours des différents organes et ensuite de mailler les surfaces obtenues. Pour ce faire, nous avons dans un premier temps récupéré le nuage de points obtenu à partir des données IRM sous le logiciel Ansys, puis nous avons sélectionné les points appartenant à un même plan que l'on estime (en l'absence de données cliniques) être proche du plan sagittal. À partir de ces points sélectionnés, nous avons ensuite créé dans le plan les contours des organes en utilisant des fonctions splines, ce qui permet de définir les surfaces fermées à mailler. Les organes ont enfin été maillés comme étant tous pleins mais avec des zones de matériaux différents correspondant à des couleurs différentes comme indiqué sur la figure 3.5. L'intérêt d'une telle approche est de pouvoir jouer sur la compressibilité des matériaux en considérant par exemple que l'intérieur du rectum, de l'utérus et du vagin sont compressibles (air) alors que l'intérieur de la vessie (liquide) est incompressible. L'avantage du 2D est de pouvoir disposer d'un modèle moins gourmand en puissance de calcul et ainsi de multiplier les essais numériques avant un passage en 3D. Remarquons d'ailleurs que les images en IRM dynamique sont également des représentations 2D dans le plan sagittal. Le modèle 2D pourra ainsi plus facilement être comparé au comportement réel des organes, et recalé à partir d'images obtenues par IRM dynamique.

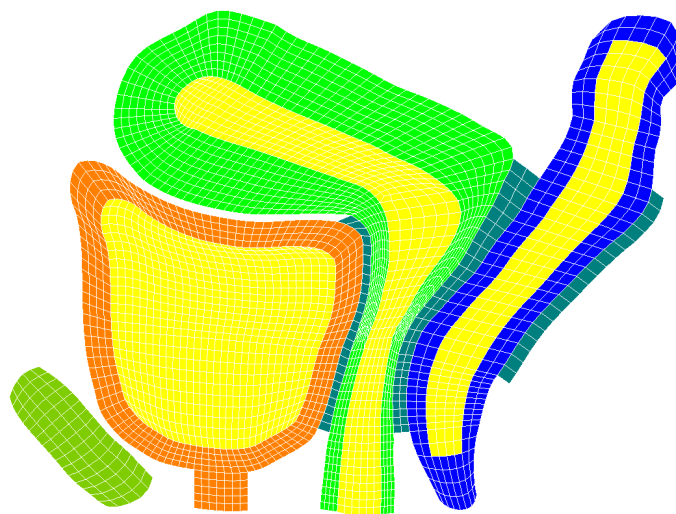


FIGURE 3.5 – Modèle en 2D des organes pelviens

### 3.4 Un maillage de tétraèdre de 3-dimension

La reconstruction de formes à partir d'un nuage de points correspond à la création d'un modèle permettant de se représenter les contours d'un objet afin de pouvoir le manipuler et/ou le visualiser. Pour la construction d'organes de la région pelvienne à partir d'ensembles de points épars, les données de trois patientes sont exploitables.

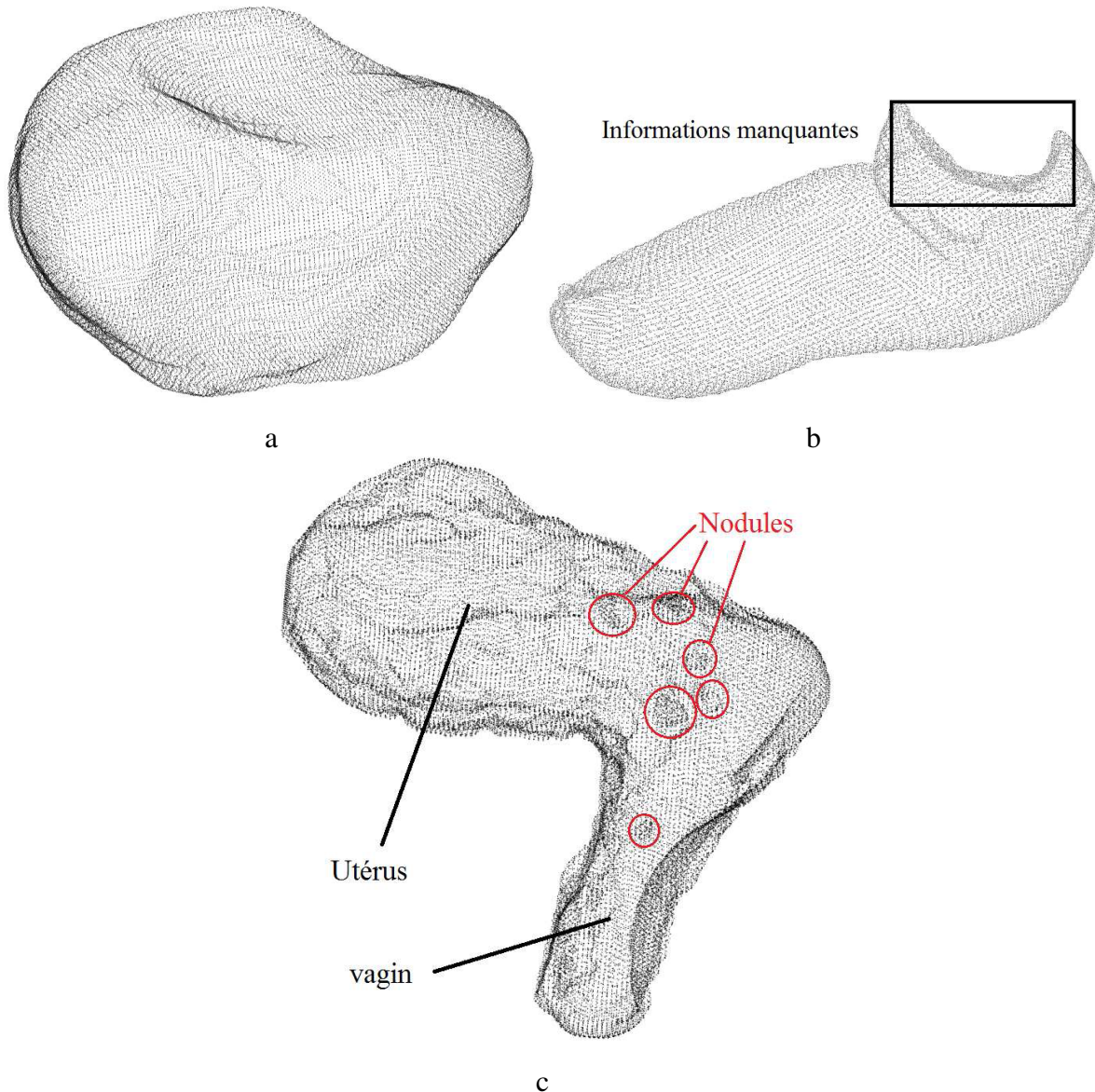


FIGURE 3.6 – Nuages de points utilisés

Cependant, seul un jeu de données (correspondant donc à une patiente unique) présente

une densité de points permettant d'envisager une modélisation suffisamment fine (vessie : 44 000 points, rectum : 22 000 points, utérus : 47 000 points), les autres fichiers ont un nombre de points allant de 100 à 2000. Les analyses sont donc essentiellement effectuées sur les nuages plus denses.

Une inspection qualitative des nuages permet de conclure que la vessie de la figure 3.6(a) ne montre pas de problème lié à l'acquisition. Le rectum de la figure 3.6(b), quant à lui, ne décrit pas l'intégralité de l'organe. La présence de selles à l'intérieur pendant l'acquisition est sans doute responsable de l'information manquante. Finalement, l'utérus et le vagin à la figure 3.6(c) n'ont pas pu être séparés pendant l'acquisition dû au manque de précision de l'IRM. L'existence de nombreux nodules à l'intérieur, conséquence de l'étape de segmentation, est également à noter.

La modélisation géométrique des organes avec génération "quasi-automatique" de maillages hexaédriques tout en respectant la forme creuse de ces organes à partir d'un nuage de points fait partie du travail du groupe « Modélisation Géométrique » du LSIS que nous décrivons un peu plus tard. En attendant les résultats de ces travaux, nous avons décidé d'utiliser les logiciels du marché qui sont à notre disposition (Solidworks et Ansys) pour créer, à partir des mêmes nuages de points, des maillages tétraédriques en forme pleine de la vessie, de l'utérus + vagin et du rectum. Ce travail nécessite de la part de l'opérateur de respecter un processus en plusieurs étapes comportant un certain nombre d'opérations manuelles.

### **3.4.1 Procédure de reconstruction sous SolidWorks**

#### **3.4.1.1 Création du maillage**

A partir du nuage de points inséré dans SolidWorks, l'assistant «Préparation du Maillage» permet de guider l'opérateur durant la création du maillage puis lors de la reconstruction volumique. Les étapes sont les suivantes :

1. Régler l'orientation du nuage de points, c'est à dire placer le repère afin de pouvoir orienter le modèle que l'on va reconstruire. Cette option n'étant pas indispensable pour la suite nous ne l'avons pas exploitée d'avantage.
2. L'étape suivante permet de supprimer le bruit (Ensemble de points parasites). Cette option, facultative, est utile pour les nuages de points désordonnés ou lorsque le nombre de points est vraiment important.
3. Nous pouvons ensuite gérer la suppression des données parasites qui se trouvent à l'extérieur du nuage de points. Pour ce faire, nous utilisons les outils de sélection.

4. Après la création du maillage, ce dernier peut-être lissé pour un meilleur rendu (Fig. 3.7).
5. L'assistant détecte enfin les trous dans le maillage et propose de les combler.

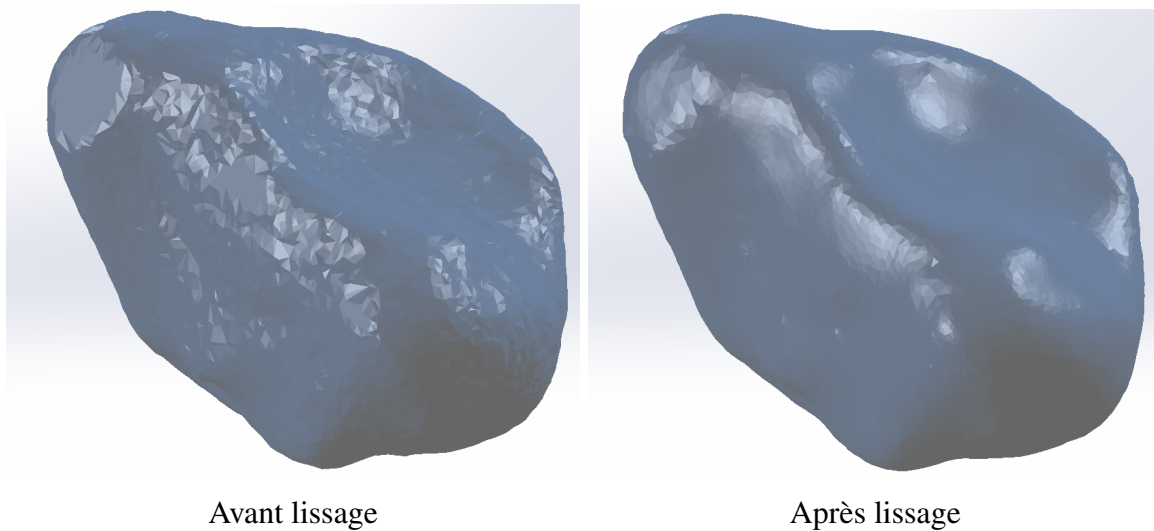
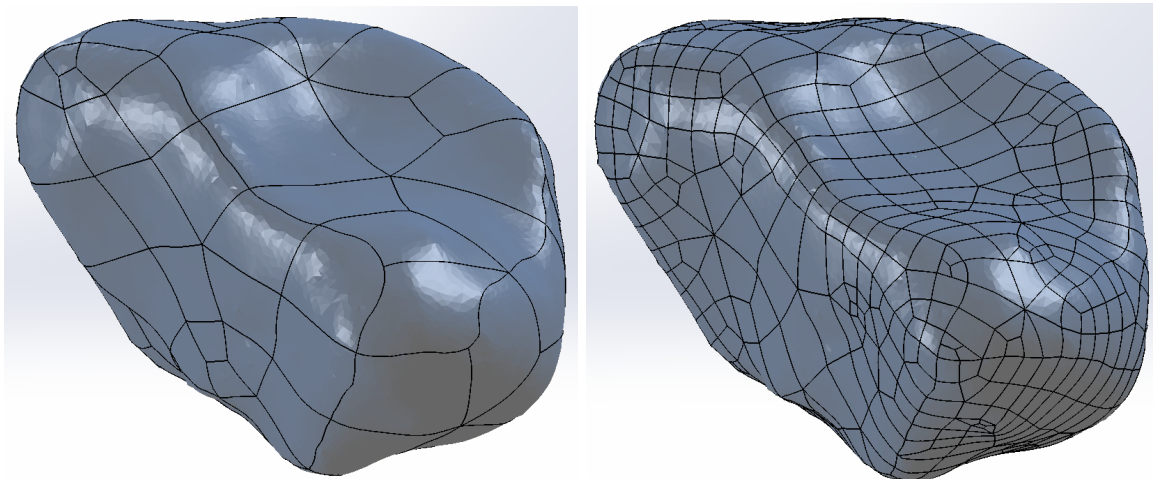


FIGURE 3.7 – Confrontation de deux maillages sans/avec un lissage

### 3.4.1.2 Reconstruction surfacique automatique

Une fois le maillage recréé, le logiciel ouvre directement l'«Assistant Surfacique» pour la suite des opérations. On choisit en premier lieu l'option «Automatique». Elle permet de créer automatiquement les surfaces pour la reconstruction du modèle. Après avoir choisit l'option automatique pour la création des surfaces, nous pouvons agir sur un curseur de détail de ces surfaces. En effet, il permet de créer plus ou moins de surfaces (Fig. 3.8). Dans ce genre de reconstruction, il vaut mieux recréer le moins possible de surfaces. En effet, la pièce étant de forme quelconque l'analyse numérique est plus simple avec un nombre de surfaces raisonnable.



Détail au minimum avec nombre de surfaces : 87

Détail au maximum avec nombre de surfaces : 703

FIGURE 3.8 – Confrontation de deux différents de surfaces

Lorsqu'il le peut, SolidWorks crée directement le modèle volumique à l'issue de l'assistance. Cette procédure nous a permis d'aboutir à la reconstruction d'un modèle volumique plein. Cependant, dans le cas des organes, ils doivent normalement posséder une épaisseur dans la réalité. La création du modèle avec une épaisseur est faisable sous SolidWorks, mais ce sujet n'est pas abordé ici pour des raisons de concision.

### 3.4.2 Un maillage tétraédrique sous Ansys

Avec le modèle 3D, nous avons d'abord envisagé de mailler les organes en les considérant pleins, tout comme pour le modèle 2D. Cependant, les notions de zones et de matériaux sous SolidWorks, permettent une modélisation de l'intérieur et de l'épaisseur des organes. Une fois le modèle volumique généré par SolidWorks et inséré dans Ansys, chaque organe est partagé en deux parties (intérieur et paroi), afin de leur affecter deux matériaux distincts (tissu mou et air) comme on peut le voir sur la vue en coupe de la figure 3.9. Le maillage tétraédrique global de l'ensemble des organes est représenté sur la figure 3.10.

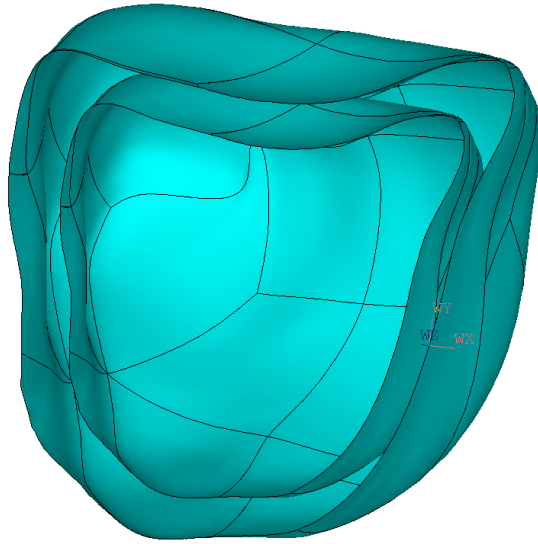


FIGURE 3.9 – Un exemple de vessie

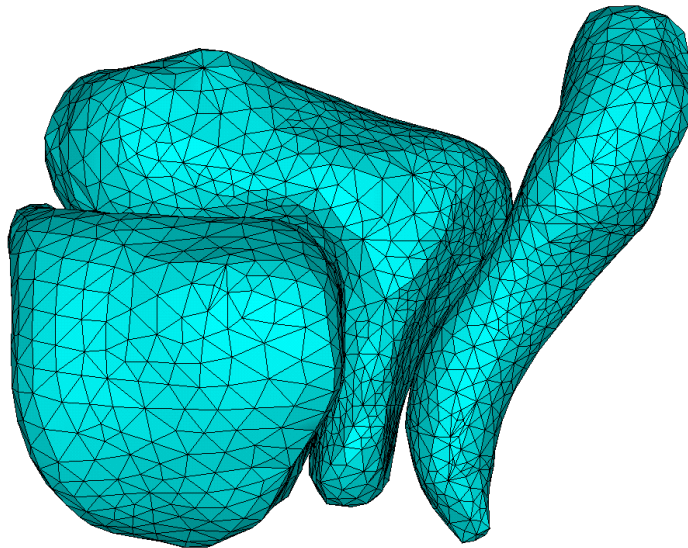


FIGURE 3.10 – Un maillage de tétraèdre

### 3.5 La modélisation géométrique des organes avec un maillage hexaédrique

Une autre approche consiste en la modélisation géométrique des organes avec un maillage composé d'hexaèdres. Comme il a été dit précédemment, cette partie du travail a été réalisée par le groupe « Modélisation Géométrique » du LSIS. Nous présentons ici brièvement la conception et la procédure qui a été mise en œuvre. Tous les détails peuvent être retrouvés dans la thèse de Thierry Bay [Bay12].

Pour commencer, une surface fermée de l'organe considéré est construite à partir d'une formulation paramétrique de type B-spline périodique. L'accent est mis sur l'étape d'initialisation, primordiale dans un algorithme utilisant une résolution itérative. Une fois la surface ajustée, l'épaisseur est ajoutée par une approche offset afin de pouvoir créer un volume proche de la réalité physique de l'organe. Un volume fermé creux, à surface épaisse, est ainsi créé et discrétisé afin de fournir un maillage d'hexaèdres en sortie. La figure 3.11 montre la procédure globale présentée dans cette approche :

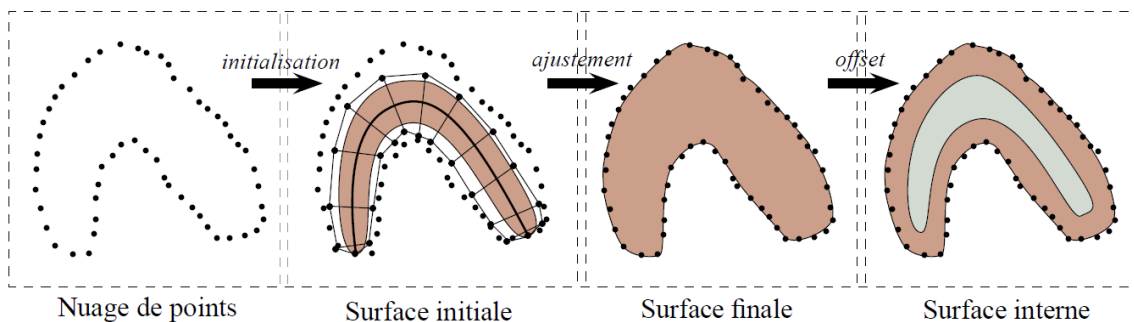


FIGURE 3.11 – Étapes de la modélisation géométrique

1. Étape d'initialisation : l'objectif est de disposer d'une surface initiale paramétrique définie à partir de caractéristiques globales sur l'ensemble des données.
2. Étape d'ajustement de la surface : l'objectif est d'ajuster les paramètres de la surface pour réussir à construire le contour extérieur des organes en étant au plus près des données.
3. Étape d'offset : l'objectif est d'ajouter une épaisseur aux contours des organes pour se rapprocher de la réalité physiologique de l'organe.

### 3.5.1 Étape d'initialisation

Le principe de cette étape repose sur la construction d'une courbe décrivant le profil général des données afin de servir de support au positionnement du réseau de contrôle de la surface paramétrique initiale de genre 0\*.

La forme générale des organes est identique d'un patient à l'autre. Les organes pelviens ont tous une forme allongée, permettant de déterminer deux extrémités et une direction principale de parcours de la forme. Mais pour une modélisation, cette information n'est pas suffisante pour utiliser un organe initial de « référence ». Bien que les patients adoptent tous la même position lors de l'acquisition des données, leur configuration physiologique différente implique des formes très variées (torsions différentes des organes, pathologie, qualité de l'acquisition, . . . ). Une initialisation patient-spécifique est donc indispensable.

De ce fait, l'objectif sera de calculer comme premier descripteur un axe non-linéaire à l'intérieur du nuage de points, guidant le positionnement du second descripteur, à savoir le polyèdre de contrôle de la surface paramétrique initiale.

L'axe principal s'apparente à l'axe médian de la forme décrite par la distribution du nuage, dans le sens où il représente l'inertie globale des données. La figure 3.12 représente les étapes majeures du calcul du premier descripteur à savoir : positionnement initial de l'axe ; définition de la fonctionnelle d'énergie quantifiant l'écart entre les deux variétés et réduction de la fonctionnelle d'erreurs.

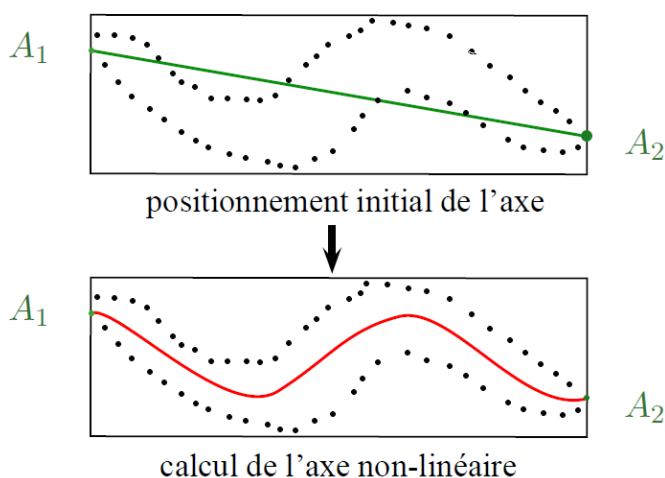


FIGURE 3.12 – Calcul du premier descripteur : l'axe curviligne

\*. Le genre d'une surface connexe, est le nombre maximum de courbes fermées simples sans points communs pouvant être tracées à l'intérieur de cette surface sans la déconnecter.

La figure 3.13 montre la procédure du positionnement du second descripteur à savoir : création du polyèdre de contrôle initial le long de l'axe  $(Oy)$  ; placement et orientation des plans du réseau orthogonalement à l'axe non-linéaire ; orientation des plans aux extrémités pour s'ajuster plus précisément aux données ; correction des torsions et des problèmes de parcours sur le polyèdre de contrôle ; utilisation de l'inertie radiale selon l'axe curviligne pour repositionner indépendamment les pôles de chaque plan.

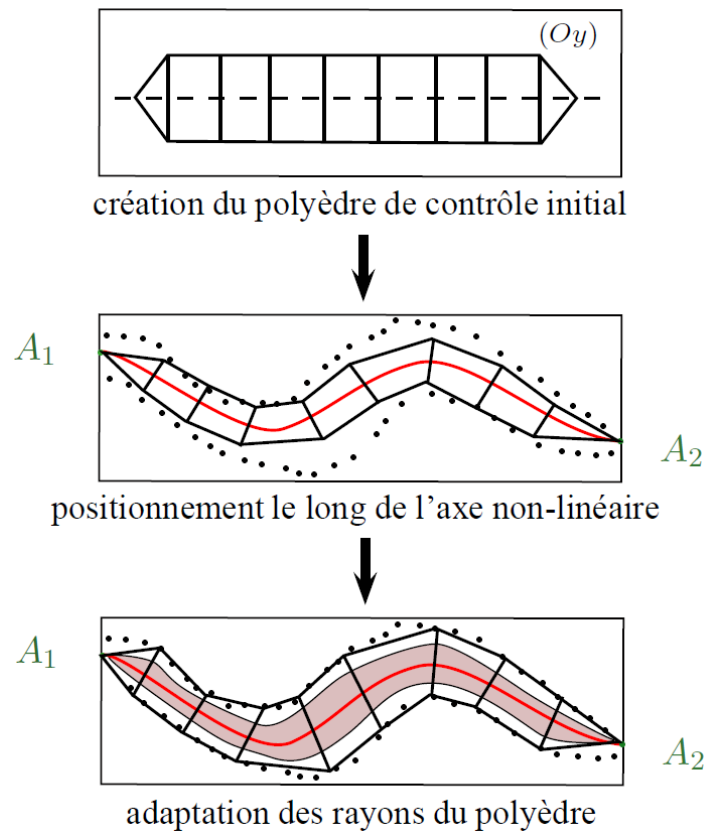


FIGURE 3.13 – Positionnement du second descripteur : le polyèdre de contrôle

Les données de l'utérus ont été utilisées (47 000 points). Tout d'abord, la figure 3.14 montre la courbe de Bézier issue de l'algorithme itératif. Cette trajectoire est suivie par la représentation de la surface initiale qui servira de point de départ pour construction de la surface ajustée.

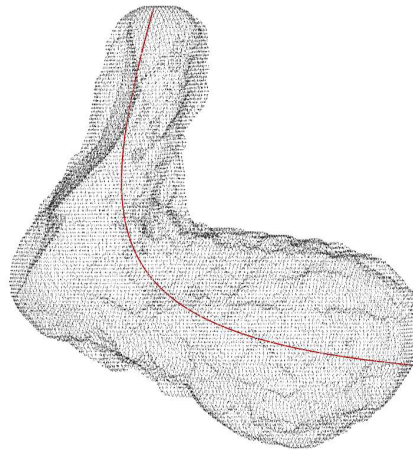
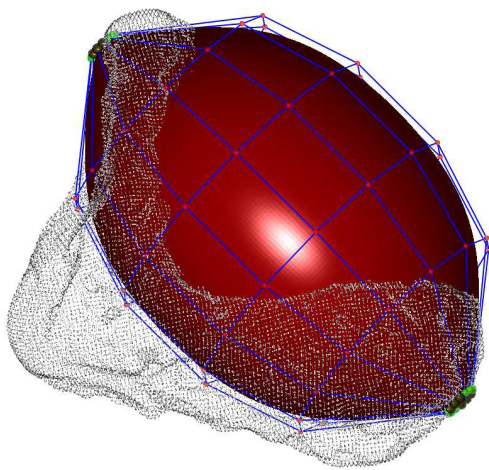
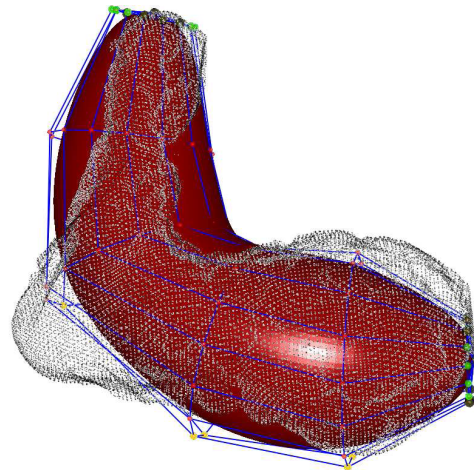


FIGURE 3.14 – Courbe de Bézier (en rouge) servant de guide au placement de la surface initiale

L'ACP<sup>†</sup> classique [JOL02] permet de calculer les principaux axes d'inertie du nuage de points. Cependant une approche itérative est nécessaire afin de construire une courbe caractérisant au mieux la forme générale des données, assurant ainsi une meilleure initialisation de la reconstruction. Pour l'utérus, les figures 3.15(a) et 3.15(b) illustrent la différence entre l'initialisation itérative et l'ACP.



(a) Initialisation ACP



(b) Initialisation itérative

FIGURE 3.15 – Deux types d'initialisation pour la construction d'un utérus

L'initialisation itérative permet de prendre en compte une plus grande proportion de l'inert-

†. Analyse en composantes principales

tie du nuage de points que l'ACP. La position de la surface initiale constitue une étape essentielle et conditionne fortement la convergence de l'algorithme de reconstruction de la surface finale. L'application d'une telle procédure d'initialisation améliore la qualité de la construction de la surface qui se trouve ainsi plus proche du nuage de points.

### 3.5.2 Ajustement de la surface

La procédure d'ajustement est décomposée en deux parties : un ajustement paramétrique pour réduire l'écart aux données, et une régularisation du potentiel d'énergie de la surface pour gérer sa tension. Sans donner des détails sur l'algorithme itératif que l'on pourra trouver dans [Bay12], les organes pelviens après la construction de la surface sont montrés dans les figures 3.16(a), 3.16(b) et 3.16(c).

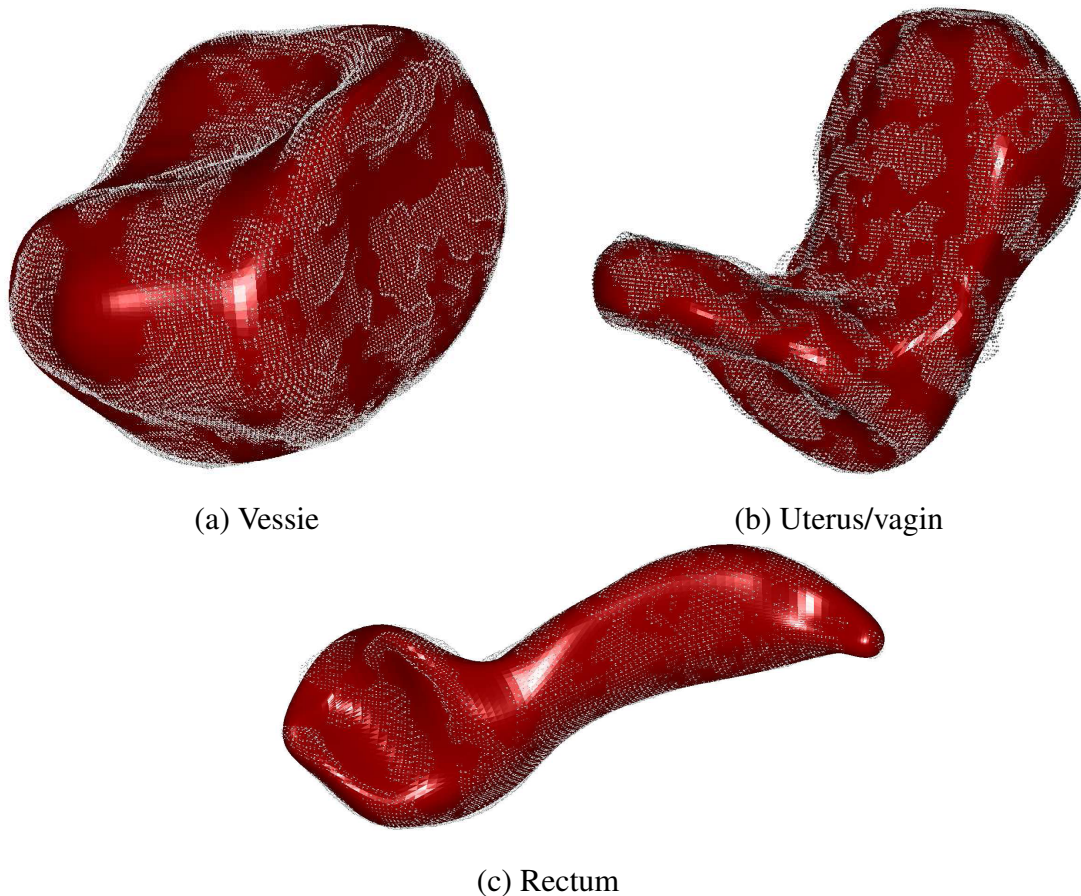


FIGURE 3.16 – Reconstruction des organes pelviens

Une fois ces constructions terminées, l'étape suivante consiste à ajouter une épaisseur aux

contours des organes pour se rapprocher de la réalité physiologique à l'issue de l'ajustement de la surface.

### 3.5.3 Ajout d'une épaisseur aux contours des organes

Pour se rapprocher de la réalité physiologique, un maillage volumique de la membrane épaisse des organes, et non des organes eux-mêmes, est créé. Le problème consiste donc en deux étapes : construire la *surface-offset* et créer le maillage hexaédrique. Des nombreuses méthodes pour créer des surfaces *offsets* peuvent être trouvées dans la littérature ([Mae99, KN02]), les approches volumétriques sont souvent utilisées, malgré le défaut d'être limitées par la résolution de la grille ([VM04, CWRR05, PK08]). Une approche est choisie à l'égard de nos contraintes spécifiques, à savoir : 1. créer un maillage d'hexaèdres à partir de la génératrice et de l'*offset-interne* ; 2. pouvoir définir plusieurs couches dans l'épaisseur ; 3. gérer les auto-intersections. Au regard des contraintes du problème fixées au départ, un maillage d'hexaèdres conforme, non-mixte et sans chevauchement peut être effectivement créé pour les simulations par éléments finis. Un maillage qui contient environ 9000 éléments en total pour ces trois organes avec des épaisseurs est montré dans la figure 3.17.

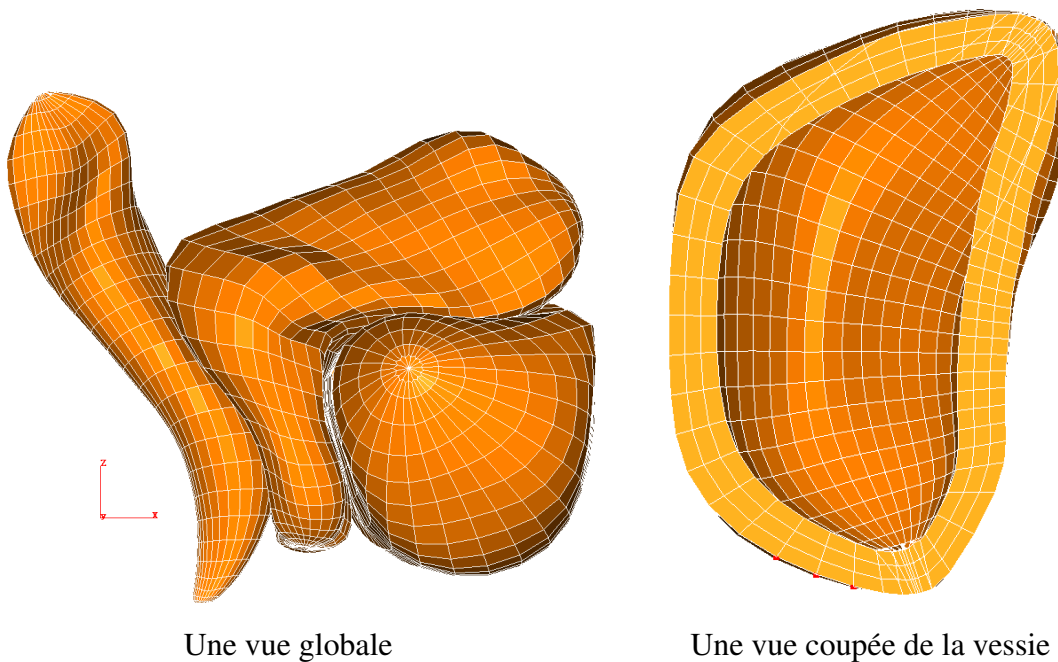


FIGURE 3.17 – Un maillage 3D des organes pelviens

### 3.6 Conclusions

La reconstruction tridimensionnelle des organes pelviens a été réalisée à partir d'images IRM. Les organes pelviens ont été segmentés par une méthode semi-automatique, puis leur maillage a été réalisé de manière automatique par une tétraédrisation des volumes. À cause de la présence d'éléments très hétérogènes, ce maillage ne permet pas d'envisager un calcul de comportement mécanique cohérent par la méthode des éléments finis.

Par conséquent, nous avons dû créer un maillage 2D composé d'éléments quadrangulaires et un maillage 3D composé de tétraèdres en mettant au point une procédure s'appuyant sur des fonctionnalités issues de logiciels CAO et ceci en partant d'un nuage de points. En parallèle, une procédure de la modélisation géométrique des organes avec un maillage 3D composé d'hexaèdres a été présentée brièvement, résultant d'un travail réalisé par le LSIS dans le cadre du projet MoDyPe pour lequel nous sommes un des partenaires. Ce maillage est conforme aux contraintes exigées pour un calcul par la méthode des éléments finis, prend en compte les épaisseurs des organes et nécessite peu d'opérations pour sa réalisation.



## Chapitre 4

# Simulations du prolapsus des organes pelviens

### 4.1 Quelques approches de simulation numérique

On ne trouve pas dans la littérature, à notre connaissance, beaucoup de travaux de simulation numérique du mouvement et des déformations des organes pelviens. Voici quelques articles qui ont attiré notre attention et qui concernent notre sujet.

Dans l'article de Yan *et al.* [YJW99], un travail de modélisation du rectum est présenté. Le volume du rectum est généré à partir d'images en coupes (C.T. scan) tenant compte des contours externes et internes de l'organe (et donc de l'épaisseur). Le volume est ensuite maillé pour procéder à une résolution par éléments finis. La loi de comportement des tissus utilisée est une loi de comportement élastique linéaire compressible (Module de Young  $E = 0.5$  KPa et coefficient de Poisson  $= 0.3$ ). L'intérêt de ce travail se situe essentiellement au niveau de la reconstruction 3D qui prend en compte réellement l'épaisseur de l'organe. En revanche, la loi de comportement utilisée semble beaucoup trop simpliste.

Dans la thèse de Boubaker [Bou09], le travail concerne la région pelvienne chez l'homme avec pour objectif de modéliser la mobilité de la prostate occasionnée par la réplétion des organes (rectum, vessie) et des entités anatomiques qui constituent son environnement. Des nuages de points de la géométrie des organes pelviens ont été obtenus à partir d'images acquises également par CT scan. Il utilise un logiciel standard du marché (CATIA) pour réaliser la reconstruction 3D. La géométrie ainsi constituée peut être facilement utilisée par le même logiciel qui dispose d'un mailleur et d'un solveur éléments finis intégrés. Dans ce travail le choix a été porté sur l'utilisation d'éléments coques, il est donc nécessaire de disposer une

cartographie des épaisseurs qui constituent un paramètre déterminant dans l'élément coque. Les lois de comportement sont hyperélastiques de types Yeoh et Ogden. A noter également dans cette thèse, un travail sur l'identification des lois de comportement à partir de mesures d'essais expérimentaux sur éprouvettes porcines en utilisant le logiciel MSC de Marc Mentat. Des pressions de distension ont été appliquées à l'intérieur du rectum et de la vessie d'une manière uniforme et évolutive. L'auteur a choisi les valeurs de pressions internes inhérentes aux distensions vésicale et rectale de 0.5 kPa pour la vessie et 1 kPa pour le rectum. Les épaisseurs des parois rectale et vésicale sont fixées à 3 mm. Les déplacements des organes dans des directions différentes sont comparés avec des mesures expérimentales. Globalement, la vessie semble moins influencer la position de la prostate que le rectum. L'intérêt de ces travaux réside dans le souci de corrélation avec l'expérimental, aussi bien au niveau du comportement local (lois de comportement) et du comportement global (positionnement de la prostate).

Dans l'article de Rao *et al.* [VRRB<sup>+</sup>10], la géométrie des organes pelviens a été obtenue par reconstruction de volumes à partir d'images IRM statiques. La génération des surfaces des organes a été effectuée après segmentation des contours à l'aide du logiciel ARTIMED. Un modèle éléments finis sous ABAQUS comportant 39500 éléments (dont 39000 éléments coques et 500 éléments poutres) et 28000 nœuds a été construit. La loi de comportement des tissus des organes principaux est hyperélastique isotrope du type Mooney-Rivlin, par contre le comportement des ligaments est supposé être linéaire, élastique en petites déformations. Afin de simuler les déformations, une pression de 2.5 MPa, simulant une pression de l'abdomen durant une phase d'expiration, est appliquée sur une surface projetée sur l'ouverture supérieure du pelvis. La résolution effectuée, toujours sous ABAQUS, est une résolution par une approche quasi-statique avec un chargement progressif. L'intérêt de ces travaux est encore une fois la reconstruction 3D, et la description anatomique des ligaments mis en jeu dans l'anatomie pelvienne. Par contre on ne voit guère dans les résultats de grandes transformations simulées pouvant laisser entrevoir un prolapsus pelvien.

Dans les travaux que nous venons de présenter, nous voyons se distinguer une stratégie de modélisation commune et relativement classique. A savoir acquisition d'images scanners, extraction des contours des organes, reconstruction 3D et discrétisation par la méthode des éléments finis de ces mêmes organes afin de simuler leur déplacement et déformation en quasi-statique. Nos travaux s'inscrivent dans cette même démarche à l'exception du fait que nous n'avons pas choisi des éléments coques pour la modélisation 3D et que nous proposons une approche intermédiaire 2D dans le plan sagittal. L'avantage de discrétiser en éléments coques est de réduire le nombre de degrés de liberté du modèle et donc la taille du système

d'équations à résoudre. Par contre en grandes déformations cela peut poser des problèmes d'instabilités numériques, c'est peut être pourquoi nous n'avons pas vu dans la littérature de simulations d'organes pelviens avec de grandes déformations comme un prolapsus stade 2 ou 3, malgré la présence de lois de comportement hyperélastique. Une autre exception est que nous développons notre propre code de calcul FER dans lequel ont été implantées les différentes lois de comportement matériaux hyperélastiques présentées au chapitre 2, ce qui nous permet d'avoir une maîtrise numérique sur l'ensemble du modèle. A travers ce chapitre nous présentons les résultats de nos simulations mais aussi les algorithmes qui sont mis en œuvre dans la résolution numérique au niveau des forces de contact et des équations d'équilibre en quasi-statique.

## 4.2 Simulation par éléments finis

### 4.2.1 Modélisation du contact

Au cours des deux dernières décennies, des avancées importantes ont été accomplies dans l'analyse des problèmes de contact par la méthode des éléments finis. Un grand nombre d'algorithmes de résolution a été présenté dans la littérature. Le lecteur trouvera des exposés de synthèse parmi les références bibliographiques [Kla93, Wri95], ainsi que des monographies par Kikuchi et Oden [KO88], Zhong [Zho93] et Wriggers [Wri02]. Les méthodes de pénalisation ou de régularisation [CB86, Par89] semblent, à première vue, les plus appropriées pour traiter les problèmes de contact. Mais dans ce type de méthode, les conditions de contact et les lois de frottement ne sont pas satisfaites exactement. De plus, il est délicat pour les utilisateurs de choisir le facteur de pénalité adéquat. Les expériences ont montré que ces méthodes présentent des inconvénients en ce qui concerne la stabilité et la précision numérique, en particulier pour tout ce qui touche à la simulation des phénomènes de frottement. Pour pallier ces insuffisances, une méthode du Lagrangien augmenté a été développée par Alart et Curnier [AC91]. Cette méthode consiste à déterminer les inconnues (déplacements et réactions) simultanément en utilisant un algorithme de Newton généralisé. Simo et Laursen [SL92] ont également proposé une méthode similaire. De Saxcé et Feng ont proposé une méthode du bipotentiel fondée sur la théorie MSI (*Matériau Standard Implicite*) [dF91], dans laquelle une nouvelle formulation du Lagrangien augmenté est développée. Pour les problèmes de contact unilatéral avec frottement, la méthode du bipotentiel n'utilise qu'un seul principe variationnel sur le déplacement et une seule inégalité sur le contact unilatéral et le frottement. Dans la méthode du bipotentiel, le problème de contact avec frottement est traité dans un système

réduit par un algorithme d'Uzawa avec une seule phase de prédiction-corrrection sur le cône de frottement [dF98]. Pour plus de détails sur la formulation du Lagrangien augmenté, nous renvoyons vers les articles de Klarbring *et al.* [Kla92, CKPS98].

#### 4.2.1.1 Cinématique du contact

Dans la suite, les notations et définitions sont introduites. On considère deux solides  $\mathcal{B}^\alpha$  (figure 4.1), avec  $\alpha = 1, 2$ . Chacun d'eux occupe un domaine borné  $\Omega^\alpha \subset \mathbb{R}^3$ , et un point du domaine est noté  $\mathbf{X}^\alpha$ . En outre, ces solides sont considérés comme élastiques et sont soumis à des grands déplacements. La frontière  $\Gamma^\alpha$  de chaque corps est supposée suffisamment régulière de sorte à pouvoir définir un vecteur normal unitaire, noté  $\mathbf{n}^\alpha$ , en chaque point  $M$  de  $\Gamma^\alpha$ . On note  $\mathbf{I} = [0, T]$  l'intervalle de temps au cours duquel le chargement est appliqué. À chaque instant,  $t \in \mathbf{I}$ , la frontière  $\Gamma^\alpha$  du solide  $\mathcal{B}^\alpha$  peut, en général, être découpée en trois parties distinctes :  $\Gamma_u^\alpha, \Gamma_t^\alpha, \Gamma_c^\alpha$ . Avec,  $\Gamma_u^\alpha$  la partie où est imposé le déplacement  $\bar{\mathbf{u}}^\alpha$ ,  $\Gamma_t^\alpha$  la partie où est imposé l'effort  $\bar{\mathbf{t}}^\alpha$ , et enfin les surfaces de contact  $\Gamma_c^\alpha$  où les deux corps  $\mathcal{B}^1$  et  $\mathcal{B}^2$  peuvent être en contact à l'instant  $t$  :

$$\Gamma^\alpha = \Gamma_u^\alpha \cup \Gamma_t^\alpha \cup \Gamma_c^\alpha \quad (4.1)$$

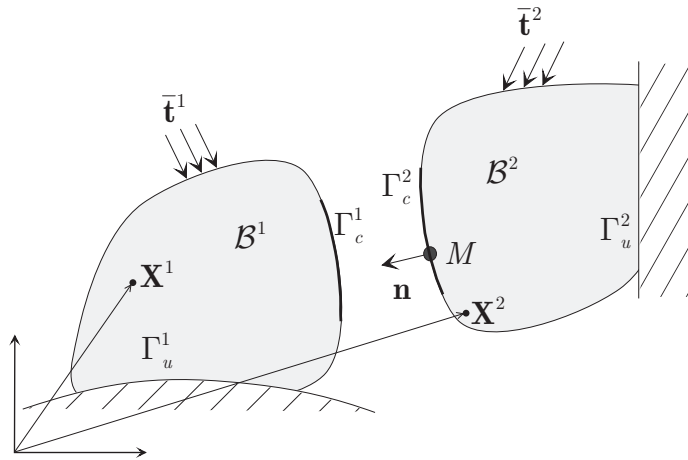


FIGURE 4.1 – Contact cinématique

Les configurations déformées successives de  $\mathcal{B}^\alpha$  sont décrites à chaque instant par le champ de déplacement  $\mathbf{u}^\alpha$  défini sur  $\bar{\Omega}^\alpha$  (c'est-à-dire la fermeture de  $\Omega^\alpha$ ). Sur la surface

de contact, une normale unique, notée  $\mathbf{n}$ , dirigée vers  $\mathcal{B}^1$  ( $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}^2$ ) est définie et le plan tangent, orthogonal à  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , est noté  $\mathbf{T}$ . Pour construire une base locale orthonormée, deux vecteurs notés  $\mathbf{t}_x$  et  $\mathbf{t}_y$  sont définis dans le plan  $\mathbf{T}$ . Pour décrire le contact avec frottement qui peut se produire sur  $\Gamma_c$ , nous introduisons la vitesse relative par rapport à  $\mathcal{B}^2$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^1 - \dot{\mathbf{u}}^2 \quad (4.2)$$

où  $\dot{\mathbf{u}}^1$  et  $\dot{\mathbf{u}}^2$  sont respectivement les vitesses instantanées de  $\mathcal{B}^1$  et  $\mathcal{B}^2$ . Soit  $\mathbf{r}$  la distribution des forces de contact exercée sur  $\mathcal{B}^1$  à  $M$  par  $\mathcal{B}^2$ . En accord avec le principe d'action-réaction,  $\mathcal{B}^2$  est soumis au vecteur contrainte  $-\mathbf{r}$ . Dans le système de coordonnées local défini par le plan tangent  $\mathbf{T}$  et la normale  $\mathbf{n}$ , les vecteurs  $\dot{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{r}$  peuvent alors être décomposés de façon unique comme suit :

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_t + \dot{u}_n \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{u}}_t \in \mathbf{T}, \quad \dot{u}_n \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_t + r_n \mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_t \in \mathbf{T}, \quad r_n \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

#### 4.2.1.2 Loi de contact et modèle de frottement

La loi de contact unilatéral est caractérisée par une condition géométrique de non-pénétration, un état statique de non-adhésion et un état mécanique complémentaire. Ces trois conditions sont connues sous le nom des conditions de Signorini. La condition de non-pénétration contraint le champ de déplacement  $\mathbf{u}^\alpha$ , elle est donnée par :

$$g(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}^1 - \mathbf{X}^2) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (4.5)$$

où

$$\mathbf{X}^\alpha(t) = \mathbf{X}^\alpha(t=0) + \mathbf{u}^\alpha \quad (4.6)$$

Le point  $\mathbf{X}^2$  est défini comme la projection du point  $\mathbf{X}^1 \in \Gamma_c^1$  sur la surface  $\Gamma_c^2$ . En notant

$h$  l'écart initial :

$$h = (\mathbf{X}^1 - \mathbf{X}^2) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (4.7)$$

les conditions d'impenétrabilité de Signorini sont alors données par :

$$u_n + h \geq 0 \quad , \quad r_n \geq 0 \quad , \quad (u_n + h) r_n = 0 \quad (4.8)$$

Ces conditions doivent être satisfaites à chaque instant  $t \in \mathbf{I}$ . Supposons maintenant que les solides soient initialement en contact sur une certaine partie de  $\Gamma_c^\alpha$ . Sur cette partie de  $\Gamma_c^\alpha$ , les conditions de Signorini deviennent alors :

$$u_n \geq 0 \quad , \quad r_n \geq 0 \quad , \quad u_n r_n = 0 \quad (4.9)$$

En général, à chaque instant  $t \in \mathbf{I}$ , la surface de contact potentiel  $\Gamma_c^\alpha$  peut être découpée en deux parties disjointes :  ${}^+\Gamma_c^\alpha$  où les solides sont déjà en contact et  ${}^-\Gamma_c^\alpha$  où les solides ne sont pas en contact :

$$\Gamma_c^\alpha = {}^+\Gamma_c^\alpha \cup {}^-\Gamma_c^\alpha \quad (4.10)$$

Par rapport à  $\Gamma_c^\alpha$ ,  ${}^+\Gamma_c^\alpha$  et  ${}^-\Gamma_c^\alpha$  changent au cours du temps  $t$  et peuvent être vides à des instants  $t \in \mathbf{I}$ . Dans le cas de l'analyse dynamique, tel que les problèmes d'impact, les conditions de Signorini peuvent se formuler sur  ${}^+\Gamma_c^\alpha$ , en termes de vitesse relative par :

$$\dot{u}_n \geq 0 \quad , \quad r_n \geq 0 \quad , \quad \dot{u}_n r_n = 0 \quad \text{sur } {}^+\Gamma_c^\alpha \quad (4.11)$$

Lorsque  $\dot{u}_n \geq 0$ , les solides sont séparés alors qu'ils restent en contact lorsque  $\dot{u}_n = 0$ . La formulation 4.11 des conditions de Signorini peut être combinée avec les règles de glissement pour obtenir la loi complète de contact avec frottement applicable sur les parties en contact de  $\Gamma_c^\alpha$ . Cette loi complète exprime qu'il y a des vitesses possibles des solides qui satisfont la règle d'impenétrabilité, de non-adhesion et de glissement. Évidemment, pour un écart

strictement positif ( $u_n \geq 0$ ), la vitesse relative normale est arbitraire ( $\dot{u}_n \in \mathbb{R}$ ) et la force normale de réaction est égale à zéro ( $r_n = 0$ ). Les mouvements des corps qui ne sont pas en contact sont arbitraires jusqu'à ce que le contact soit établi. Ce choix est motivé par le fait que l'accent est mis sur la définition des évolutions admissibles des solides en contact où l'intégration temporelle doit être effectuée. Dans le reste du mémoire, un signe moins précède toujours la vitesse tangentielle relative  $\dot{\mathbf{u}}_t$  pour souligner sa direction opposée à la force de frottement.

Dans ce travail, on considère la loi classique de frottement sec de Coulomb. L'ensemble des forces admissibles, noté  $K_\mu$ , est défini par :

$$K_\mu = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \|\mathbf{r}_t\| - \mu r_n \leq 0 \} \quad (4.12)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement et  $K_\mu$  le cône de Coulomb.

#### 4.2.1.3 Loi complète de contact avec frottement

Sur la surface de contact  $\Gamma_c^\alpha$ , la règle de glissement peut être combinée avec les conditions de Signorini pour obtenir la loi complète de contact avec frottement qui indique les statuts possibles sur la zone de contact (adhérence, glissement, non-contact). Cette loi fortement non linéaire rend les problèmes de contact avec frottement parmi les plus difficiles à résoudre en mécanique. Une suite d'instructions du type "*si...alors...sinon*" peut être employée pour l'écrire analytiquement :

si	$r_n = 0$ alors $\dot{u}_n \geq 0$	non-contact
si	$\mathbf{r} \in \text{int } K_\mu^i$ alors $\dot{u}_n = 0$ et $-\dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0}$	adhérence
sinon	$(\mathbf{r} \in \text{bd } K_\mu^f \text{ et } r_n > 0)$ $\left\{ \dot{u}_n \geq 0 \text{ et } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } -\dot{\mathbf{u}}_t = \lambda \frac{\mathbf{r}_t}{\ \mathbf{r}_t\ } \right\}$	glissement

(4.13)

où  $K_\mu^i$  et  $K_\mu^f$  représentent respectivement l'intérieur et la frontière de  $K_\mu$ . Le caractère à valeurs multiples de la loi se situe dans la première et deuxième partie de la relation. Si  $r_n$  est nul alors  $\dot{\mathbf{u}}$  est arbitraire, mais sa composante normale  $\dot{u}_n$  devrait être positive. En d'autres termes, un seul élément de  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ) est associé à un nombre infini de vecteurs vitesse  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ . Les mêmes arguments peuvent être développés pour la deuxième partie de

la relation. La loi inverse, c'est à dire la relation  $\mathbf{r}(-\dot{\mathbf{u}})$ , peut être écrite comme suit :

si	$\dot{u}_n > 0$ alors $r_n = 0$	non-contact	(4.14)
si	$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ alors $\mathbf{r} \in K_\mu$	adhérence	
sinon	$(\dot{\mathbf{u}} \in \mathbf{T} - \{\mathbf{0}\})$ $\left\{ \dot{u}_n \geq 0 \text{ et } \mathbf{r}_t = \mu r_n \frac{-\dot{\mathbf{u}}_t}{\ -\dot{\mathbf{u}}_t\ } \right\}$	glissement	

La forme complète de la loi de contact avec frottement implique trois statuts possibles, qui sont : non-contact, contact avec adhérence et contact avec glissement. Seul le dernier cas produit de la dissipation d'énergie.

#### 4.2.1.4 Méthode du bipotentiel

De Saxcé et Feng [dF98] ont montré que la loi de contact (4.13) est équivalente à l'inclusion différentielle suivante :

$$-(\dot{\mathbf{u}}_t + (\dot{u}_n + \mu \|-\dot{\mathbf{u}}_t\|) \mathbf{n}) \in \partial \bigcup_{K_\mu} \mathbf{r} \quad (4.15)$$

où  $\bigcup_{K_\mu} \mathbf{r}$  est une fonction indicatrice de l'ensemble convexe fermé  $K_\mu$  :

$$\bigcup_{K_\mu}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{r} \in K_\mu \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.16)$$

Le bipotentiel de contact est défini par :

$$b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) = \bigcup_{\mathbb{R}_-} (-\dot{u}_n) + \bigcup_{K_\mu}(\mathbf{r}) + \mu r_n \|-\dot{\mathbf{u}}_t\| \quad (4.17)$$

où  $\mathbb{R}_- = ] - \infty, 0]$  est l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls.

Afin d'éviter les potentiels non différentiables qui apparaissent en mécanique non linéaire, tel que les problèmes de contact, il est d'usage d'employer la méthode du Lagrangien augmenté [AC91, SL92, dF91, Kla92]. Pour le bipotentiel de contact  $b_c$ , donné par (4.17), à

condition que  $\dot{u}_n \geq 0$  et  $\mathbf{r} \in K_\mu$ , nous avons :

$$\forall \mathbf{r}' \in K_\mu, \quad \varrho \mu (r'_n - r_n) \|\dot{\mathbf{u}}_t\| + (\mathbf{r}' - (\mathbf{r} - \varrho \dot{\mathbf{u}})) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0 \quad (4.18)$$

où  $\varrho$  est un paramètre intervenant dans la solution. Dans nos calculs,  $\varrho$  est pris comme étant égal au plus grand terme diagonal de matrice de rigidité de contact local. Tenant compte de la décomposition (4.3, 4.4), l'inégalité suivante doit être satisfaite :

$$\mathbf{r}' \in K_\mu, \quad (\mathbf{r} - \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0 \quad (4.19)$$

où les réactions de contact augmentées  $\boldsymbol{\tau}$  sont définies par :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} - \varrho (\dot{\mathbf{u}}_t + (\dot{u}_n + \mu \|\dot{\mathbf{u}}_t\|) \mathbf{n}) \quad (4.20)$$

L'inégalité (4.19) signifie que  $\mathbf{r}$  est la projection de  $\boldsymbol{\tau}$  sur le cône de Coulomb :

$$\mathbf{r} = \text{proj}(\boldsymbol{\tau}, K_\mu) \quad (4.21)$$

pour la solution numérique de l'équation implicite (4.21), l'algorithme d'Uzawa est employé, celui-ci conduit à un processus itératif impliquant une étape de prédiction/correction :

$\begin{aligned} \text{Prédiction } \boldsymbol{\tau}^{i+1} &= \mathbf{r}^i - \varrho^i (\dot{\mathbf{u}}_t^i + (\dot{u}_n^i + \mu \ \dot{\mathbf{u}}_t^i\ ) \mathbf{n}) \\ \text{Correction } \mathbf{r}^{i+1} &= \text{proj}(\boldsymbol{\tau}^{i+1}, K_\mu) \end{aligned}$	(4.22)
---	--------

Il est important de noter que, dans cet algorithme, le contact unilatéral et le frottement sont couplés par l'intermédiaire du bipotentiel. Un autre point essentiel de la méthode du bipotentiel est que le correcteur peut être analytiquement trouvé en ce qui concerne les trois statuts possibles du contact (figure 4.2) :  $\boldsymbol{\tau} \subset K_\mu$  (contact avec adhérence),  $\boldsymbol{\tau} \subset K_\mu^*$  (pas de contact) et  $\boldsymbol{\tau} \subset \mathbb{R}^3 - K_\mu \cup K_\mu^*$  (contact avec glissement).  $K_\mu^*$  est le cône dual de  $K_\mu$ . Cette

étape de correction est explicitement donnée comme suit :

si	$\mu \boldsymbol{\tau}_t^{i+1}  < -\tau_n^{i+1}$ alors $\mathbf{r}^{i+1} = 0$	non-contact	(4.23)
si	$ \boldsymbol{\tau}_t^{i+1}  < \mu \tau_n^{i+1}$ alors $\mathbf{r}^{i+1} = \boldsymbol{\tau}^{i+1}$	adhérence	
sinon	$\mathbf{r}^{i+1} = \boldsymbol{\tau}^{i+1} - \frac{(\ \boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\  - \mu \tau_n^{i+1})}{(1 + \mu^2)} \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_t^{i+1}}{\ \boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\ } + \mu \mathbf{n} \right)$	glissement	

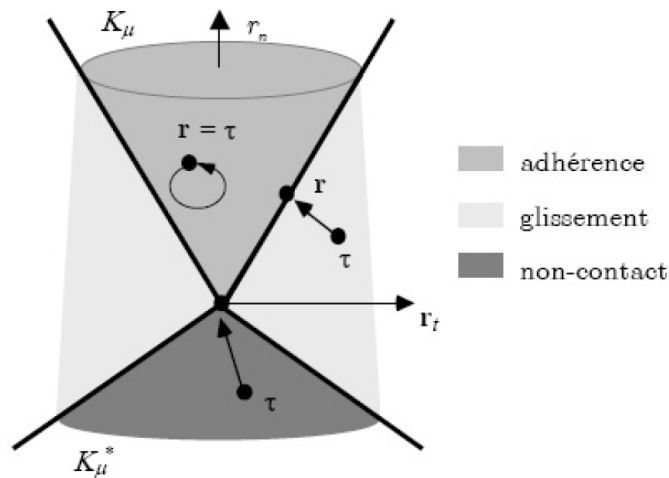


FIGURE 4.2 – Correction sur le cône de Coulomb selon les statuts du contact

Il est important de souligner que cette formule explicite est valable à la fois pour les problèmes de contact 2D et 3D avec frottement de Coulomb et permet d'obtenir des résultats très stables et précis.

## 4.2.2 Quasi-statique

Dans le cas de la simulation pelvienne (contact entre tissus mous), les mouvements sont lents et ne présentent pas de discontinuités importantes au niveau des vitesses. Les forces inertielles ne sont pas importantes et peuvent être négligées, dans ce cas on fait l'hypothèse d'une transformation quasi-statique. Il n'y a plus d'intégration temporelle (simple ou double) mais une résolution numérique des équations d'équilibre fortement non linéaire par Newton-Raphson.

### 4.2.3 Formulation par la méthode des éléments finis

Dans l'analyse linéaire, on suppose une relation linéaire entre les déformations et les déplacements. Cependant, s'il y a de grands déplacements et de grandes rotations, comme dans le cas des problèmes de contact en dynamique, la relation non linéaire entre les déformations et les déplacements ne peut pas être ignorée. L'analyse non linéaire géométrique peut être décrite en employant la formulation du Lagrangien total ou du Lagrangien actualisé. La formulation du Lagrangien total construit la matrice de rigidité tangente par rapport à la configuration initiale, alors que la formulation du Lagrangien actualisé construit la matrice de rigidité tangente à partir de la configuration courante. La formulation du Lagrangien actualisé est efficace [ZT91] informatiquement parce qu'il ne comprend pas la matrice de déplacement initiale. Dans la formulation du Lagrangien total, la configuration initiale demeure constante. Ceci simplifie le calcul [Cri91, SH98]. Par conséquent, la formulation du Lagrangien total a été choisie dans ce travail pour la discrétisation par éléments finis.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis et d'après (2.7) et (2.13), le tenseur de Green-Lagrange inclut formellement les termes linéaires et non linéaires en fonction des déplacements nodaux [SH98] :

$$\mathbf{E} = \left( \mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}) \right) \mathbf{u} \quad (4.24)$$

où  $\mathbf{B}_L$  et  $\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})$  sont les matrices qui relient respectivement les termes linéaires et non linéaires des déformations aux déplacements nodaux. D'après (4.24), la forme incrémentale de la relation déformation-déplacement est :

$$\delta \mathbf{E} = \left( \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}) \right) \delta \mathbf{u} \quad (4.25)$$

En utilisant le principe des travaux virtuels, on obtient les équations :

$$\delta W = \int_{V_0} \mathbf{S} \delta \mathbf{E} dV - \mathbf{F}_{ext} \delta \mathbf{u} - \mathbf{R} \delta \mathbf{u} \quad (4.26)$$

où  $V_0$  est le volume de la configuration initiale,  $\mathbf{F}_{ext}$  le vecteur des chargements extérieurs,  $\mathbf{R}$  le vecteur des forces de contact.

Pour chaque nœud de contact  $i$ , le vecteur de la force de contact dans le repère global est

déterminé par la matrice standard de passage  $\mathbf{H}$  du repère local vers le repère global.

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{H}^i \mathbf{r}^i \quad (4.27)$$

où  $\mathbf{r}$  est la solution de l'algorithme itératif défini dans (4.22).

La forme progressive de la contrainte  $\delta\mathbf{S}$  peut être liée à la forme progressive de la déformation  $\delta\mathbf{E}$  comme suit :

$$\delta\mathbf{S} = \mathbb{D} : \delta\mathbf{E} = \mathbb{D} : (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}))\delta\mathbf{u} \quad (4.28)$$

En Substituant  $\delta\mathbf{E}$  défini par (4.25) dans (4.26), on obtient :

$$\delta W = \int_{V_0} \mathbf{S}(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}))\delta\mathbf{u}dV - \mathbf{F}_{ext}\delta\mathbf{u} - \mathbf{R}\delta\mathbf{u} = (\mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{R})\delta\mathbf{u} \quad (4.29)$$

Le vecteur des forces internes étant défini par :

$$\mathbf{F}_{int} = \int_{V_0} \mathbf{S}(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})) dV \quad (4.30)$$

Comme  $\delta\mathbf{u}$  est arbitraire, on obtient le système d'équations différentielles non linéaires :

$$\mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{R} = 0 \quad (4.31)$$

Cette équation est fortement non linéaire, en raison de grandes déformations et grands déplacements de solide. En outre, la loi constitutive du contact avec frottement est généralement représenté par les inégalités et le potentiel de contact est même non différentiable. Au lieu de résoudre (4.31) en tenant compte de tous les non-linéarités dans le même temps, nous proposons une approche pour séparer les non-linéarités afin de surmonter la complexité de calcul et d'améliorer la stabilité numérique. Une procédure de solution typique pour ce type d'analyse non linéaire est obtenue en utilisant la méthode de Newton-Raphson procédure

itérative [BLM00, SH98] :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{R} - \mathbf{F}_{int}^i \\ \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u} \end{cases} \quad (4.32)$$

où  $i$  et  $i + 1$  sont les nombres d'itération à laquelle les équations sont calculés.  $\mathbf{K}_T^i$  est la matrice de rigidité tangente,  $\mathbf{u}$ , le vecteur des déplacements nodaux,  $\Delta \mathbf{u}$ , le vecteur des déplacements nodaux correction, et  $\mathbf{F}_{int}^i$ , le vecteur des forces internes. Prendre la dérivée de  $\mathbf{F}_{int}$  par rapport aux déplacements nodaux  $\mathbf{u}$  donne la matrice de rigidité tangente comme :

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{u}} = \int_{V_0} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})) + \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) dV \quad (4.33)$$

En plus, en utilisant (4.28), la matrice de rigidité tangente est en fait la somme de la matrice de rigidité élastique  $\mathbf{K}_e$ , la matrice de rigidité géométrique (ou la rigidité des contraintes initiales)  $\mathbf{K}_\sigma$  et la matrice de rigidité de déplacement initial  $\mathbf{K}_u$  :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_u \quad (4.34)$$

où

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_0} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV \quad (4.35)$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_{V_0} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{B}_{NL}}{\partial \mathbf{u}} dV \quad (4.36)$$

$$\mathbf{K}_u = \int_{V_0} (\mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL}) dV \quad (4.37)$$

Il est à noter que (4.32) ne peuvent pas être résolus directement parce que  $\Delta \mathbf{u}$  et  $\mathbf{R}$  tous les deux sont inconnus.

## 4.2.4 Simulation en 2D

Lorsque l'on doit traiter un problème complexe, c'est à dire fortement non linéaire avec des transformations importantes, la démarche du mécanicien consiste dans un premier temps à procéder à des simplifications. C'est pourquoi nous nous sommes focalisés sur la construction d'un modèle 2D en déformation plane de la cavité pelvienne, le plan de la simulation choisi étant le plan sagittal. Une modélisation en déformation plane ne se justifie que si on a un plan de symétrie parfaite, c'est à dire aussi bien au niveau de la géométrie que de la distribution des efforts, ce qui bien sûr n'est pas le cas dans la descente d'organes pelviens. L'intérêt d'un tel modèle, c'est de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté permettant ainsi de multiplier des essais numériques afin de tester nos algorithmes sur la résolution de problèmes hyperélastiques avec contacts multiples, mais aussi de tester l'influence des coefficients des lois de comportement local sur le comportement global des organes. La simulation 2D permet une comparaison directe avec les images IRM dynamiques captées dans le plan sagittal.

### 4.2.4.1 Simulation basée sur des données de la littérature

Le maillage dans sa configuration initiale (état non déformé) a été défini dans le chapitre 3. Les organes sont maillés comme s'ils étaient pleins, mais avec des zones de matériaux différents permettant ainsi de distinguer le comportement défini dans l'épaisseur, du comportement défini à l'intérieur de l'organe. Chaque couleur correspond à une zone de matériau différent comme on peut le voir sur la figure 3.5. L'orange, le vert, et le bleu représentent respectivement les tissus mous de la vessie, de l'utérus + vagin, et du rectum. La zone jaune représente des zones de pression interne plus ou moins forte suivant la compressibilité du matériau (air ou liquide) en relation avec le coefficient  $d$  vu dans le chapitre 2. Dans ces zones les effets de cisaillement sont négligés. Le fascia, qui est supposé de nature différente, relie les organes et est représenté en vert foncé. Le pubis est à côté de la vessie et est considéré comme fixe.

On utilise le modèle de Yeoh dont les coefficients ont été identifiés dans le chapitre 2 à partir de données issues de la littérature (Table 2.2). Le pubis est considéré comme infiniment rigide au regard de l'élasticité des tissus mous. Il est modélisé en élasticité linéaire.

On considère deux zones de contact sans frottement, la première entre la partie supérieure de la vessie et la partie inférieure de l'utérus, la deuxième entre le pubis et la partie inférieure de la vessie. Les conditions limites sont spécifiées en termes de déplacements de nœuds : le pubis est fixé ( $U_x = U_y = 0$ ) dans sa zone de contact avec la vessie, il ne se déforme donc pas.

Le plancher pelvien, qui se trouve au fond de la cavité pelvienne, agit comme une couche de soutien. Il n'est physiquement pas modélisé mais son influence est prise en compte en imposant des conditions limites en déplacement sur les extrémités sortantes, du vagin, de l'urètre et du rectum. Pour simuler un effondrement du plancher, on impose un déplacement vertical vers le bas de 10 mm. Afin de simuler un valsava maximal (expiration bloquée), on impose sur la surface antérieure et supérieure de l'utérus un déplacement vertical vers le bas de 27.9 mm. Ce déplacement imposé est issu d'une séquence d'images IRM dynamiques trouvée dans [NPBC08].

Le résultat de la simulation est présenté sur la figure 4.3. On peut voir le déplacement total des organes de leur configuration initiale non déformée à la configuration finale déformée. On peut voir également la distribution des contraintes de von Mises dans le modèle. Les organes se déforment comme prévu et les contacts sont bien gérés. La contrainte maximale semble se produire dans la paroi antérieure du vagin. Même simplifié, ce modèle met en évidence un affaiblissement possible de la paroi vaginale antérieure, or il est cliniquement connu que la cystocèle est la forme la plus commune de prolapsus des organes pelviens [DeL92]. Ce premier résultat met en évidence, que notre logiciel peut aider à comprendre les causes de cette forme de prolapsus.

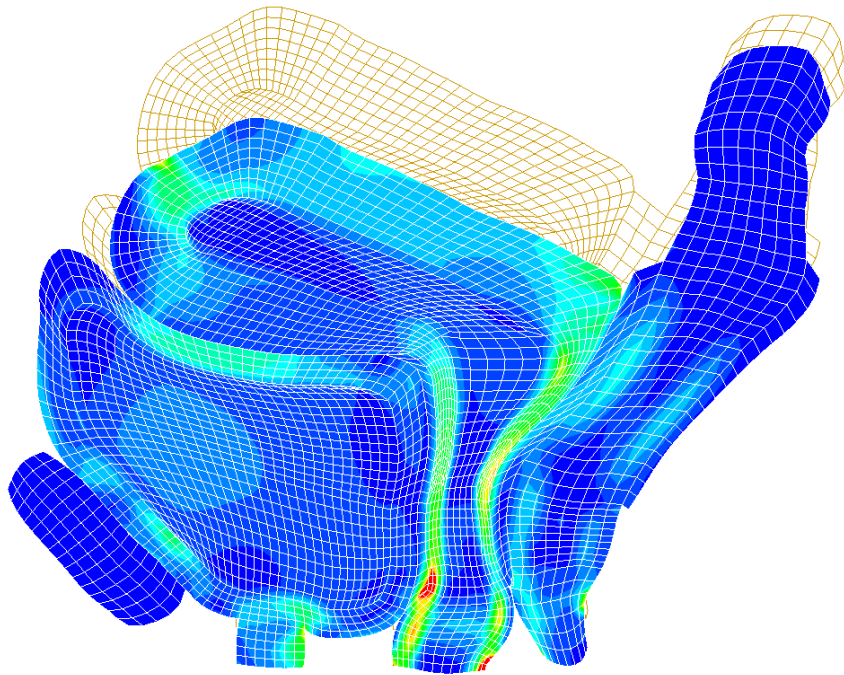


FIGURE 4.3 – Comparaison entre la configuration initiale et la déformée finale

#### 4.2.4.2 Test de validation

L'acquisition IRM dynamique permet l'observation de la dynamique des organes pelviens (vessie, utérus, rectum), à travers les mouvements et les déformations propres à chaque organe lors d'un effort de poussée abdominale. Les images 2D issues des séquences IRM sont segmentées afin d'obtenir les contours de la vessie, de l'utérus-vagin et du rectum. A partir de ces contours, on peut par le calcul du centre de gravité de chaque organe, caractériser le mouvement et par le calcul de descripteurs de forme caractériser la déformation. Les descripteurs de forme sont des attributs numériques représentant l'aspect forme, ils sont largement utilisés dans la reconnaissance de formes, une revue est proposée dans [ZL04]. Une adaptation des descripteurs de formes a été proposée dans [RBPB09] : la déformation d'organe à un moment donné est représentée par la distance entre les coefficients de descripteurs de formes des organes à l'état courant (déformé), et les coefficients de descripteurs de formes des organes à l'état de repos ( $t = 0$ ).

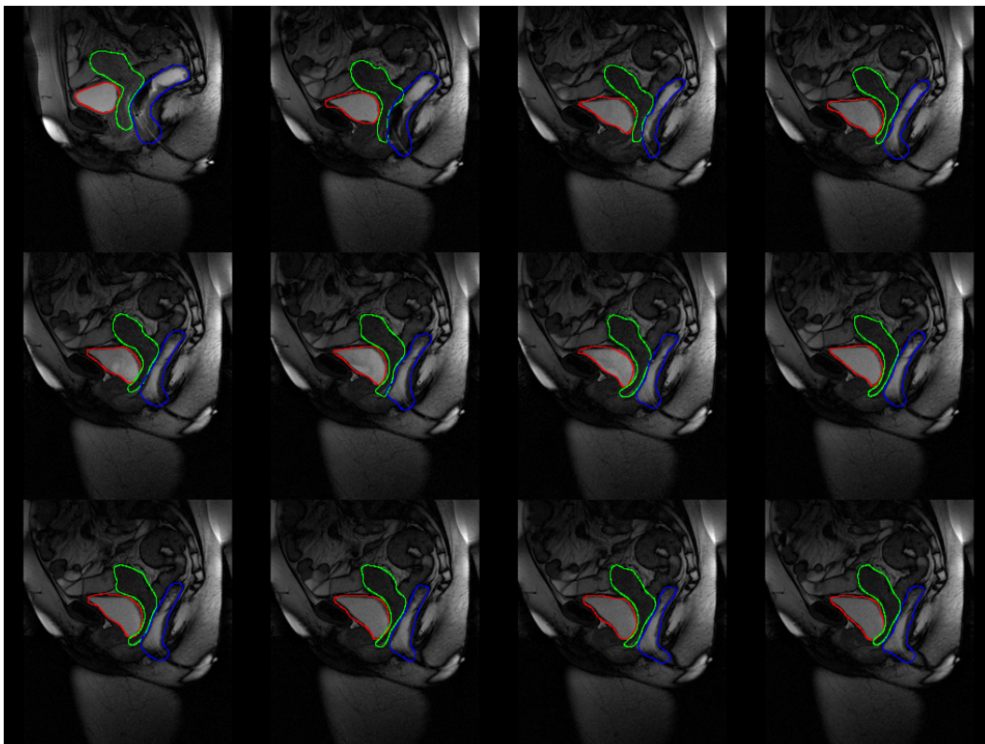
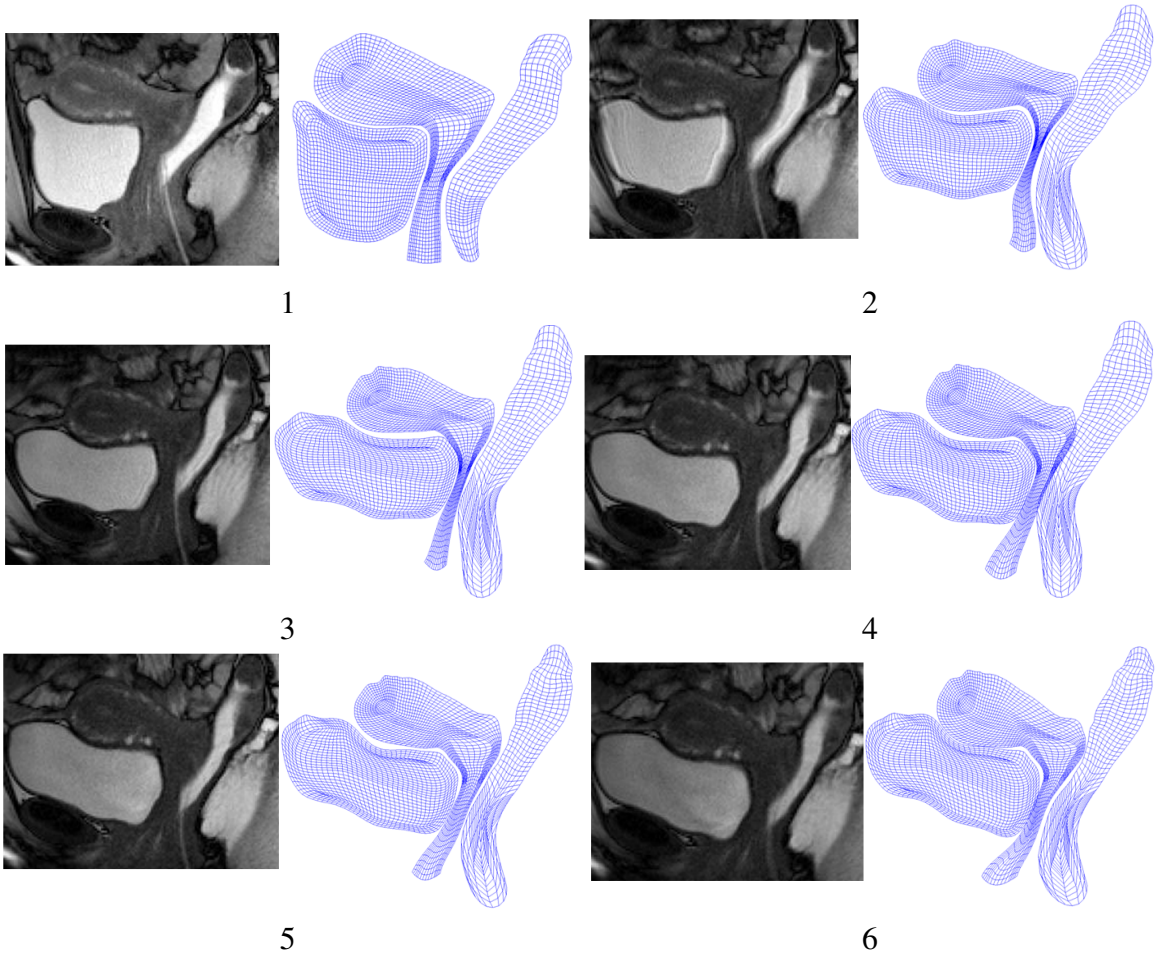


FIGURE 4.4 – Exemple d'une séquence segmentée

Les travaux de thèse de Mehdi Rahim [Rah12], appartenant au LSIS, sur la caractérisation du mouvement et des déformations des organes pelviens ont permis de réaliser des diagnostics cliniques sur chaque acquisition. Outre le diagnostic normal, trois principales



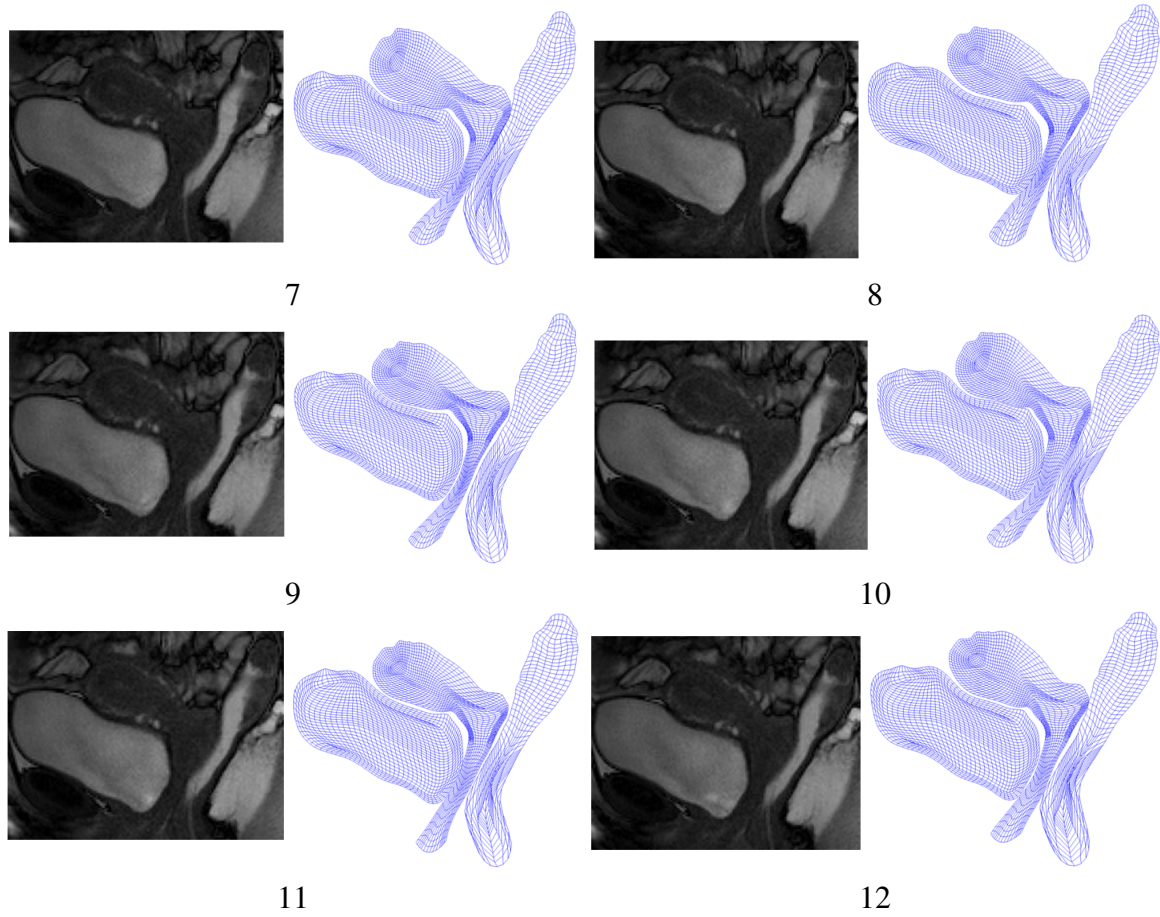
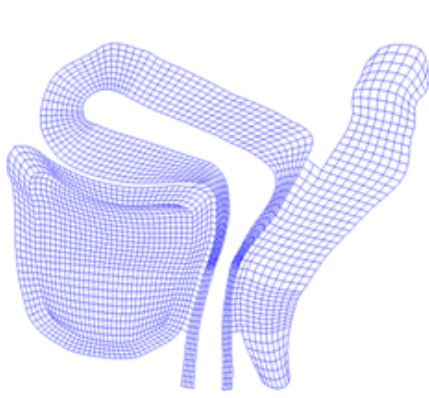
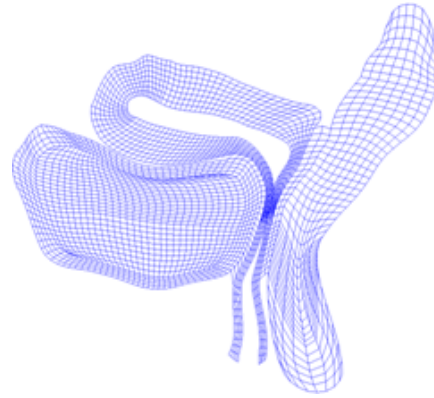


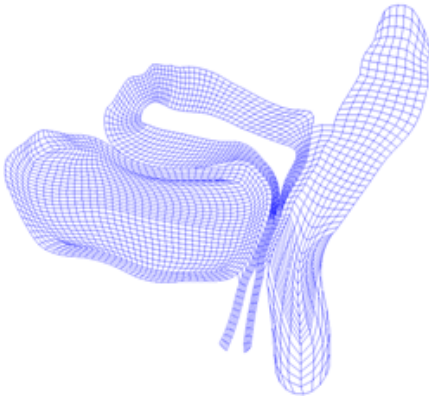
FIGURE 4.5 – Confrontation de déformations entre le résultat numérique et images IRM



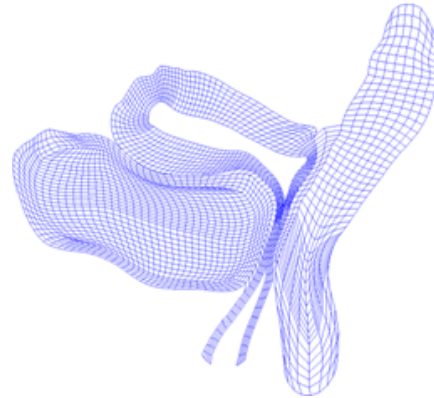
1



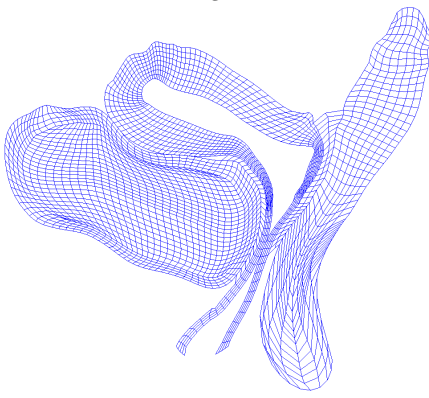
2



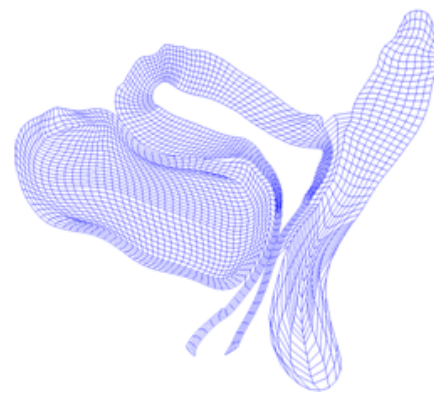
3



4



5



6

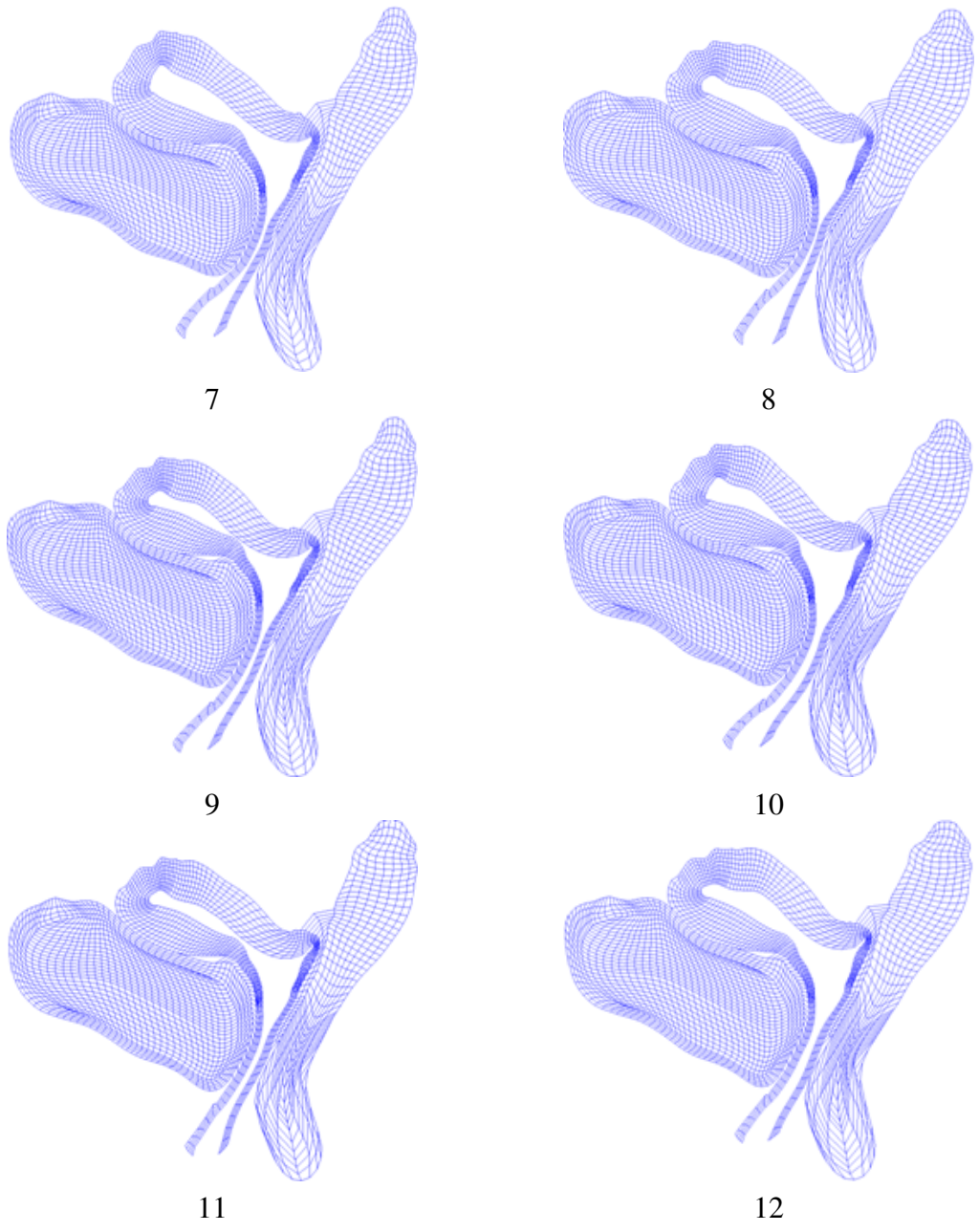


FIGURE 4.6 – Configurations de 12 séquences

pathologies ont été identifiées, la cystocèle, la rectocèle, et le prolapsus utérin. Dans un but d'homogénéité, la groupe LSIS a échantillonné les séquences IRM dynamiques en un sous-ensemble de 12 images réellement représentatives du phénomène observé. Ainsi, la première image représente les organes à l'état de repos, tandis que les images suivantes résument le comportement des organes pelviens lors d'un effort de poussée, la dernière image représente l'état des organes lorsque la poussée est à son maximum. Nous présentons sur la figure 4.4 une série de contours fermés des trois organes d'intérêt.

Dans le but de valider le comportement mécanique de nos organes simulés, un travail de collaboration a été mené avec le LSIS. De la séquence d'images des contours, Mehdi a calculé le déplacement des contours qui a été mis en corrélation avec les noeuds du maillage de notre modèle. En procédant ainsi on a reproduit assez précisément les formes obtenues sur les images IRM ce qui valide la capacité de reproduire des déformations correspondant à des cas cliniques mais valide aussi l'appariement entre les points images des contours et les noeuds du maillage ce qui est loin d'être évident. En imposant le déplacement des contours des trois organes les forces de contacts ne peuvent pas être mises en jeu, ce qui laisse apparaître des inter-pénétrations entre les organes. La figure 4.5 représente la comparaison image par image entre la simulation et l'IRM dynamique.

Ensuite, nous avons décidé de modifier les conditions limites du modèle en rajoutant le fascia entre les organes et la zone de contact entre la vessie et l'utérus. Nous avons également jugé qu'il est plus réaliste de considérer le vagin et l'utérus comme un organe creux et de considérer des nouvelles zones de contact sur les parois internes du vagin. Les configurations de 12 séquences sont représenté dans la figure 4.6.

### 4.2.5 Simulation en 3D

Les procédures de génération de la géométrie des organes pelviens et de leur discrétisation spatiale ont été présentées dans le chapitre 3. Rappelons que les modèles 3D sont construits à partir de nuages de points. Un premier modèle tétraédrique a été élaboré à partir de logiciels CAO (SolidWorks et Ansys) afin de procéder à des essais numériques. Nous utilisons ici un deuxième modèle géométrique généré par l'application développée par le LSIS suite aux travaux de Thierry Bay. Ce modèle répond aux contraintes que nous avons fixées en tant que mécanicien à savoir des organes creux discrétisés en éléments finis hexaédriques homogènes. Le modèle présenté ci-dessous contient environ 9000 hexaèdres.

Les valeurs des épaisseurs des parois vésicale, rectale, et utérine sont très controversées car elles sont difficiles à obtenir in vivo à partir d'images IRM. L'épaisseur mesurée de la

paroi vésicale, d'après Khullar *et al.* [KSC<sup>+</sup>94], est généralement d'environ 4-5 mm. Tubaro *et al.* [TNT<sup>+</sup>05] rapportent que l'épaisseur vésicale moyenne, d'après le monogramme d'Abrams-Griffith, varie entre 3.5 et 4 mm. Dans l'étude de Frokjaer *et al.* [FLB<sup>+</sup>05], l'épaisseur rectale varie entre 2.7 et 4.0 mm. L'épaisseur utérine, la plus épaisse des trois organes, est près de 25.0-40.0 mm d'après Miftahof *et al.* [MN11]. La valeur de 5.0 mm en moyenne est adoptée pour l'épaisseur de la paroi vésicale et de 4.0 mm pour celle de la paroi rectale. La valeur de l'épaisseur de la paroi utérine que l'on a adoptée varie entre 15.0-30.0 mm.

Contrairement au modèle 2D, le fascia entre les organes n'a pas été modélisé. L'interaction entre les organes est donc gérée par les forces de contact. Ce sont des contacts unilatéraux qui ont lieu entre un nœud du premier corps et une facette (d'un élément) du deuxième corps déformable.

Pour les conditions limites, nous nous sommes basés principalement sur les observations anatomiques de DeLancey [DeL93] et les discussions avec les médecins du CHU La Timone de Marseille (voir aussi le chapitre 1). Les parties inférieures de la vessie et du vagin sont reliées au plancher pelvien qui est considéré comme étant fixe et rigide. La partie dorsale du rectum s'appuie sur l'arrière de la cavité pelvienne (coccyx) que nous considérons également comme étant fixe. Nous avons contraint les déplacements des parois latérales du vagin dans les directions  $x$  et  $y$  (directions du plan sagittal) pour simuler l'influence du paracolpium qui rattache le vagin latéralement sur les parois pelviennes. Plusieurs zones de contact ont été définies : entre l'utérus et la vessie, entre la paroi postérieure de la vessie et la paroi antérieure du vagin, entre la paroi postérieure du vagin et la paroi antérieure du rectum. Un déplacement de 6.0 mm est imposé sur la partie supérieure de l'utérus afin de simuler le comportement des organes pelviens lors d'un effort de poussée. Les paramètres matériaux sont choisis et définis dans le tableau 2.2 du chapitre 2.

Les déplacements verticaux (suivant  $z$ ) peuvent être visualisés sur la figure 4.7. Les contraintes générées dues à l'interaction entre organes augmentent au fur et à mesure de l'abaissement de l'utérus. Les contraintes de Von Mises sont visualisées sur la figure 4.8. La contrainte maximale est de 3.85 MPa et se trouve localisée sur la paroi vaginale. L'interface entre l'utérus et la vessie est visualisée sur la figure 4.9. On peut voir que le contact entre deux organes hyperélastiques a bien été traité. Il a fallu deux heures de temps de calcul sur un PC 3 Ghz Double Core disposant de 3 Go de RAM. Ce temps de calcul peut être diminué si on supprime des surfaces de contact en créant des éléments de liaison entre les organes représentant l'effet du fascia.

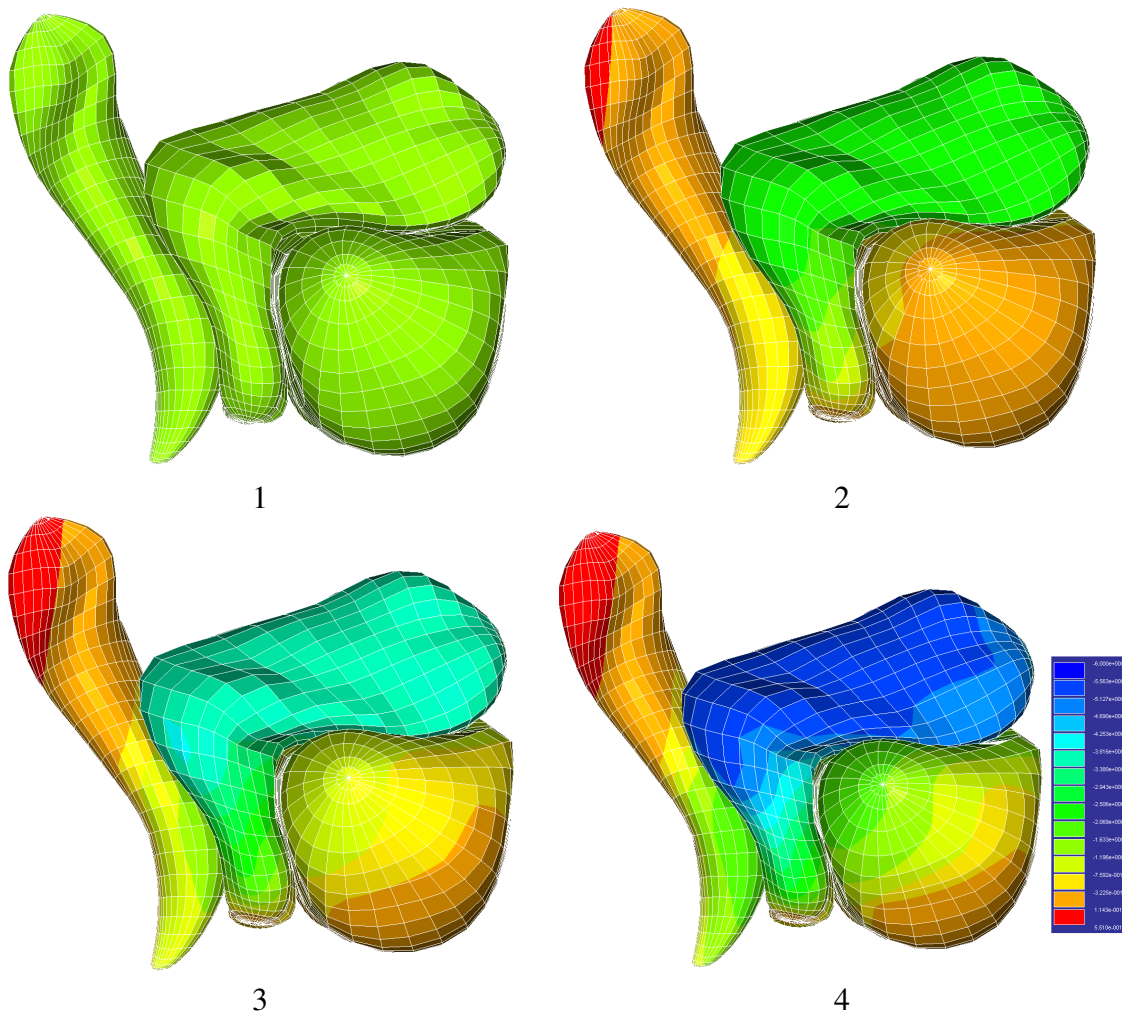


FIGURE 4.7 – Contours de displacement ( $U_z$ )

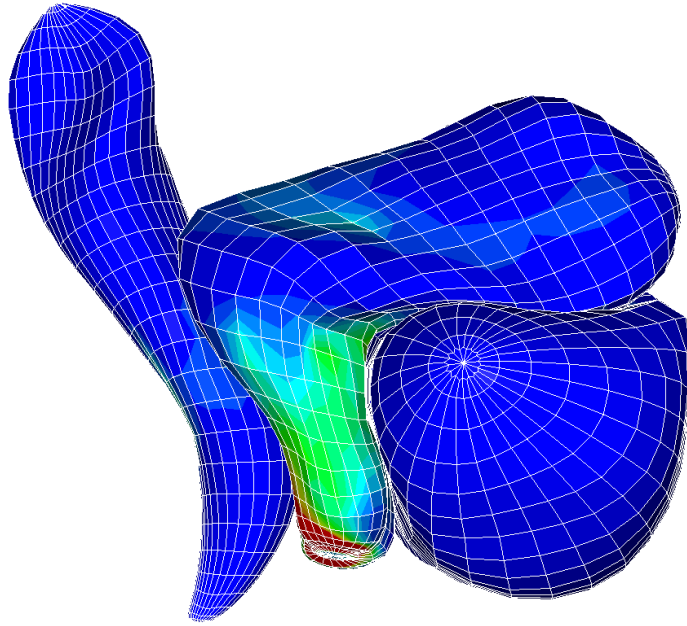


FIGURE 4.8 – Contrainte de Von Mises

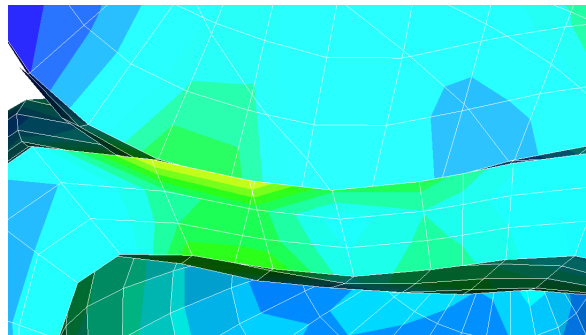


FIGURE 4.9 – Contact entre utérus et vessie

## **4.3 Conclusions**

Après avoir défini tous les éléments nécessaires à la modélisation numérique pour traiter un problème de mécanique non linéaire (contact, grandes déformations) comme dans le cas de la simulation de prolapsus pelvien, nous avons présenté deux modèles 2D (utérus plein ou creux) et un modèle 3D s'appuyant sur un maillage que nous avons obtenu à partir d'une application développée au LSIS. Des comparaisons avec des images obtenues par IRM dynamique valident la capacité de notre logiciel à reproduire les déformations attendues. Le Modèle 3D s'avère très gourmand en ressources de calcul mais peut être optimisé à condition d'être capable de relier les organes entre eux et aux parois de la cavité pelvienne, limitant ainsi le calcul des forces de contact.



# Conclusions et perspectives

## Conclusions

Le travail que nous avons présenté dans ce document, est consacré à la modélisation de la mobilité des organes pelviens (vessie, rectum, utérus et vagin) chez la femme. Il a été mené dans le cadre d'une collaboration entre des centres hospitalo-universitaires (CHU La Timone de Marseille, CHU de Nîmes et hôpital Sainte Marguerite de Marseille), une équipe d'informaticiens (Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes) et une équipe de mécaniciens, dans le contexte des prolapsus pelviens. L'objectif était de développer une approche originale pour déterminer des modèles géométriques et physiques réalistes des principaux organes pelviens chez la femme. La démarche adoptée propose un simulateur non temps réel mais qui peut s'insérer dans une routine clinique comme un outil de planification préopératoire patient spécifique.

Ce travail propose une approche biomécanique, qui intègre des données anatomiques issues d'images IRM patientes spécifiques, pour la construction d'un modèle de la région pelvienne. Ce modèle a permis de mettre en œuvre des simulations du déplacement des organes pelviens et de ses interactions par la méthode des éléments finis. La démarche mise en œuvre peut être synthétisée par les étapes suivantes :

- Acquisition des images issues d'IRM et construction de la géométrie à partir de nuage de points.
- Exportation de la géométrie vers un logiciel éléments finis et discrétisation de cette géométrie.
- Caractérisation des comportements mécaniques des tissus biologiques par des essais numériques et identification des paramètres des lois de comportement choisis à partir de données expérimentales trouvées dans la littérature.
- Définition des conditions aux limites et du contact entre les organes.
- Résolution quasi-statique non linéaire avec des déplacements imposés pour simuler une

poussée de l'abdomen sur la cavité pelvienne.

- Simulation numérique et comparaison avec IRM statique et dynamique.

La caractérisation des tissus pelviens est un des principaux points d'achoppement d'un problème biomécanique. Nous avons donc étudié les propriétés mécaniques des tissus mous en les considérant comme des matériaux hyperélastiques isotropes et/ou anisotropes. De nouvelles lois de comportement ont ainsi été intégrées dans notre code de calcul comme le modèle HGO pour simuler des tendons, le modèle Yeoh pour modéliser les tissus des trois organes pelviens principaux et le modèle Gent pour simuler les ligaments du fascia pelvien. Des protocoles de mesures des tissus pelviens ont été trouvés dans la littérature qui ont permis d'identifier les coefficients présents dans ces lois de comportement en utilisant un logiciel spécifique d'ajustement de courbe (logiciel MSC.Marc Mentat).

A partir de nuage de points, deux modèles 2D (utérus plein ou creux) et un modèle 3D s'appuyant sur un maillage que nous avons obtenu à partir d'une application développée au LSIS, ont été réalisés. Ces modèles permettent de simuler des descentes d'organes pelviens et d'appréhender les mécanismes mis en jeu lors d'un prolapsus. On reproduit bien à travers ces modèles des déformations conformes à celles observées sur des séquences d'images IRM.

## Perspectives

Il reste encore à améliorer nos modèles sur plusieurs points :

- l'identification et la localisation des ligaments pelviens ;
- la reconstruction 3D complète du vagin ;
- la possibilité d'introduire des ressorts non linéaires pour simuler une intervention chirurgicale ;
- la possibilité d'introduire un superélément pour simuler les cavités internes des organes ;
- l'amélioration des conditions limites au niveau des forces de poussée ;

Au delà de ces points d'améliorations, capitaux pour le projet MoDyPe, il semble important de dégager des perspectives dépassant ce cadre et pouvant être l'objet de futurs travaux de recherche.

Comme perspectives nous envisageons deux axes de recherche. Le premier axe concerne une extension de la loi de comportement des tissus mous biologiques en considérant le phénomène de la viscoélasticité. Le deuxième axe concerne une nouvelle analyse pour discrétiser les équations de la mécanique des milieux continus développée par Hughes *et al.* [HCB05] que l'on appelle analyse isogéométrique et qui est plus proche de la description géométrique des objets que de la méthode des éléments finis.

## Le modèle viscoélastique

Nous avons vu que les tissus biologiques mous sont des matériaux non-linéaires hyperélastiques isotropes ou anisotropes, et quasi-incompressibles par leur forte teneur en eau (environ 80% du poids) [Fun93]. La présence de liquide confère également un comportement viscoélastique, il faut donc envisager de compléter les lois de comportement afin de tenir compte de ce phénomène. La viscosité entraîne de la dissipation d'énergie et une modification de l'évolution des contraintes internes dans le temps. Par contre, elle n'influe pas véritablement sur l'état de déformation finale, c'est pourquoi nous n'avons pas pris en compte ce phénomène dans le cas du prolapsus pelvien où l'analyse porte essentiellement sur la configuration déformée finale. Mais dans d'autres contextes médicaux, comme le traitement par laser d'organes (prostate), où il est nécessaire de prendre en compte la déformation en fonction du temps, ce phénomène peut se révéler important.

Un régime visqueux est pris en compte pour les tissus mous dans la thèse de Chendeb [Che07]. Les deux modèles les plus simples sont : le modèle de Maxwell (Fig. 4.10) qui est adapté au fluides viscoélastiques et le modèle de Kelvin-Voigt (Fig. 4.11) qui est un modèle élémentaire de solide viscoélastique. Le choix du modèle de Kelvin-Voigt réside dans le fait que dans ce modèle, la loi de comportement s'écrit sous la forme générale :  $\sigma = \sigma_e + \sigma_v$ , il est donc possible d'identifier une contrainte due au comportement visqueux assez faible pour ne pas perturber le comportement total mais suffisante pour diminuer les instabilités numériques.

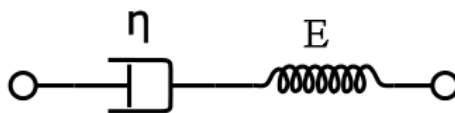


FIGURE 4.10 – Le modèle de Maxwell

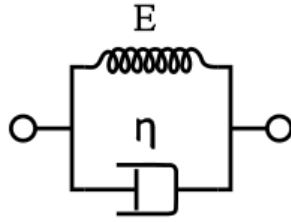


FIGURE 4.11 – Le modèle de Kelvin-Voigt

Plus récemment, Peña *et al.* [PCM<sup>+</sup>10] ont proposé un modèle pour décrire les propriétés mécaniques viscoélastiques du tissu vaginal basé sur des données expérimentales. Le concept de variable interne est appliqué, en postulant l'existence d'une fonction de la densité d'énergie libre découplée, de la forme :

$$\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{M}, \mathbf{Q}_{ik}) = \Psi_{vol}^0(J) + \Psi_{ich}^0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=m,f} [\bar{\mathbf{C}} : \mathbf{Q}_{ik}] \quad (4.38)$$

où  $\Psi_{vol}^0$  et  $\Psi_{ich}^0$  sont des fonctions scalaires de  $J$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\mathbf{M}$  (voir paragraphe 2.4.1), qui décrivent respectivement les réponses volumétrique et isochore du matériau (voir paragraphe 2.3.2).  $\mathbf{Q}_{ik}$  peut être interprété comme un tenseur contrainte de non-équilibre où  $\mathbf{Q}_{im}$  est la contribution isotrope (matrice) associée aux invariants  $\bar{I}_1$  et  $\bar{I}_2$ , et  $\mathbf{Q}_{if}$  est la contribution anisotropique (fibres) associée à l'invariant  $\bar{I}_4$  (voir paragraphe 2.4.1) [PPD08]. On peut en déduire une expression du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  de la forme :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{vol} + \mathbf{S}_{ich}^0 - J^{-\frac{2}{3}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=m,f} DEV[\mathbf{Q}_{ik}] \quad (4.39)$$

où DEV est l'opérateur déviatorique [SH98].

Les tenseurs des contraintes non-équilibres dans (4.39),  $\mathbf{Q}_{ik}$  sont supposés être régis par un ensemble d'équations différentielles de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{Q}}_{ik} + \frac{1}{\tau_{ik}} \mathbf{Q}_{ik} = \frac{\gamma_{ik}}{\tau_{ik}} DEV \left[ 2 \frac{\partial \Psi_{ich}^0(k)(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{M})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] \quad (4.40)$$

où  $\gamma_{ik} \in [0, 1]$  sont des facteurs d'énergie adimensionnels libres associés aux temps de relaxation  $\tau_{ik} > 0$ .

## L'analyse isogéométrique

L'analyse isogéométrique est une nouvelle méthode numérique développée par Hughes *et al.* depuis quelques années [HCB05]. Le but est d'unifier les domaines de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) et FEA (Finite Element Analysis). L'analyse isogéométrique introduit un nouveau paradigme qui tente d'améliorer la description géométrique, la représentation de solutions complexes et le raffinement de maillage tels qu'ils sont connus dans les éléments finis traditionnels. Il a été démontré que l'analyse isogéométrique fournit des représentations géométriques plus précises et plus efficaces [BCC<sup>+</sup>10]. Elle est fondée sur les bases de la représentation géométrique utilisée en CAO et Infographie. La première implémentation de l'analyse isogéométrique fut basée sur les fonctions NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), une technologie standard dans la majorité des modeleurs CAO du marché. Des applications ont été faites dans le domaine de la mécanique du solide [Tay11], des fluides [BA10], de l'interaction fluide-structure [BCHZ08], du contact [TaWH11], et de la biomécanique cardiovasculaire [ZBGB07].

Nous notons qu'un maillage éléments finis n'est seulement qu'une approximation de la géométrie CAO. Cette approximation peut dans de nombreux cas créer des erreurs dans les résultats d'analyse. Par exemple, le contact glissant entre les corps ne peut pas être représenté exactement sans des descriptions géométriques précises. Par contre, géométries NURBS peuvent atteindre la finesse des corps réels (Fig.4.12).

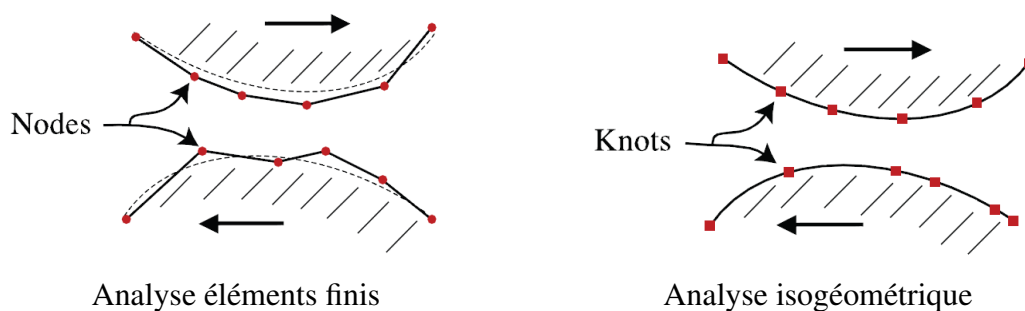


FIGURE 4.12 – Contact glissant

L'une des principales difficultés du problème biomécanique est la prise en compte de la complexité de la géométrie. L'analyse isogéométrique permet de répondre à ce type de problèmes, que ce soit par la modélisation exacte d'une grande classe de domaines, ou par la précision des approximations que l'on peut obtenir le cas échéant.



## Références bibliographiques

- [AB93] E. M. Arruda and M. C. Boyce. A three dimensional constitutive model for the large deformation stretch behavior of rubber elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 41 :389–412, 1993.
- [AC91] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 92 :353–375, 1991.
- [AMHD01] J.A. Ashton-Miller, D. Howard, and J.O.L. DeLancey. The functional anatomy of the female pelvic floor and stress continence control system. *Scand J Urol Nephrol Suppl*, 207 :1–12, 2001.
- [AS98] E.S. Almeida and R.L. Spilker. Finite element formulation for hyperelastic transversely isotropic biphasic soft tissues. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 151 :513–538, 1998.
- [BA10] Y. Bazilevs and I. Akkerman. Large eddy simulation of turbulent taylor-couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. *J. Comput. Phys*, 229 :3402–3414, 2010.
- [Bay12] T. Bay. *Modélisation de surfaces épaisses et fermées : application au cas des organes pelviens*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, 2012.
- [BCC<sup>+</sup>10] Y. Bazilevs, V. Calo, J. Cottrell, J. Evans, T. Hughes, S. Lipton, M. Scott, and T. Sederberg. Isogeometric analysis using t-splines. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 199 :229–263, 2010.
- [BCHZ08] Y. Bazilevs, V. Calo, T. Hughes, and Y. Zhang. Isogeometric fluid-structure interaction : theory, algorithms and computations. *Comput. Mech*, 43 :3–37, 2008.
- [BCR<sup>+</sup>11] T. Bay, J.-C. Chambelland, R. Raffin, M. Daniel, and M.E. Bellemare. Geometric modeling of pelvic organs. In *33rd Annual International Conference of*

*the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, Boston, USA, pages 4329-4332, 2011.

- [BHGA09] M.B. Boubaker, M. Haboussi, J-F. Ganghoffer, and P. Aletti. Finite element simulation of interactions between pelvic organs : Predictive model of the prostate motion in the context of radiotherapy. *Journal of Biomechanical*, 42 :1862–1868, 2009.
- [BK62] P. J. Blatz and W. L. Ko. Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Transactions of the Society of Rheology*, 6 :223–251, 1962.
- [BLM00] T. Belytschko, W.K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, Chichester, UK, 2000.
- [BMB<sup>+</sup>96] R.C. Bump, A. Mattiasson, K. Bø, L.P. Brubaker, J.O.L. DeLancey, P. Klarskov, B.L. ShuU, and A.R.B. Smith. The standardization of terminology of female pelvic organ prolapse and pelvic floor dysfunction. *Am J Obstet Gynecol*, 175(1) :10–17, 1996.
- [BNSH06] D. Balzani, P. Neff, J. Schröder, and G.A. Holzapfel. A polyconvex framework for soft biological tissues. adjustment to experimental data. *Int. J. Solids. Struct.*, 43 :6052–6070, 2006.
- [Boe87] J.P. Boehler. *Introduction to the invariant formulation of anisotropic constitutive equations*. J.P. Boehler (ed.), Applications of Tensor Functions in Solids Mechanics, CISM Course No. 292, Springer Verlag, 1987.
- [Bon34] V. Bonney. The principles that should underlie all operations for prolapse. *J Obstet Gynaecol Br Empire*, 41 :669–683, 1934.
- [Bou09] M.B. Boubaker. *Contribution mécanique à la réduction des marges en radiothérapie de la prostate : modélisation et simulation numérique du mouvement et de la déformation des organes pelviens*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009.
- [BPMD07] M. E. Bellemare, N. Pirró, L. Marsac, and O. Durieux. Toward the simulation of the strain of femal pelvic organs. In *EMBC07, 29th IEEE EMBS Annual international conference*, Lyon, France, August 23-26, 2007.
- [BW92] W.F. Baden and T. Walker. *Surgical repair of vaginal defects*. JB Lippincott, 1992.

- 
- [CB86] A. B. Chaudhary and K. J. Bathe. A solution method for static and dynamic analysis of three dimensional contact problems with friction. *Computers & Structures*, 24 :855–873, 1986.
- [CFJZ13] Z.-W. Chen, Z.-Q. Feng, P. Joli, and Q.-F. Zeng. On the anisotropic hyperelastic behavior of soft biological tissues. *Mathematics and Mechanics of Solids*, Accepted, 2013.
- [Che07] S. Chendeb. *Chirurgie virtuelle modélisation temps réel des tissus mous, interactions et système haptique dédiée*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2007.
- [CJCF10] Z.-W. Chen, P. Joli, J. M. Cros, and Z.-Q. Feng. Numerical modeling of soft tissue injury due to impact. In *6th World Congress on Biomechanics*, Singapore, August 1-6, 2010.
- [CKPS98] P. W. Christensen, A. Klarbring, J. S. Pang, and N. N. Strömberg. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 42 :145–173, 1998.
- [CLB<sup>+</sup>04] M. Cossona, E. Lambaudiea, M. Boukerroua, P. Lobryb, G. Crépina, and A. Ego. A biomechanical study of the strength of vaginal tissues results on 16 post-menopausal patients presenting with genital prolapse. *European Journal of Obstetrics & Gynecology and Reproductive Biology*, 112 :201–205, 2004.
- [Cri91] M. A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solid and structures*. Wiley, 1991.
- [CWRR05] Y. Chen, H. Wang, D. W. Rosen, and J. Rossignac. Filleting and rounding using a point-based method. *ASME Conference Proceedings*,, pages 533–542, 2005.
- [DB95] G.W. Davila and F. Bernier. Multimodality pelvic physiotherapy treatment of urinary incontinence in adult women. *Int Urogynecol J Pelvic Floor Dysfunct*, 6 :187–194, 1995.
- [DeL92] J.O.L DeLancey. Anatomic aspects of vaginal eversion after hysterectomy. *Am. J. Obstet. Gynecol*, 166 :1717–24, 1992.
- [DeL93] J.O.L. DeLancey. Anatomy and biomechanics of genital prolapse. *Clin Obstet Gynecol*, 36 :897–909, 1993.

- [dF91] G. de Saxcé and Z.-Q. Feng. New inequality and functional for contact with friction : The implicit standard material approach. *Mech. Struct. Mach.*, 19 :301–325, 1991.
- [dF98] G. de Saxcé and Z.-Q. Feng. The bi-potential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathematical and Computer Modeling*, 28(4-8) :225–245, 1998.
- [dMP<sup>+</sup>05] D. d’Aulignac, J.A.C. Martins, E.B. Pires, T. Mascarenhas, and R.M.N. Jorge. A shell finite element model of the pelvic floor muscles. *Comput Methods Biomech Biomed Engin*, 8 :339–347, 2005.
- [DVM10] R.L. Drake, A.W. Vogl, and A.W.M. Mitchell. *Gray’s Anatomie pour les étudiants(2e édition)*. Elsevier-Masson, 2010.
- [ER57] J.L. Ericksen and R.S. Rivlin. Large elastic deformations of homogeneous anisotropic materials. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 3 :281–301, 1957.
- [Fen08] Z.-Q. Feng. <http://lmee.univ-evry.fr/~feng/FerSystem.html>, 2008.
- [FFP79] Y.C. Fung, K. Fronek, and P. Patitucci. Pseudoelasticity of arteries and the choice of its mathematical expression. *Am. J. Physiol.*, 237 :H620–H631, 1979.
- [FLB<sup>+</sup>05] J.B. Frøkjær, D. Liao, A. Bergmann, B.P. Macmahon, E. Steffensen, A.M. Drewes, and H. Gregersen. Three-dimensional biomechanical properties of the human rectum evaluated with magnetic resonance imaging. *Neurogastroenterology and Motility*, 17 :531–540, 2005.
- [Flo61] P.J. Flory. Thermodynamic relations for high elastic materials. *Trans. Faraday Soc.*, 57 :829–838, 1961.
- [FPL03] Z.-Q. Feng, F. Peyraut, and N. Labed. Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz-Ko hyperelastic bodies. *Int. J. Engn. Science*, 41 :2213–2225, 2003.
- [Fun93] Y.C. Fung. *Biomechanics : Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer, 1993.
- [FVFP06] Z.-Q. Feng, C. Vallée, D. Fortuné, and F. Peyraut. The 3<sup>é</sup> hyperelastic model applied to the modeling of 3D impact problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43 :51–58, 2006.

- 
- [Gen96] A. N. Gent. A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chem. Technol.*, 69 :59–61, 1996.
- [GOH06] T.C. Gasser, R.W. Ogden, and G.A. Holzapfel. Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *J. R. Soc. Interface*, 3 :15–35, 2006.
- [GRB<sup>+</sup>11] B. Gabriel, C. Rubod, M. Brieu, B. Dedet, L. Landsheere, V. Delmas, and M. Cosson. Vagina, abdominal skin, and aponeurosis : do they have similar biomechanical properties ? *Int Urogynecol J*, 21 :23–27, 2011.
- [Har13] N. Harb. *Identification inverse de paramètres biomécaniques en hyperélasticité anisotrope*. PhD thesis, Université de Technologie Belfort-Montbéliard, 2013.
- [HCB05] T. Hughes, J. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis : Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :4135–4195, 2005.
- [HCN<sup>+</sup>02] S.L. Hendrix, A. Clark, I. Nygaard, A. Aragaki, V. Barnabei, and A. Mc-Tiernan. Pelvic organ prolapse in the women’s health initiative : gravity and gravidity. *Am. J. Obstet. Gynecol*, 186 :1160–1166, 2002.
- [HDW<sup>+</sup>10] M.J. Hall, C.J. DeFrances, S.N. Williams, A. Golosinskiy, and A. Schwartzman. National hospital discharge survey : 2007 summary. *National health statistics reports*, 29 :1–24, 2010.
- [HFAT05] H.V. Tran, F. Charleux, A. Ehrlacher, and M.C. Ho Ba Tho. Propriétés mécaniques multi-couches de la peau humaine in vivo. In *8e Colloque National en Calcul des Structures*, Giens Var, France, Mai 17-20, 2005.
- [HGO00] G.A. Holzapfel, T.C. Gasser, and R.W. Ogden. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J. Elasticity*, 61 :1–48, 2000.
- [Hol06] G. A. Holzapfel. *Mechanics of biological tissue*. Springer, 2006.
- [HS96] J.L. Harth-Smith. Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. *Math Phys*, 17 :608–625, 1996.
- [HS03] C. O. Horgan and G. Saccomandi. Finite thermoelasticity with limiting chain extensibility. *J. Mech. Phys. Solids*, 51 :1127–1146, 2003.

- [HS04] C. O. Horgan and G. Saccomandi. Constitutive models for compressible nonlinearly elastic materials with limiting chain extensibility. *J. Elasticity*, 77 :123–138, 2004.
- [HS06] C. O. Horgan and G. Saccomandi. Phenomenological hyperelastic strain-stiffening constitutive models for rubber. *Rubber Chem. Technol.*, 79 :152–169, 2006.
- [HSC04] S. Hagen, D. Stark, and D. Cattermole. A united kingdom-wide survey of physiotherapy practice in the treatment of pelvic organ prolapse. *Physiotherapy*, 90 :19–26, 2004.
- [Hum02] J.D. Humphrey. *Cardiovascular Solid Mechanics : Cells, Tissues, and Organs*. Springer-Verlag, NY, 2002.
- [Hum03] J.D. Humphrey. Continuum biomechanics of soft biological tissues. *Proc. R. Soc. Lond.*, 459 :3–46, 2003.
- [JAMD12] D. Jing, J.A. Ashton-Miller, and J.O.L. DeLancey. A subject-specific anisotropic visco-hyperelastic finite element model of female pelvic floor stress and strain during the second stage of labor. *Journal of Biomechanics*, 45 :455–460, 2012.
- [JCRB<sup>+</sup>10] C. Jean-Charles, C. Rubod, M. Brieu, M. Boukerrou, J. Fasel, and M. Cosson. Biomechanical properties of prolapsed or non-prolapsed vaginal tissue : impact on genital prolapse surgery. *Int Urogynecol J*, 21 :1535–1538, 2010.
- [JOL02] I.T. JOLLIFFE. *Principal Component Analysis, second ed.* Springer, 2002.
- [Kla92] A. Klarbring. Mathematical programming and augmented Lagrangian methods for frictional contact problems. In A. Curnier, editor, *Contact Mechanics International Symposium*, pages 409–422. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Switzerland, 1992.
- [Kla93] A. Klarbring. Mathematical programming in contact problems. In MH. Aliabadi and CA. Brebbia, editors, *Computational methods in contact mechanics*, pages 233–263. Southampton : Computational Mechanics Publications, 1993.
- [KN02] M.A. Kulczycka and L.J. Nachman. Qualitative and quantitative comparisons of b-spline offset surface approximation methods. *Computer-Aided Design*, 34(1) :19–26, 2002.
- [KO88] N. Kikuchi and J. T. Oden. *Contact problems in elasticity : A study of variational inequalities and finite elements*. Philadelphia : SIAM, 1988.

- 
- [KSC<sup>+</sup>94] V. Khullar, L. Salvatore, L. Cardozo, T.H. Bourne, D. Abbott, and C. Kellerher. A novel technique for measuring bladder wall thickness in women using transvaginal ultrasound. *Ultrasound Obstet. Gynecol.*, 4 :220–223, 1994.
- [LDR98] J Lambert-Diani and C. Rey. New phenomenological laws for rubber and thermoplastic elastomers. *Eur J Mech*, 1(18-6) :1027–1043, 1998.
- [LKNN10] X. Li, J.A. Kruger, M.P. Nash, and P.M.F. Nielsen. Effects of nonlinear muscle elasticity on pelvic floor mechanics during vaginal childbirth. *J Biomech Eng*, 132 :111010, 2010.
- [Luf06] J. Luft. Organ prolapse : current state of knowledge about this common condition. *Journal for Nurse Practitioners*, 2(3) :170–177, 2006.
- [Mae99] T. Maekawa. An overview of offset curves and surfaces. *Computer-Aided Design*, 31(3) :165–173, 1999.
- [Mas62] S.F. Mason. *A history of the sciences*. New York : Collier Books, 1962.
- [MBB<sup>+</sup>05] B. Messelink, T. Benson, Kari. Berghmans, B. Bø, J. Corcos, C. Fowler, J. Laycock, P.H.C. Lim, R.V. Lunsen, G.L.á. Nijeholt, J. Pemberton, A. Wang, A. Watier, and P. Kerrebroeck. Standardization of terminology of pelvic floor muscle function and dysfunction : report from the pelvic floor clinical assessment group of the international continence society. *Neurourology and Urodynamics*, 24 :374–380, 2005.
- [MMB<sup>+</sup>] F. Mouchel, J. Mouchel, J. Beco, C. Wurst, and R. Dijkstra. L’a anatomie du plancher pelvien, de l’anatomie à la biomécanique, <<http://www.gyneweb.fr/sources/chirurgie/perineo/clermont.htm>>.
- [MN11] R.N. Miftahof and H.G. Nam. *Biomechanics of the gravid uterus*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [Moo40] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11(9) :582–592, 1940.
- [MPP<sup>+</sup>07] J.A.C. Martins, M.P.M. Pato, E.B. Pires, R.M.N. Jorge, M.P.L. Parente, and T. Mascarenhas. Finite element studies of the deformation of the pelvic floor. *Ann NY Acad Sci*, 1101 :316–334, 2007.
- [NPBC08] K.F. Noakes, A.J. Pullan, I.P. Bissett, and L.K. Cheng. Subject specific finite elasticity simulations of the pelvic floor. *Journal of Biomechanics*, 41 :3060–3065, 2008.

- [OSB<sup>+</sup>97] A.L. Olsen, V.J. Smith, J.O. Bergstrom, J.C. Colling, and A. Clark. Epidemiology of surgically managed pelvic organ prolapse and urinary incontinence. *Obstet Gynecol*, 89 :501–506, 1997.
- [Pac05] A. Paccini. *Développement d'un modèle éléments finis 3D appliqué à la simulation d'opérations chirurgicales des tissus mous*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2005.
- [Par89] H. A. Parisch. Consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 28 :1803–1812, 1989.
- [PBR<sup>+</sup>09] N. Pirro, M.E. Bellemare, M. Rahim, O. Durieux, I. Sielezneff, B. Sastre, and P. Champsaur. Résultats préliminaires et perspectives de la modélisation dynamique pelvienne patient-spécifique. *Pelv Perineol*, 4 :15–21, 2009.
- [PCM<sup>+</sup>10] E. Peña, B. Calvo, M.A Martínez, P. Martins, T. Mascarenhas, R.M.N. Jorge, A. Ferreira, and M. Doblaré. Experimental study and constitutive modeling of the viscoelastic mechanical properties of the human prolapsed vaginal tissue. *Biomech Model Mechanobiol*, 9 :35–44, 2010.
- [PdPC<sup>+</sup>07] E. Peña, A.P. del Palomar, B. Calvo, M.A. Martínez, and M. Doblaré. Computational modelling of diarthrodial joints. physiological, pathological and post-surgery simulations. *Arch. Comput. Meth. Engrg*, 14(1) :1–54, 2007.
- [Pey03] F. Peyraut. Orientation preservation and Newton-Raphson convergence in the case of an hyperelastic sphere subjected to an hydrostatic pressure. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 192(9-10) :1107–1117, 2003.
- [Pey04] F. Peyraut. *Étude numérique du modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko en mécanique non-linéaire*. HDR, Université de Franche-Comté, 2004.
- [PFLR10] F. Peyraut, Z.-Q. Feng, N. Labed, and C. Renaud. A closed form solution for the uniaxial tension test of biological soft tissues. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45 :535–541, 2010.
- [PJT<sup>+</sup>09] M.P.L. Parente, R.M.N. Jorge, T.Mascarenhas, A.A. Fernandes, and J.A.C. Martins. The influence of the material properties on the biomechanical behavior of the pelvic floor muscles during vaginal delivery. *Journal of Biomechanics*, 42 :1301–1306, 2009.
- [PK08] D. Pavic and L. Kobbelt. High-resolution volumetric computation of offset surfaces with feature preservation. *Computer Graphics Forum*, 27 :165–174, 2008.

- 
- [PL01] F. Peyraut and N. Labed. Préservation de l'orientation et convergence de Newton-Raphson avec le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 10(5) :595–605, 2001.
- [PMM<sup>+</sup>11] E. Peña, P. Martins, T. Mascarenhas, R.M. Natal Jorge, A. Ferreira, M. Doblaré, and B. Calvo. Mechanical characterization of the softening behavior of human vaginal tissue. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 4 :275–283, 2011.
- [PPD08] E. Peña, J.A. Peña, and M. Doblaré. On modelling nonlinear viscoelastic effects in ligaments. *Journal of Biomechanics*, 41 :2659–2666, 2008.
- [Rah12] M. Rahim. *Caractérisation de la dynamique des déformations de contours. Application l'imagerie pelvienne*. PhD thesis, Université Aix-Marseille, 2012.
- [RBB<sup>+</sup>06] C. Rubod, M. Boukerrou, M. Brieu, P. Dubois, and M. Cosson. Biomechanical properties of vaginal tissue. part 1 : New experimental protocol. *Journal of Urology*, 178 :320–325, 2006.
- [RBB<sup>+</sup>07] C. Rubod, M. Boukerrou, M. Brieu, P. Dubois, and M. Cosson. Vers une modélisation du comportement de la cavité pelvienne. In *18ème Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, France, août 27-31 2007.
- [RBPB09] M. Rahim, ME. Bellemare, N. Pirró, and R. Bulot. A shape descriptors comparison for organs deformation characterization in mri sequences. *IEEE 16th International Conference on Image Processing*, pages 1069–72, 2009.
- [Rid76] J.H. Ridley. A composite vaginal vault suspension using fascia lata. *Am J Obstet Gynecol*, 126(5) :590–6, 1976.
- [Riv48] R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials. iv. further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241(835) :379–397, 1948.
- [RRD<sup>+</sup>11] G. Rivaux, C. Rubod, B. Dedet, M. Brieu, B. Gabriel, L. De Landscheere, P. Devos, V. Delmas, and M. Cosson. Caractérisation biomécanique des ligaments utérins. implication en statique, en pelvienne. *Pelvi-Périnéologie*, 6 :67–74, 2011.
- [RS00] M. Rüter and E. Stein. Analysis, finite element computation and error estimation in transversely isotropic nearly incompressible finite elasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 190 :519–541, 2000.

- [SH98] J. C. Simo and T. J. R. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [SK97] E.H.M. Sze and M.M. Karram. Transvaginal repair of vault prolapse : a review. *Obstet Gynecol*, 89 :466–75, 1997.
- [SL92] J. C. Simo and T. A. Laursen. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 42 :97–116, 1992.
- [SNB05] J. Schröder, P. Neff, and D. Balzani. A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity. *Int. J. Solids. Struct.*, 42 :4352–4371, 2005.
- [Spe54] A.J.M. Spencer. Theory of invariants. *Continuum Physics, Academic Press, New York*, pages 239–253, 1954.
- [Spe87] A.J.M. Spencer. *Isotropic polynomial invariants and tensor functions*. J.P. Boehler (ed.), Applications of Tensor Functions in Solids Mechanics, CISM Course No. 282, Springer Verlag, 1987.
- [SWvdE<sup>+</sup>01] L.L. Subak, L.E. Waetjen, S. van den Eeden, D.H. Thom, E. Vittinghoff, and J.S. Brown. Cost of pelvic organ prolapse surgery in the united states. *OBS-TETRICS & GYNECOLOGY*, 98 :646–651, 2001.
- [TaWH11] I. Temizer a, P. Wriggers, and T.J.R. Hughes. Contact treatment in isogeometric analysis with nurbs. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 200 :1100–1112, 2011.
- [Tay11] R.L. Taylor. Isogeometric analysis of nearly incompressible solids. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 85 :273–288, 2011.
- [TNT<sup>+</sup>05] A. Tubaro, C.D. Nunzio, A. Trucchio, G. Palleschi, and L. Miano. The effect of bladder outlet obstruction treatment on ultrasound-determined bladder wall thickness. *Reviews in Urology*, 7(6) :35–42, 2005.
- [TS02] R. Thakar and S. Stanton. Management of genital prolapse. *Br Med J*, 324(7348) :1256–1262, 2002.
- [VC96] W.M. Vannah and D.S. Childress. Indentor tests and finite element modeling of bulk muscular tissue in vivo. *Journal of Rehabilitation Research and Development*, 33 :239–252, 1996.
- [VM04] G. Varadhan and D. Manocha. Accurate minkowski sum approximation of polyhedral models. *Pacific Conference on Computer Graphics and Applications. IEEE Computer Society*, pages 392–401, 2004.

- 
- [VRRB<sup>+</sup>10] G. Venugopala Rao, C. Rubod, M. Brieu, N. Bhatnagar, and Cosson M. Experiments and finite element modelling for the study of prolapse in the pelvic floor system. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 13 :349–357, 2010.
- [WBN<sup>+</sup>04] S.T. Weiss, M. Bajka, A. Nava, E. Mazza, and P. Niederer. A finite element model for the simulation of hydrometra. *Technol Health Care*, 12 :259–267, 2004.
- [WG01] J.A. Weiss and J.C. Gardiner. Computational modeling of ligament mechanics. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 29(3) :303–371, 2001.
- [WMG96] J.A. Weiss, B.N. Maker, and S. Govindjee. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 135 :107–128, 1996.
- [Wri95] P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 2 :1–49, 1995.
- [Wri02] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*. John Wiley & Sons, 2002.
- [Yeo93] O. H. Yeoh. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chem. Technol.*, 66 :745–771, 1993.
- [YJW99] D. Yan, D.A. Jaffray, and J.W. Wong. A model to accumulate fractionated dose in a deforming organ. *International Journal :Radiation Oncology biol. Phys*, 44(3) :665–675, 1999.
- [ZBGB07] Y. Zhang, Y. Bazilevs, S. Goswami, and C. Bajaj. Patient-specific vascular nurbs modeling for isogeometric analysis of blood flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 196 :2943–2959, 2007.
- [ZFHS04] M.A. Zulliger, P. Fridez, K. Hayashi, and N. Stergiopulos. A strain energy function for arteries accounting for wall composition and structure. *J. Biomech*, 37 :989–1000, 2004.
- [Zho93] Z. H. Zhong. *Finite element procedures in contact-impact problems*. Oxford University Press, 1993.
- [ZL04] D. Zhang and G. Lu. Review of shape representation and description techniques. *Pattern Recognition*, 37 :1–19, 2004.
- [ZS93] Q.S. Zheng and A.J.M. Spencer. Tensors which characterize anisotropies. *Int. J. Engng. Science*, 31(5) :679–693, 1993.

- [ZT91] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method, fourth ed., vol. 2*. McGraw-Hill, Berkshire, UK, 1991.