

## Remerciements

A mes parents, et amis pour m'avoir soutenu (et supporté).

Merci aux personnels du laboratoire IBISC (Annie, Florent, Sylviane), à sa direction, pour m'avoir accueilli et permis de mener à bien cette thèse. Merci à mon directeur de thèse Hichem Maaref, à mon encadrant Vincent Vigneron et à Frédéric Davesne pour m'avoir accompagné et conseillé pendant quatre ans, sans jamais compter leur temps ni leur énergie.

Merci à Giuseppe Longo et Francis Bailly pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe CIM du LIENS (ENS), merci également à ses membres, dont Matteo Mossio, Boris Saulnier et Pierre-Emmanuel Tendero pour les longues discussions qui m'ont aidé à forger mes idées.

Je remercie également Jean-Louis Giavitto, Olivier Michel et Antoine Spicher de l'équipe LIS pour nous avoir invités à collaborer, V.Vigneron et moi-même.

Merci à Christian Jutten, pour m'avoir accueilli au Laboratoire Image et Signaux, en 2003-2004.

Enfin je salue mes collègues doctorants sans qui tout ça n'aurait pas été aussi drôle.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Summary</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>xi</b>
Bibliographie . . . . .	xiii
<b>Chapitre 1 Psychologie écologique et approche dynamique de la cognition</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte historique . . . . .	1
1.2 Psychologie écologique . . . . .	3
1.2.1 Rejet du paradigme dominant . . . . .	3
1.2.2 Principes de psychologie écologique . . . . .	4
1.3 Approches dynamiques de la cognition . . . . .	8
1.3.1 Positionnement philosophique . . . . .	9
1.3.2 Un spectre large de thèmes d'intérêt . . . . .	10
1.3.3 Coordination musculaire . . . . .	11
1.3.4 Développement des facultés de catégorisation . . . . .	12
1.4 Discussion . . . . .	14
Bibliographie . . . . .	16
<b>Chapitre 2 Perception sensorimotrice artificielle et affordances</b>	<b>21</b>
2.1 Contexte historique et courants influents . . . . .	22
2.1.1 De l'IA à la robotique située . . . . .	22
2.1.2 Robotique comportementale . . . . .	24
2.1.3 Neuromécanique de la locomotion . . . . .	25
2.1.4 Perspective systémique : neuroéthologie computationnelle . . . . .	27
2.2 Dépendances statistiques et invariants écologiques . . . . .	29

*Table des matières*

---

2.3	Affordances . . . . .	31
2.3.1	Définitions formelles . . . . .	32
2.3.2	Traduction opérationnelle des <i>affordances</i> . . . . .	33
2.4	Représentation de dépendances sensorimotrices . . . . .	37
2.4.1	Carte sensorimotrice pour parvenir à un but . . . . .	38
2.4.2	Causalité et réseau sensorimoteur . . . . .	42
2.5	Discussion et proposition . . . . .	45
2.5.1	Discussion . . . . .	45
2.5.2	Proposition . . . . .	47
	Bibliographie . . . . .	48
<b>Chapitre 3 Caractéristiques topologiques d'un réseau de relations probabi-</b>		
<b>listes et statistiques</b>		<b>55</b>
3.1	Liaison probabiliste et statistique entre variables . . . . .	56
3.1.1	Liaison linéaire . . . . .	57
3.1.2	Dépendance statistique non linéaire . . . . .	60
3.2	Organisation des relations de dépendance, représentations et caractérisations	68
3.2.1	Propriétés des matrices aléatoires . . . . .	69
3.2.2	Propriétés des graphes aléatoires . . . . .	70
3.2.3	Relations $n$ -aires, complexes simpliciaux et caractérisation topolo- gique . . . . .	76
3.2.4	Application : classification de source et de comportement . . . . .	85
3.3	Illustrations numériques . . . . .	87
3.3.1	Implémentation . . . . .	88
3.3.2	Liaison statistique entre variables . . . . .	88
3.4	Propriétés des matrices et graphes aléatoires . . . . .	98
3.4.1	Classification de sources . . . . .	101
3.4.2	Propriétés spectrales des matrices d'information mutuelle . . . . .	103
3.4.3	Propriétés des graphes . . . . .	109
3.5	Relations d'ordre supérieur et homologie simpliciale . . . . .	114
3.6	Conclusions, perspectives . . . . .	118
3.6.1	Bilan . . . . .	118
3.6.2	Perspectives . . . . .	121
	Bibliographie . . . . .	126

---

<b>Chapitre 4 Applications en robotique mobile</b>	<b>131</b>
4.1 Protocoles . . . . .	132
4.1.1 Simulateurs . . . . .	132
4.1.2 Robot, capteurs et effecteurs . . . . .	133
4.1.3 Classification supervisée . . . . .	133
4.1.4 Classification non supervisée . . . . .	136
4.2 Résultats . . . . .	136
4.2.1 Classification supervisée . . . . .	141
4.2.2 Classification non supervisée . . . . .	143
4.3 Discussion et perspectives . . . . .	144
4.3.1 Discussion . . . . .	144
4.3.2 Perspectives . . . . .	144
Bibliographie . . . . .	145
<b>Chapitre 5 Approches multiéchelles pour l'autonomie en robotique</b>	<b>147</b>
5.1 Défaut d'adaptativité : propositions d'explications . . . . .	149
5.1.1 Schémas et adaptativité . . . . .	150
5.1.2 Extrémalité . . . . .	152
5.1.3 Discussion . . . . .	154
5.2 Le cas du coeur en Biologie Systémique . . . . .	154
5.3 Méthodes mathématiques multiéchelles . . . . .	157
5.3.1 Agrégation . . . . .	158
5.3.2 Méthode des échelles multiples . . . . .	159
5.3.3 Discussion . . . . .	159
5.4 Discussion et perspectives . . . . .	160
5.4.1 Perspectives . . . . .	161
Bibliographie . . . . .	162
<b>Conclusions</b>	<b>165</b>
<b>Annexe</b>	<b>169</b>
Bibliographie . . . . .	170

## Résumé

Nous posons dans cette thèse le problème suivant : comment un robot peut-il estimer si une tâche qu'il doit exécuter est réalisable ou pas dans un environnement donné ? Après avoir rappelé des principes et résultats établis par la psychologie écologique et les approches dynamiques de la cognition, nous reformulons la question en termes d'*affordances* accessibles au robot et passons en revue des implémentations de ce concept dans le champ de la robotique.

En examinant des exemples pris en dehors de ces domaines et tirés de la neuroéthologie et de la neuromécanique nous parvenons aux deux conclusions suivantes : d'abord, prédire les comportements admissibles d'un robot dans un environnement réel nécessite une approche systémique partant des niveaux les plus fins (e.g. activité des neurones formels) jusqu'aux niveaux les plus élevés (dimensions caractéristiques de l'environnement, interactions entre individus). Ensuite, il n'existe pas à notre connaissance de formalisation complète de ce problème, ni donc de solutions connues. A ces deux arguments limitant la connaissance d'un observateur extérieur, nous ajoutons que, même si elles étaient disponibles, elle ne permettraient pas de répondre au problème de leur acquisition par un robot ignorant tout de sa propre dynamique et de celle de l'environnement.

Pour ces raisons nous nous tournons ensuite vers une restriction du problème initial : comment un robot peut-il décrire son interaction avec l'environnement, l'encoder sous forme de caractéristiques numériques, et finalement partitionner l'ensemble des caractéristiques en classes discrètes ? En analysant les travaux qui transposent en robotique les *affordances* de Gibson nous constatons une prédominance des approches statistiques. Plusieurs de leurs limites sont soulevées concernant les relations entre dépendances statistiques locales et régime global de l'interaction sensorimotrice, les types de dépendance statistique considérés, la prise en compte des relations d'ordre supérieur.

Nous assimilons le robot à un réseau sensorimoteur aléatoire, et pour représenter son activité nous introduisons des mesures de dépendance probabilistes et statistiques (e.g. information mutuelle). Ces mesures de dépendance nous permettent de construire des matrices, graphes et complexes simpliciaux aléatoires dont nous étudions les propriétés, telles que le spectre, la connectivité et l'homologie.

Puis nous proposons une série d'expériences réalisées sur un robot mobile simulé, autour de la capacité de pousser les objets de l'environnement. Nous mettons ainsi en évidence l'intérêt des outils proposés, dans le cadre de tâches de classification supervisée

## *Résumé*

---

et non supervisée.

Enfin nous étendons notre réflexion à la thématiques de l'autonomie, et faisant référence aux propriétés de stabilité et de plasticité des systèmes vivants. Nous passons en revue quelques propriétés des systèmes vivants énumérées dans le champ de la morphogénèse et soulignons l'intérêt des approches multiéchelles. Nous donnons pour exemple le cas du coeur et présentons les outils mathématiques associés à ces études, en concluant sur les perspectives offertes en robotique autonome par ces pistes de recherche.

## Summary

Suppose that a mobile robot is asked to follow walls, in an environment that lacks any obstacle. How can the robot decide whether there is a rationale for pursuing that aim, given the conditions? Starting from those questions of practical importance for roboticists, we ask what are the possibility for a robot to take action in a given environment, and how to encode these possibilities?

To answer we look for support in cognitive sciences and more particularly in ecological psychology, founded by the theory of J.J.Gibson, and on many further developements, experimental validations and mathematical formalization linked to the dynamical approach to cognition.

The roboticist willing to adopt this point of view may ask : how can one the concepts from ecological psychology can be made operational, and what is their advantage over more traditional approaches in robotics? Are predictive results available (e.g. can we predict if a legged robot can walk in a given environment)? Several fields in the litterature are associated to these questions, from neuromechanics og locomotion to ecological robotics. We conclude however that modelling alone does not provide satisfactory answers so far.

We then review implementation proposals for affordances, and remark the importance of statistics to do so. We raise some limits of existing descriptions : how local statistical dependencies and global pattern of activity are related, how local dependencies are defined, how higher order dependencies are taken into account. We propose to identify the robot with a random sensorimotor network, and describe its activity thanks to probabilistic and statistical measures of dependence (e.g. mutual information). They allow us to build random matrices, graphs and simplicial complexes which properties we study, such as their spectrum, connectivity and homology.

Then we propose experiments with a simulated wheeled robot to learn statistically to discriminate between pushable and non pushable objets of the environment, in a supervised and unsupervised manner.

Finally we extend our reflexion to the question of autonomy, referring to stability and plasticity of living systems. We review definitions given in morphogenesis, then give examples of multiscale studies in the heart, and discuss mathematical tools available for that purpose, in the perspective of extending robots' autonomy.

*Summary*

---

## Introduction

Supposons qu'un robot mobile se trouve sur un plan sans obstacles, et que son algorithme de commande consiste à suivre les murs. Comment le robot peut-il estimer si la tâche imposée est réalisable ou non, pour l'abandonner et en choisir une autre le cas échéant ? A partir de ces questions d'importance pratique pour le roboticien, nous posons dans cette thèse le problème suivant : comment un robot peut-il estimer si une tâche qu'il doit exécuter est réalisable ou pas dans un environnement donné ?

Des problèmes similaires sont rencontrés en robotique, à propos de la capacité pour un robot de traverser un lieu dans une direction donnée, de saisir un objet, de faire rouler un objet dans une direction fixée [4, 10, 9, 3]. Ces travaux s'inspirent des Sciences Cognitives et plus précisément du courant de la psychologie écologique, fondé par les travaux de J.J. Gibson. Celui-ci s'appuie sur une théorie, mais aussi sur de nombreuses validations expérimentales ainsi que des formalisations mathématiques, et une parenté étroite avec les approches dynamiques de la cognition dont nous rappelons les principes et résultats expérimentaux au chapitre 1.

Pour le roboticien, plusieurs questions se posent :

- comment donner aux concepts tirés de ces disciplines une traduction opérationnelle ? Comment transposer la notion d'*affordances* à l'aide des outils classiques accessibles aux roboticiens ?
- quel est leur apport au regard des méthodes classiques déjà disponibles en robotique autonome ?
- dispose-t-on de résultats prédictifs ? (e.g. peut-on prédire si un robot muni de pattes peut s'acquitter d'une tâche simple de locomotion dans un environnement donné ?).

De la même manière que les *affordances* admettent plusieurs expressions [1], elles supportent plusieurs formalisations et implémentations dans le champ de la robotique que nous passons en revue au cours du chapitre 2.

La question de la prédiction évoquée ci-dessus nous amène à séparer deux points de vue complémentaires. D'une part, le regard posé par un observateur extérieur sur le système robot/environnement, d'autre part, celui -subjectif- du robot. De son point de vue, l'observateur peut légitimement demander quel est l'ensemble des actions accessibles au robot, étant donné le type de ses capteurs, de ses effecteurs et de sa loi de commande, mais aussi en fonction de la nature de l'environnement (e.g. la taille caractéristique des obstacles, la fixité dans le temps, etc...). Pour répondre nous nous appuierons sur plu-

siens exemples tirés de la neuroéthologie et de la neuromécanique de la locomotion. Nous montrerons la nécessité d'une approche systémique pour modéliser le comportement d'un artefact mobile complexe dans un environnement réel. Nous en présenterons des exemples, soulignerons leur apport et cernerons leurs limites.

Adopter au contraire le point de vue subjectif, c'est s'interroger sur les possibilités et limites de l'apprentissage des actions qu'un robot peut réaliser. Dans cette perspective, le robot ne connaît pas ses propres constituants, les lois physiques qui les régissent, ni la structure de l'environnement. Or, comme on l'a rappelé, ces connaissances sont nécessaires pour modéliser et prédire les comportements possibles. De quels résultats dispose-t-on alors ? Plusieurs chercheurs s'intéressent aux capacités d'apprentissage par un robot de son propre système sensorimoteur [2, 6] dans une perspective de commande et de réalisation d'un objectif préassigné.

Pour concilier les trois idées principales développées jusqu'ici nous nous tournons ensuite vers une restriction du problème initial. Comment un robot peut-il :

- (i) découvrir les interactions qu'il est capable d'entretenir avec l'environnement ?
- (ii) les encoder sous forme de caractéristiques numériques ?
- (iii) partitionner l'ensemble de ces caractéristiques en classes discrètes ?

Cette formulation du point de vue subjectif nous suggère de nous tourner vers les formalisations statistiques, dont nous constatons par ailleurs la prédominance parmi les transpositions en robotique des *affordances*. Nous en discutons les avantages et limites : comment rendent-elles compte des relations de dépendances locales entre deux capteurs proches, ou entre un capteur et un effecteur ? Comment se structurent au niveau global les relations sensorimotrices locales ? Quelle nature de dépendances est prise en compte ?

Dans le champ des Systèmes Complexes se développe une vaste littérature ayant pour objets les grands réseaux aléatoires, et dont on trouve des exemples pour décrire un large spectre de phénomènes, depuis l'ensemble des réactions formant le métabolisme d'une bactérie jusqu'au réseau Internet. Plusieurs chercheurs adoptent cette perspective en robotique [7, 8, 5]. Notre contribution originale consiste d'une part à employer ces graphes pour tenter de répondre aux questions soulevées pour l'apprentissage des *affordances* et d'autre part à en proposer une amélioration, notamment par la prise en compte, l'encodage et la caractérisation homologique des relations d'ordre supérieur.

Notre parti pris est d'assimiler le robot -constitué d'un grand nombre d'unités dépendantes les uns des autres- à un réseau sensorimoteur aléatoire. Son activité définie par un ensemble (plus ou moins vaste) de mesures capteurs est traduite sous la forme d'une structure aléatoire (au moyen des outils décrit par le chap. 3) plus simple qui résume cette activité. Celles-ci nous permettent de construire des matrices, graphes et complexes simpliciaux aléatoires dont nous étudions les propriétés, telles que le spectre, la connectivité et l'homologie. Nous évaluerons la possibilité d'associer un type d'interaction du robot à un réseau aléatoire, et à ses propriétés topologiques globales.

Puis, afin de valider l'intérêt de ces outils pour l'étude des actions réalisables par un robot dans un environnement donné, nous proposons au chap. 4 une série d'expériences réalisées sur un robot mobile simulé, autour de la capacité de pousser les objets de l'environnement. L'ensemble de ces actions réalisables est partitionné au moyen de classificateurs (supervisés ou non). Enfin nous étendons notre réflexion à la thématique de l'autonomie au cours du chapitre 5, en faisant référence aux propriétés de stabilité et de plasticité des systèmes vivants. Nous comparerons les propriétés des systèmes robotiques courants avec celles des systèmes vivants en s'appuyant sur des concepts empruntés à la morphogenèse (e.g. l'adaptativité), et aux approches multiéchelles du vivant, dans le cas particulier du coeur. Afin de rassembler les outils nécessaires à notre projet de recherche, nous présentons des outils mathématiques associés à ces études, en concluant sur les perspectives offertes en robotique autonome.

## Bibliographie

- [1] E. Şahin, M. Cakmak, M.R. Dogar, E. Ugur, and G. Ucoluk. To afford or not to afford : A new formalization of affordances towards affordance-based robot control. *Adaptive Behavior, in press*, pages –, 2007.
- [2] Pierce D. and Kuipers B.J. Map learning with uninterpreted sensors and effectors. *Artificial Intelligence*, 92(1) :169–227, 1997.
- [3] P. Fitzpatrick, G. Metta, L. Natale, S. Rao, and G. Sandini. Learning about objects through action : Initial steps towards artificial cognition. In *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'03)*, 2003.
- [4] D. Kim, J. Sun, S.M. Oh, J.M. Rehg, and A.F. Bobick. Traversability classification using unsupervised on-line visual learning for outdoor navigation. In *Proceedings of IEEE 2006 International Conference on Robotics and Automation*, Orlando, Florida, 2006.
- [5] M. Lungarella and O. Sporns. Mapping information flow in sensorimotor networks. *PLoS Computational Biology*, 2(10), 2006.
- [6] L. Olsson, C.L. Nehaniv, and D. Polani. Sensory channel grouping and structure from uninterpreted sensor data. In *NASA/DoD Conference on Evolvable Hardware (EH'04)*, 2004.
- [7] A.K. Seth. Causal connectivity analysis of evolved neural networks during behavior. *Network : Computation in Neural Systems*, 16(1) :35–55, 2005.
- [8] O. Sporns, J. Karnowski, , and M. Lungarella. Mapping causal relations in sensorimotor networks. In *Proc. of the 5th Int. Conf. on Development and Learning*, 2006.

*Bibliographie*

---

- [9] A. Stoytchev. Toward learning the binding affordances of objects : A behavior-grounded approach. In *Proceedings of AAAI Symposium on Developmental Robotics*. Stanford University, 2005. March.
- [10] Emre Ugur, Mehmet R. Dogar, Maya Cakmak, and Erol Sahin. The learning and use of traversability affordance using range images on a mobile robot. In *Proceedings of IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation (ICRA 07)*, April 2007.

# Chapitre 1

## Psychologie écologique et approche dynamique de la cognition

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte historique</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Psychologie écologique</b>	<b>3</b>
1.2.1	Rejet du paradigme dominant	3
1.2.2	Principes de psychologie écologique	4
<b>1.3</b>	<b>Approches dynamiques de la cognition</b>	<b>8</b>
1.3.1	Positionnement philosophique	9
1.3.2	Un spectre large de thèmes d'intérêt	10
1.3.3	Coordination musculaire	11
1.3.4	Développement des facultés de catégorisation	12
<b>1.4</b>	<b>Discussion</b>	<b>14</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>16</b>

---

Ce chapitre met en regard différents travaux dont le thème principal est la perception sensorimotrice. Ces travaux appartiennent d'abord au domaine de la psychologie écologique (§1.2) préoccupée par l'explication des phénomènes perceptifs chez l'animal en général et l'homme en particulier. D'autres concernent ensuite l'approche dynamique de la cognition (§1.3).

Il constitue une introduction au chapitre 2 dédié aux travaux en perception sensorimotrice artificielle souvent inspirés par les courants d'idées évoqués ici ; néanmoins il ne prétend pas à l'exhaustivité.

### 1.1 Contexte historique

Le terme de "sciences cognitives" recouvre un ensemble de disciplines séparées dans le contexte académique traditionnel, mais qui s'est constitué en champ incluant aujourd'hui

la linguistique, la neurobiologie de l'apprentissage, la psychologie expérimentale et l'informatique. L'objet commun des scientifiques impliqués dans cet effort interdisciplinaire est la compréhension des "facultés supérieures" des organismes vivants, terme vague recouvrant aussi bien la perception, l'action, les phénomènes de plasticité, d'apprentissage, de mémoire que ceux ayant trait aux capacités langagières des êtres vivants.

Ces disciplines se sont progressivement agrégées en champ dans la seconde moitié du vingtième siècle et furent profondément inspirées par les développements aussi bien scientifique que technique de l'ordinateur. Ce paradigme, rapidement devenu dominant, fournit alors aux scientifiques une métaphore de choix -celle de la machine à états discrets- pour expliquer les phénomènes de cognition, bien qu'elle fût critiquée par le fondateur de l'informatique et de la théorie de la calculabilité moderne lui-même, Alan Turing (cf [17]).

Ses ramifications s'étendent aujourd'hui dans de nombreuses disciplines formant un ensemble cohérent, de la philosophie à la psychologie en passant par la neurophysiologie. En philosophie de l'esprit, par exemple chez Fodor, les états mentaux sont des représentations internes exprimées dans un langage de l'esprit, le Language Of Thought (LOT) et les processus mentaux découlent alors d'un calcul opérant sur ces représentations en respectant une certaine syntaxe. A la suite de la naissance de l'Intelligence Artificielle, une branche de la psychologie ("Information Processing Psychology") prend son autonomie par rapport au béhaviorisme et à la Gestalt-théorie en psychologie, et à la neurologie de l'époque. Pour ses défenseurs, parmi lesquels Newell, Simon et Minsky, comme le traitement de l'information peut être réalisé par différents systèmes physiques, l'esprit est indépendant de sa réalisation particulière dans un cerveau biologique ce qui autorise une simulation du fonctionnement de l'esprit sur ordinateur (cf [8, §5.5]). En vision ce paradigme fut principalement défendu par Marr, fondateur des neurosciences computationnelles. Pour lui, un ensemble de traitements à partir du signal produit par la rétine en deux dimensions mène à une représentation interne en trois dimensions. Enfin en neurophysiologie les idées précédentes se superposent à la théorie de Pavlov d'une part, et à l'influence croissante de la cybernétique (téléologie vue comme commande avec *feedback*, cf [22]) et perdurent aujourd'hui encore : les organes sensoriels fournissent une information imparfaite que le système nerveux central enrichit et reconstruit à l'aide de nombreux algorithmes de traitement de l'information, pour élaborer une représentation interne complexe, allo ou ego-centrée. Celle-ci est alors mise à profit pour commander les différents effecteurs dont dispose l'organisme, au besoin en réduisant le nombre de degrés de liberté par agrégation de variables (cf [4, chap.6]). Le changement ainsi produit donne lieu à une réactualisation des données des capteurs, qui entraîne des nouveaux calculs, et ainsi de suite

Notre propos ici n'est pas de discuter en détail la généalogie des différents courants dominants associés au courant computationnel, mais de souligner par contraste certaines sources d'inspiration influentes des travaux sur lesquels nous nous pencherons au cours du chapitre 2 dont la psychologie écologique abordée dans la section §1.2.

## 1.2 Psychologie écologique

La psychologie écologique [12, 19] est née des travaux de J.J.Gibson en réaction au béhaviorisme. Elle constitue aujourd'hui un domaine autonome et influent en psychologie contemporaine, et constitue une source d'inspiration pour de nombreux travaux de perception artificielle. Nous consacrons la section §1.2.2 à l'énumération de ses principes fondateurs.

### 1.2.1 Rejet du paradigme dominant

Vus par les fondateurs de cette école de pensée, les travaux classiques -qu'ils soient par exemple béhavioristes ou gestaltistes- forment un tout homogène, unis au moins par un dénominateur commun : leur conception des rapports entre perception et action dans le monde animal héritée de Descartes pour qui ces deux composantes sont distinctes. L'action est reléguée à un statut subalterne, et dépend causalement de l'information fournie par la perception, avant qu'un acte ne puisse être accompli. Les théories dominantes diffèrent par le détail de leur formulation mais font toutes intervenir trois instances : la perception qui collecte passivement des informations, un système de décision central qui délibère, et des effecteurs qui mènent à bien les plans conçus au niveau précédent.

Les objections initialement soulevées par le courant écologique découlaient du programme de Bernstein (cf [31]) parmi lesquelles celle du nombre de degré de liberté  $n$  que devrait réguler un éventuel contrôleur centralisé. Estimé à plus de 100 pour le corps humain, il dépassait les capacités des algorithmes connus quand Bernstein écrivait. Les procédures de réduction du nombre de dimensions par l'intermédiaire de variables réduites suggérées en réponse soulèvent elles-mêmes de nouvelles questions, entre autres comment sont décidés les regroupements de variables ? Sont-ils fixes, ou sont-ils paramétrables ? Et dans ce cas, les paramètres en question ne forment-ils pas de nouveaux degrés de liberté, ce qui annule les réductions obtenues précédemment ? Une autre objection aux théories du contrôle centralisé avec ou sans *feedback* est celle de l'indétermination : si plusieurs<sup>1</sup> configurations distinctes du système permettent d'obtenir le même résultat final, comment les choisir ? Cette sous-détermination crée elle-même de nouveaux degrés de liberté et nous ramène au problème précédent.

Ces arguments sont cependant anciens, pour cela nous renvoyons à [29] pour une revue des débats actuels et des formalismes proposés pour expliquer la variabilité des mouvements naturels orientés vers un but, et la formation de synergies entre les différents muscles impliqués. Dans la suite nous abandonnons les critiques formulées par le courant écologique à l'encontre des courants concurrents et passons en revue quelques uns de ses principes fondateurs.

---

<sup>1</sup> voire une infinité.

## 1.2.2 Principes de psychologie écologique

Pour Gibson, le système d'étude du psychologue ne doit pas être l'animal isolé, mais l'ensemble animal/environnement (cf §1.2.2.1). Il stigmatise en cela la conception dominante de l'animal comme système d'extraction imparfait des attributs de l'environnement, et sa conséquence directe. En effet, cette posture conduit à concevoir des expériences plaçant l'animal dans des conditions artificielles pour éprouver sa capacité à isoler tel ou tel trait saillant.

Ce choix du système d'étude annonce une méthode plus générale, qui tend à reconsidérer les partitions classiques en psychologie du système global en sous-système étudiés isolément, en négligeant l'influence de certains couplages. Ce questionnement appliqué à différentes échelles le conduit à rejeter la séparation classique entre l'action et la perception (§1.2.2.4, à redéfinir la notion d'information en terme de possibilité d'action (§1.2.2.3) pour un animal donné, sensible aux propriétés physiques d'un environnement donné (§1.2.2.2). Puis de manière plus concrète, à considérer le mouvement des muscles non pas comme la réponse à une commande, mais comme la contribution à une activité d'ensemble coordonnée de muscles (cf §1.2.2.4).

### 1.2.2.1 Dualité animal/environnement

La doctrine de la psychologie écologique se caractérise d'abord par le constat objectif (i.e. formulé en dehors de toute référence à un observateur ou à une théorie particulière) de la dépendance mutuelle de l'animal et de son environnement. Cette affirmation se double d'un constat d'ordre épistémologique : les autres courants dominants de la psychologie négligent le couplage entre l'animal et son environnement et se contentent d'étudier sa réaction lorsqu'on le soumet à différents stimuli, sans se préoccuper de leur plausibilité :

« not only has psychology implicitly treated animal and world as independent entities, but it has limited investigation almost exclusively to the animal. Research begins with stimuli and ends with motor responses » [19, p.14]

A l'inverse, partant du principe que n'importe quel animal ne peut mener une activité de perception dans n'importe quel environnement, Gibson et ses collègues tentent de formaliser la nature de cette codépendance. Cette option se traduit naturellement par une contrainte, le refus du psychologue écologique de considérer ces deux parties comme des acteurs distincts de la théorie lors de son examen des faits expérimentaux. Il s'ensuit que l'étude de la "perception directe" est celle du processus menant l'animal à la connaissance de son environnement. On décrit dans la suite la spécification des termes (vagues) de "perception" ou "connaissance de l'environnement" via la notion d'"information".

### 1.2.2.2 Invariants

Pour cela la psychologie écologique se tourne vers les phénomènes physiques mis en jeu au cours de l'activité de perception, par exemple dans le cas de la vision, l'émission, la

réflexion et la diffusion des rayons lumineux par les surfaces des objets et échantillonnés par l'oeil. Elle pose ensuite une question fondamentale : comment les objets de l'environnement peuvent-ils être perçus comme constants et conserver leur unité apparente alors que de nombreuses transformations physiques devraient intuitivement les faire apparaître comme distincts ou leur faire perdre leur unité<sup>2</sup> (e.g. changements de luminosité, occultation partielle, changement de point de vue, de vitesse, etc...). Cette question se reformule alors comme suit : quelle est la classe de transformations du signal physique provenant de l'objet telle qu'il soit toujours perçu comme un tout ?

L'explication avancée procède d'une conception relativiste : les grandeurs physiques varient considérablement, et n'ont pas d'importance en elles-mêmes. Cependant les rapports entretenus par les différentes grandeurs physiques possèdent une structure particulière qu'il convient d'étudier. Plus précisément, deux types d'invariants sont distingués :

- les invariants "structurels" sont constitués par des propriétés physiques dont les rapports sont constants pour les transformations usuelles (soit par exemple un triangle vu depuis différentes distances ; on se persuade facilement que les rapports entre les longueurs de ses différents côtés restent constants).
- les invariants "transformationnels" concernent les *types* de variation des signaux dépendants du temps, qu'on peut regrouper en classes d'équivalence. L'exemple pris dans [19] est celui de l'effet Doppler : tous les objets qui s'approchent -resp. s'éloignent- de l'animal en émettant un son stationnaire voient celui-ci altéré de la même manière (i.e. décalage du spectre vers les plus hautes -resp. plus basses-fréquences).

Ces principes souffrent d'indétermination, comme le remarquent Michaels & Carello, car une spécification précise des classes de signaux physiques, et de leurs transformations qui permettrait de fonder expérimentalement ces propositions n'est pas disponible, pas plus que la géométrie<sup>3</sup> adaptée aux transformations des objets invariants par les systèmes perceptifs.

Des contraintes supplémentaires sont fournies par l'exigence de compatibilité entre l'animal et son environnement, comme on le voit dans la section suivante.

### 1.2.2.3 Affordances

La sensibilité de l'animal à un signal physique donné est d'abord corrélée à la sensibilité de son corps à une gamme de signaux particulière, laquelle varie d'un animal à l'autre. D'autre part, la rencontre entre un animal et un ensemble de signaux organisés dépend du comportement de l'animal, qui permet ou pas (*'afford'*) d'exposer l'animal à ces signaux dans l'environnement.

<sup>2</sup> ce problème est distingué de celui de la "constance perceptive" où des changements importants du stimulus *proximal*, et non pas *distal*, ne sont pas perçus

<sup>3</sup> pour une discussion de ce sujet via le programme d'Erlangen de Klein en géométrie, dans le cas de la constance de forme, voir [19, p.30-37]

Ceci amène les psychologues écologiques à prendre en compte l'acte corrélé à la perception d'un objet, ainsi que les possibilités offertes par l'environnement pour que l'animal en question réalise ce comportement. La situation type illustrant une "compatibilité" entre l'animal et son environnement est codifiée par Shaw, Turvey et Mace comme suit :

« a situation or event X affords action Y for animal Z on occasion O if certain relevant mutual compatibility relations between X and Z obtain » [26, p.196]

La notion d'*affordance*, vue comme le comportement permis à l'animal par l'environnement, remplace même le stimulus classique dans les théories de la perception : l'animal ne perçoit pas les stimuli, mais les *affordances*<sup>4</sup>.

L'enjeu est alors de formaliser l' "utilité" de l'environnement pour un animal. Une manière indirecte de caractériser cette utilité à défaut de la définir précisément repose sur les conséquences de la présence d'un objet dans l'environnement : si l'objet ne change rien au comportement de l'animal, alors il ne permet pas de fonder une *affordance*<sup>5</sup>.

Ces propositions théoriques furent confirmées par la suite grâce aux expériences de Warren (cf [33]) : dans un premier temps un modèle biomécanique simule la marche d'un homme dans un escalier en variant le rapport entre la taille du sujet et la taille des marches de l'escalier. Le modèle prédit que pour une valeur précise  $\Pi_c$  du rapport  $\Pi = R/L$  entre la hauteur des marches  $R$  et la longueur de la jambe du sujet  $L$ , le sujet ne marche plus dans l'escalier, mais grimpe à l'aide de ses quatre membres. D'autre part selon le modèle, il existe une valeur optimale  $\Pi_0$  de ce rapport du point de vue de la consommation énergétique du sujet. Cette première série d'expériences ne démontre pas l'existence des *affordances*, mais souligne l'importance non pas des longueurs caractéristiques absolues mais des rapports (sans dimension) entre les grandeurs caractéristiques du sujet et celles de son environnement. L'apport déterminant de Warren réside dans l'étude de l'observation visuelle par des sujets de plusieurs escaliers, dont les hauteurs de marche varient. Si on leur demande dans un premier temps quels escaliers sont susceptibles d'être gravés en marchant, et lesquels seront les plus confortables à gravir les sujets retrouvent spontanément le seuil critique  $\Pi_c$  prédit par le modèle biomécanique par simple inspection visuelle, mais aussi le rapport  $\Pi_0$  qui optimise leur consommation d'énergie. Nous disposons donc de preuves expérimentales que les sujets peuvent catégoriser les possibilités d'action compatible avec leur propre corps (cf [34] pour d'autres exemples).

#### 1.2.2.4 Collectifs musculaires

D'autres travaux ont examiné les *affordances* du point de vue plus précis du comportement de collectifs musculaires [16, 13]. Leurs activités dépendent d'une part les unes des autres de sorte que leur activité d'ensemble soit cohérente et d'autre part des *affordances* offertes par l'environnement. Ces collectifs sont des groupes de muscles non nécessairement

<sup>4</sup> "it is the affordance that is perceived" [19, p.42]

<sup>5</sup> "structured energy is information only if it can have consequences sooner or later on the acts that an animal executes" [19, p.46]

reliés mécaniquement, qui agissent comme une "unité fonctionnelle", ou pour reprendre les termes de Kugler et Turvey :

« aggregate of skeletomuscular variables are linked to act as a functional unit or collective (...) not commands but constraining patterns of facilitation and inhibition on spinal brainstem interneurons » [16]

Cette définition soulève de nombreuses questions :

- comment se caractérise l'activité d'un "collectif musculaire", i.e. qu'est-ce qui définit ce collectif en tant qu'unité ?
- quelles contraintes dues aux *affordances* sont subies par le collectif, mais également de la part d'autres collectifs, ou encore en relation avec d'autres variables telles que le métabolisme de l'animal ?

La question de la caractérisation de l'activité d'ensemble -comment sait-on qu'un ensemble de muscle forme un "collectif musculaire" ?- trouve une première réponse dans les textes de base de psychologie écologique, via des instances, comme celle de la locomotion. Pour Michaels et Carello, les relations qu'entretiennent les activités des muscles les unes avec les autres sont organisées, et ce qui fonde la constance de cette organisation est le rapport de leurs activités électriques, qui reste constant dans diverses circonstances telle que la modification de la vitesse d'ensemble de la locomotion<sup>6</sup>.

Concernant les contraintes mutuelles exercées entre les affordances et l'activité des collectifs, la posture écologique se différencie de la division classique entre perception et action, la seconde étant fonction du résultat de la première. Ici, l'existence même d'une activité coordonnée d'un collectif musculaire définit -à la manière d'un problème inverse- un ensemble de signaux physiques susceptibles de perturber l'activité du collectif. En prenant l'exemple de l'expansion du flot optique à l'approche d'un objet :

« to describe information (optical expansion) for an act (approaching) is to imply a muscular organization that the information constrains. To describe the muscular coordination of an act is to imply some sort of energy pattern that can constrain it. By such an analysis, information and the existence (and coordination) of the muscle collective are coimplicative » [19, p.49]

Il apparaît donc que la relation entre coordination d'un collectif musculaire et signaux produits par l'environnement n'est pas considérée ici comme une contrainte de la "perception" sur l'"action", mais comme le produit d'une adéquation, d'une codétermination entre l'activité collective et l'environnement. Le point crucial pour l'approche écologique est l'absence d'une instance externe au collectif de muscles qui régit son activité.

Pour étayer ces réponses partielles et faire reposer la théorie sur une base plus formalisée, des chercheurs comme Kugler et Turvey ont proposé de tirer parti des résultats de thermodynamique des phénomènes hors-équilibre, fondée sur les structures dissipatives mises en avant par Prigogine et al. Cette posture offre aux moins deux avantages : d'une

<sup>6</sup> "the ratio of their electrical activity does not change, regardless of the speed of locomotion" [19, p.147], voir aussi [30, p.568]

part elle se passe d'une instance de contrôle centralisé qui régit l'ensemble des activités, avec ou sans feedback, et s'affranchit ainsi de l'objection du "degree of freedom" formulé par Bernstein. D'autre part pour expliquer la constitution spontanée de collectifs elle s'appuie sur les théories de l'auto-organisation, amplement développées dans la littérature spécialisée. Nous ne nous étendons pas ici sur le sujet, qu'on abordera de nouveau au chapitre 5.

D'autres arguments appuyant la réduction du nombre de degrés de liberté sont fournis par les expériences de Lee et Reddish [9] sur le plongeon dans la mer des fous de bassan ('gannet') à la recherche de nourriture. En tentant d'expliquer le mécanisme conduisant au repliement des ailes de cet oiseau, les chercheurs ont passé en revue nombre de variables telles que la vitesse ou l'altitude, ainsi que des fonctions de ces variables. Cependant la valeur d'une unique variable suffit à prédire l'instant de repliement des ailes avant la plongée. En effet le temps avant impact  $\tau$  (ou TC, *time to contact*), calculable d'après le seul flot optique projeté sur la rétine, dépasse une valeur seuil à l'instant précis où se replient les ailes, dans de nombreuses conditions expérimentales. La conclusion tirée de ces expériences est que, bien qu'un grand nombre de variables sensorielles microscopique soient impliquées dans le comportement de l'oiseau, une seule variable *macroscopique* tirée du flot optique suffit à donner une équation phénoménologique du comportement.

Des études plus récentes (cf [2] pour une revue) des mouvements d'interception rapide ont relativisé le rôle exclusif de  $\tau$  mais sans remettre en cause son importance prédominante<sup>7</sup>. La génération suivante de modèles phénoménologiques (i.e. qui rendent compte des comportements observés mais sans expliquer leurs causes) tirent parti d'une part de l'intérêt écologique pour l'information disponible pour l'animal dans son environnement, et d'autre part des outils de la théorie de la commande tels que l'étude des systèmes dynamiques non linéaires plus proches de la biologie cybernétique. Les modèles actuels de mouvement d'interception reprennent à leur compte ces idées mais dépassent les seuls aspects comportementaux pour mettre au jour leurs causes anatomiques, neurophysiologiques et biomécaniques.

### 1.3 Approches dynamiques de la cognition

En réaction à la prédominance du paradigme du calcul et de la machine à états discrets pour expliquer les phénomènes cognitifs, un courant s'est développé au cours des années 80 et 90 autour des modèles empruntés à la théorie des systèmes dynamiques. Quoique distincts du champ de la psychologie écologique, il lui est étroitement lié, par exemple à cause de la présentation originale de la distinction entre perception et action, qui ne donne pas la préférence causale à l'un ou l'autre. Il se subdivise en plusieurs domaines (§1.3.2), certains consacrés à des sujets classiques en sciences-cognitives tels que le langage

---

<sup>7</sup> "However, the evidence for the use of TC [time-to-contact] information in the timing of interceptive action is very strong, even though it is unclear in what form this information is perceived" [2, p.1513]

ou la catégorisation perceptive, d'autres plus spécifiques aux problèmes de coordination (§1.3.3), d'autres enfin aux questions de catégorisation perceptive (§1.3.4).

### 1.3.1 Positionnement philosophique

L'approche dynamique de la cognition s'est construite au cours des années 80 et 90 en opposition au paradigme computationnel dont l'hypothèse principale est que les être vivants dotés de capacités cognitives sont assimilables à des machines à états discrets. A l'opposé, l'approche dynamique les assimile à des systèmes dynamiques plus généraux que la machine à états discrets -qui elle-même fait partie d'une classe particulière de systèmes dynamiques, à temps et états discrets.

A première vue, ce domaine se distingue des travaux computationnels classiques par son usage d'une partie (réduite) de la théorie des systèmes dynamiques. Cette branche des mathématiques est intéressée, de manière très générale, par les transformations  $f : M \rightarrow M$  qui associent à un état  $x \in M$  son image  $f(x)$ . Parmi ces transformations -mais celles-ci ne s'y réduisent pas- on trouve les flots associés aux solutions d'une équation différentielle qu'on peut noter par exemple  $y' = f(y, t)$ . Si on convient d'appeler  $y$  une solution définie sur un intervalle de temps appropriés, on peut alors définir un ensemble d'applications  $\phi_t : M \rightarrow M$  paramétré par le réel  $t$ , qui associent à une condition initiale  $(x_0, t_0) \in M \times R$  un état futur  $(x_1, t_0 + t)$ .

Cependant, les travaux de l'approche dynamique de la cognition se distinguent surtout par les arguments philosophiques qu'ils opposent à la conception computationnelle dominante, dont nous reproduisons quelques exemples rassemblés par van Gelder et Beer (cf [21], [32, p.12-13], [3, p.96]) :

- le *représentationalisme* computationnel consiste à affirmer qu'un organisme possède des structures de données internes préexistantes, fixes ou variables dans le temps<sup>8</sup>, et que ces structures de données représentent des propriétés du monde externe, ou de l'agent lui-même. Du point de vue dynamique, c'est la structure de l'espace et celle de l'ensemble des trajectoires possibles qui importent. En outre, s'il est nécessaire de tenir compte des états internes d'un organisme, rien ne permet d'affirmer qu'il représentent des propriétés ou attributs du monde externe.
- l'*interaction* d'un organisme avec son environnement est vue dans la théorie behavioriste comme une chaîne linéaire stimulus  $\rightarrow$  réponse. De manière similaire, la théorie computationnelle comprend trois étapes successives, *sense*  $\rightarrow$  *plan*  $\rightarrow$  *act*, l'ensemble étant assimilé à l'exécution d'un programme. Du point de vue dynamique il s'agit, à l'inverse, d'abord d'une modification simultanée de l'organisme par l'environnement et réciproquement<sup>9</sup>, bien que les modifications puissent être d'ordres

<sup>8</sup> cf le projet MGS <http://mgs.lami.univ-evry.fr/>

<sup>9</sup> Beer ajoute une composante téléologique, i.e. visant un objectif, ici la stabilisation d'un certain comportement "the focus here is on continuously engaging an environment with a body so as to stabilize appropriate coordinated patterns of behavior", [3, p.97]

de grandeurs très différents. Plus précisément, pour paraphraser Kelso, les comportements moteurs ne sont pas imposés par des programmes, mais procèdent des influences mutuelles et auto-organisées d'un ensemble de processus.

- la décomposition classique organisme/environnement est parfois remise en question car il existe des manières de partitionner cet ensemble permettant d'obtenir des explications plus satisfaisantes du comportement d'un organisme (cf [1] cité par [7]).

Un argument central qui selon nous fait défaut ici, en faveur de l'approche dynamique au détriment du point de vue computationnel est la sensibilité des organismes vivants aux conditions initiales, qui fait défaut de manière décisive aux machines à états discrets, comme l'expose Longo dans [17]; cependant nous ne développons pas ce point de vue car il n'est pas représentatif du courant scientifique que nous étudions ici.

### 1.3.2 Un spectre large de thèmes d'intérêt

La position philosophique résumée brièvement en §1.3.1 nous renseigne peu sur la diversité des études cognitives regroupées sous le terme "dynamique". Nous en dressons ci-dessous une liste très partielle, afin de situer parmi elles le domaine qui retiendra particulièrement notre attention dans la suite de cet exposé.

- modélisation de reconnaissance visuelle : la faculté de catégoriser des stimuli sensoriels connus ou inconnus appartenant à des classes distinctes peut s'expliquer même en présence de bruit, grâce à des réseaux résonants. Il est également possible de rendre compte de capacités d'apprentissage de la catégorisation (cf [6]).
- reconnaissance visuelle d'événements : on peut rendre compte de l'identification d'un phénomène physique observé visuellement (e.g. rebond d'une balle) d'après la seule connaissance du flot optique projeté sur la rétine (cf [5]).
- modélisation des facultés linguistiques : pour expliquer les facultés génératives du langage, certains auteurs recourent à des "dynamical recognizer" (cf [20]). D'autres traits caractéristiques du langage, tels que l'induction de catégories lexicales d'après les régularités statistiques, ou les propriétés de récursivité de la grammaire (cf [10]) sont étudiés.
- planification d'acte moteur : certains travaux proposent de formaliser les processus de décision qui conduisent à la réalisation d'un acte moteur après présentation d'un stimulus visuel, en s'appuyant par exemple sur des "dynamical fields" (cf [28]).
- activités motrices rythmiques : il existe de nombreux modèles de coordination du mouvement des membres lors de la locomotion (cf pour le cas d'un robot insecte) en régime stationnaire. Il est également possible d'expliquer des signaux rythmiques biologiques par analogie avec des phénomènes de transition de phase connus en thermodynamique (cf [13]), mais également de relier ces phénomènes à l'activité des régions cérébrales responsables de la motricité (cf [14]).
- l'activité des zones cérébrales liées à la perception constitue un champ d'application

ancien des méthodes dynamiques, par exemple dans le cas de l'olfaction (cf [11]).

Parmi ces différentes thématiques, nous nous concentrons dans la section §1.3.3 sur la dynamique du comportement.

### 1.3.3 Coordination musculaire

Une série d'expériences menées au long des années 80 par Kelso et ses collègues [13], ont illustré la nécessité et l'efficacité de l'approche dynamique pour expliquer la coordination des mouvements, dans le cas particulier de la transition de phase bimanuelle. Il est demandé à des sujets humains de déplacer de manière rythmique les index des deux mains à la même fréquence, indiquée visuellement par un métronome. Les positions et vitesses des deux mains sont enregistrées séparément, de même que l'activité électrique des muscles et le déphasage  $\phi$  entre les deux index considérés comme des oscillateurs. A mesure que l'expérimentateur varie la fréquence de contrôle  $f$  entre 1.25 et 3.50 Hz, deux régimes stables sont d'abord observés, puis un seul à partir d'une fréquence précise  $\phi = \phi_c$ .

Le point de départ de l'analyse est le constat d'une similitude entre les formes observées d'une part dans les systèmes hors équilibre et d'autre part lors de la coordination des mouvements biologiques (cf [24]). Avec la collaboration des physiciens H. Haken et G. Schöner, Kelso propose un modèle des phénomènes observés reposant sur les propriétés d'une équation différentielle, dont la phase  $\phi(t)$  serait solution, et nommé plus tard modèle HKB. La méthode mise en oeuvre repose sur l'*identification* de l'équation en question d'après les propriétés observées du phénomène, puis sur sa validation par un va-et-vient entre le modèle théorique et les prédictions expérimentales qu'il permet de réaliser. A l'issue de cette procédure qu'on ne détaille pas (cf [15] pour un exposé simple), les auteurs obtiennent l'équation suivante :

$$\dot{\phi} = -a \sin \phi - 2b \sin 2\phi \quad (1.1)$$

Ils remarquent que, au delà de la formulation d'un modèle à l'aide d'une équation différentielle non linéaire, les faits observés s'apparentent à une transition de phase hors équilibre. Courantes en Physique Statistique, celles-ci se produisent lorsque l'organisation d'un grand nombre de particules change brutalement, par une transformation continue des paramètres de contrôle. Les auteurs mettent alors en oeuvre des outils spécifiques à l'analyse des transitions de phase pour expliquer la stabilité des solutions de l'équation (1.1), en particulier l'étude des fluctuations critiques et du ralentissement critique.

En conclusion, les auteurs affirment d'abord qu'il existe chez les organismes vivants une *tension* entre stabilité et flexibilité des comportements. Ensuite ils proposent de traduire cette opposition dans le cadre de l'approche dynamique avec les outils de la dynamique non linéaire, et y ajoutant ceux relevant des transition de phase, propres à la Physique Statistique. Les notions appropriées sont la multistabilité qui rend compte de la coexistence

de plusieurs attracteurs dans l'espace de phase, et la capacité pour le système de sauter d'un bassin d'attraction à l'autre sous l'effet des perturbations induites par le milieu.

Par la suite ces travaux ont donné lieu à un grand nombre de prolongements, y compris dans le domaine de la dynamique des populations de neurones, et la manière dont ces activités collectives sont corrélées aux activités macroscopiques coordonnées des muscles.

### 1.3.4 Développement des facultés de catégorisation

Parmi les différents phénomènes perceptifs, la capacité de constituer des classes discrètes à partir d'un espace *a priori* continu de stimulations joue un rôle particulier, notamment car elle est liée à la sélection de comportements.

Au cours de son étude de la constitution de la notion d'objet chez les enfants, Piaget définit plusieurs stades d'évolution de la structure mentale. L'une des étapes mises en évidence est illustrée par une tâche de saisie d'objet et porte le nom de "A-not-B error". On présente à un enfant âgé de quelques mois (entre 7 et 12) un objet tentant et on le dissimule, sous les yeux de l'enfant, dans un récipient opaque *A*. Après quelques secondes de délai, l'enfant est laissé libre de ses mouvements et dans la plupart des cas, il le recherche activement puis le trouve. On répète cette expérience plusieurs fois afin d'habituer l'enfant à l'exercice. Enfin, au lieu de dissimuler l'objet dans le récipient *A* comme précédemment, on le cache dans un récipient *B*, toujours sous les yeux de l'enfant. Après quelques secondes il est de nouveau laissé libre des ses mouvements et à la surprise de l'expérimentateur, cherche activement l'objet dans le récipient *A* sans le trouver, bien qu'il ait été placé ostensiblement dans l'autre récipient. Une condition expérimentale déterminante est le délai d'attente : si celui-ci se réduit à 0, alors l'erreur "A-not-B" ne se produit pas.

L'expérience montre que les enfants âgés de moins de 7 mois et de plus de 12 mois, ne commettent pas l'erreur "A-not-B", ce que Piaget explique ainsi : avant 7 mois, les enfants ne cherchent pas les objets cachés tandis qu'après 12 mois ils dirigent leur attention à l'endroit où ils ont vu l'objet pour la dernière fois. L'erreur exprimerait l'incapacité de l'enfant à considérer les objets comme existant de manière continue dans l'espace et le temps indépendamment de sa propre perception.

Thelen et Smith ont abordé ce problème dans le cadre de l'approche dynamique de la cognition (cf [27, chap.10]) et s'appuient pour cela sur une théorie particulière de la définition perceptive des objets (cf [27, chap.6]). Leurs travaux concernent deux échelles de temps : d'une part la manière dont le système perceptif opère la ségrégation des objets, et d'autre part -à une échelle de temps plus longue- comment évolue cette capacité de ségrégation. Thelen et Smith postulent l'existence de plusieurs systèmes disjoints, constitués de populations de neurones ayant une activité continue : d'une part le "what system" catégorise et identifie les objets grâce à leurs propriétés statiques (forme, couleurs), d'autre part le "where system" qui situe la perception et prend en compte les informations relatives au mouvement. Ces deux systèmes sont connectés entre eux et reliés aux organes de la vision de plusieurs manières

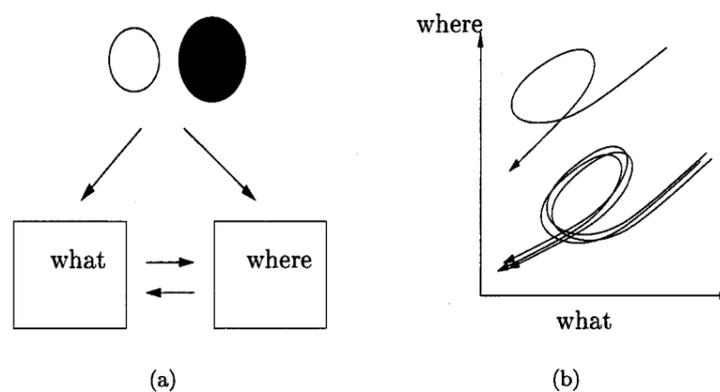


FIG. 1.1 – (a) Le système “what” identifie les objets d’après leurs propriétés statiques, le système “where” prend en compte les propriétés dynamiques (b) projection des objets perçus par la vision. Trajectoire paramétrée par le temps dans l’espace “what”/“where” et attracteur dans l’espace de phase (adapté de [27]).

- les informations de textures et formes sont transmises au “what system”.
- les informations de mouvements sont projetées sur le “where system”.
- ces deux systèmes sont interconnectés et leur couplage a pour produit la ségrégation entre objets distincts.

Pour permettre l’usage des outils et méthodes de représentation traditionnels des systèmes dynamiques, l’état des deux systèmes “what” et “where” est assimilé à un réel (ce qui n’est pas intuitif dans le cas d’une texture). L’état instantané de l’ensemble du système peut donc être représenté par un point dans un espace euclidien de dimension 2 comme l’illustre la Fig. 1.1. De même l’évolution dans le temps de l’état du système s’apparente à une courbe de l’espace Euclidien paramétrée par le temps. Si un type de trajectoire est observé plus fréquemment que les autres, les chercheurs proposent de l’identifier à un attracteur, ce qui marque une “préférence” de la part du système perceptif. Enfin, le modèle proposé tient compte de l’aspect développemental en permettant aux attracteurs d’être modifiés par une règle Hebbienne :

« By simple Hebbian notions of increasing strength of connections in all three mappings with joint activity, paths that are commonly repeated will become attractors » [27, p.176]

Il est important de noter que cette préférence réduit alors les capacités de discrimination, puisqu’un attracteur tendra à confondre deux trajectoires qui auparavant pouvaient être proches mais distinctes.

Revenons maintenant au cas particulier de l’erreur “A-not-B”, auquel Thelen et Smith appliquent leur modèle théorique. La répétition de la tâche, au cours de laquelle on dissimule un objet tentant dans le récipient opaque *A* avant de laisser le loisir à l’enfant de le

chercher, aboutit à la constitution d'une trajectoire "attractrice" comme celle représentée par la Fig. 1.1(b). Si on place maintenant l'objet dans le récipient  $B$  et qu'on permet immédiatement à l'enfant de chercher l'objet, le conflit entre la stimulation qui vient de se produire et la trajectoire attractrice désavantage cette dernière, et l'enfant retrouve l'objet dans le bon récipient sans commettre l'erreur "A-not-B". Si en revanche un temps suffisant s'écoule entre la dissimulation et le début de la recherche, alors la stimulation  $B$  s'affaiblit et l'attracteur  $A$  s'impose de nouveau, amenant l'enfant à se tromper.

En s'en tenant à ces résultats, on pourrait douter de l'utilité de la traduction des observations expérimentales dans le langage des systèmes dynamiques. Notre rapide résumé n'épuise pas néanmoins les multiples développements autour de cette thématique. En effet le modèle de Thelen et Smith a donné lieu par la suite à une formalisation plus poussée en collaboration avec G. Schöner (cf [28]), à l'aide des "dynamic neural field" développés par cet auteur (cf [25]). Celle-ci a alors permis d'effectuer des prédictions vérifiées. De plus, comme nous le verrons plus en détail en §1.4, ce type de modèle présente un intérêt en robotique, comme l'attestent les travaux de Schöner dans cette discipline.

## 1.4 Discussion

La doctrine écologique repose d'abord sur la présence de signaux physiques structurés dans l'environnement. Du fait de la régularité des propriétés des objets de l'environnement, les signaux présentent des propriétés d'invariance structurelle (e.g. invariance par un ensemble de transformations géométriques) ou transformationnelle (i.e. invariance par transformation temporelle). Si un animal remplit des conditions de sensibilité à certaines vibrations, il a potentiellement accès à ces signaux physiques et à leurs structures invariantes. Il est important de noter que, pour les psychologues écologiques, l'animal n'extrait pas des caractéristiques géométriques préexistantes de l'environnement (e.g. forme) à l'aide de son système perceptif imparfait pour reconstituer une représentation interne du monde externe (e.g. représentation 3D reconstruite d'après la projection 2D rétinienne).

Ces régularités, caractérisables mathématiquement, n'ont d'utilité que si elles sont *compatibles* avec les capacités d'action de l'animal dans cet environnement particulier. Cette compatibilité regroupe plusieurs contraintes, la plus importante étant celle de compatibilité d'échelle entre les longueurs caractéristiques de l'environnement et celles de l'animal. Les actions permises par ces compatibilités sont nommées "affordances", ou potentialités d'action, et les psychologues écologiques s'appuient sur de nombreuses vérifications expérimentales dont celles de Warren pour soutenir leur existence.

Pour conclure, l'animal est sensible, non pas à des propriétés intrinsèques de l'environnement, mais à ces "affordances", et pour paraphraser Kelso<sup>10</sup>, cette sensibilité peut se comprendre comme la *résonance* d'un oscillateur soumis à une stimulation.

Ce type d'analogie forme le socle de l'approche dynamique de la cognition, compatible

---

<sup>10</sup> cf [14, p.188]

dans une certaine mesure avec les travaux des psychologues écologiques. Pour certains chercheurs influents de ce courant, tels que Schöner [23], le trait distinctif des organismes vivants est la tension entre *stabilité* et *flexibilité* : d'une part les organismes vivants maintiennent une organisation de manière durable dans le temps, d'autre part ils sont capables de modifications internes au fur et à mesure de leur interaction avec l'environnement. L'originalité de leur propos ne réside pas dans ces considérations générales, mais dans la traduction mathématique de ces notions. Afin de leur donner un caractère opératoire, elles sont traduites dans le langage des systèmes dynamiques en opposant d'un côté la multistabilité (i.e. l'existence simultanée de plusieurs attracteurs dans l'espace de phase) et d'autre part la possibilité pour une trajectoire de sauter d'un attracteur à un autre, par exemple sous l'effet des fluctuations microscopiques.

Pour justifier la pertinence de ces outils, Kelso de son côté constate que certains comportements sont rencontrés dans de nombreux systèmes couplés très différents<sup>11</sup>, ce qu'il nomme *invariance fonctionnelle*. Il ajoute qu'à l'inverse le même ensemble de "composants anatomiques" peut avoir deux comportements très distincts si ses paramètres sont modifiés, ce qu'il nomme *multifonctionnalité*, et qu'il traduit également, dans le langage des systèmes dynamiques, par la notion de multistabilité.

Ces visions de l'approche dynamique de la cognition sont servies par une méthode commune, celle de l'*identification* de système. Elle consiste dans un premier temps à isoler les variables pertinentes du phénomène expérimental étudié (e.g. la phase dans les expériences de transition de phase bimanuelle vues en §1.3.3) et dans un second temps à proposer une équation différentielle dont les variables précédentes sont solutions. Cette équation doit vérifier deux critères : ses solutions coïncident qualitativement avec les observations expérimentales pour une certaine valeur des paramètres, et d'autre part les transitions soudaines observées en changeant les conditions expérimentales sont reflétées par les bifurcations du système modèle.

Au premier abord il semble légitime de critiquer (cf [18, p.6]) l'aspect purement phénoménologique de ce type de descriptions. En effet elles se placent à un niveau d'étude macroscopique (e.g. celui de la position des membres) et négligent les forces élémentaires qui causent les comportements observés (on verra toutefois au chapitre 5 l'utilité de ce type d'équation pour corroborer un modèle microscopique). Ensuite le choix des variables comportementales (e.g. la direction de vol d'une mouche) ne correspond pas nécessairement aux variables utiles pour le système perceptif :

« Variables that are very closely linked to the peripheral motor or sensory subsystems are often not suited to describe behavioral or neural patterns (...) The dynamical systems approach employs, instead, variables that characterize directly the behavioral or neural patterns themselves by differentiating the different observed forms of the patterns and quantifying deviations from behavioral or neural states » [23, p.10572].

<sup>11</sup> "the same behavioral patterns may be obtained from very different kinds and strengths of couplings among the components" [14, p.64]

## Bibliographie

---

Ainsi dans le meilleur des cas, les exemples donnés au long du chapitre révèlent une relation fonctionnelle entre des grandeurs perceptives et sensorielles de haut niveau (e.g. expériences de Lee et Reddish en §1.2.2.4), mais dans d'autres cas les interactions entre ces deux systèmes n'apparaissent pas (e.g. modèle HKB vu en §1.3.3, qui ne font intervenir aucune des grandeurs proprioceptives ou kinesthésiques dont l'influence est pourtant déterminante). Ces constats d'une part contredisent les principes de la psychologie écologique et d'autre part ne nous éclairent pas suffisamment sur les mécanismes reliant perception et action.

Comme nous le verrons au chapitre 2, de nombreux travaux en perception sensorimotrice artificielle s'inspirent des idées évoquées brièvement dans ce chapitre. Cet effort de transposition provient en premier lieu du souci de plausibilité biologique dont la première conséquence est le rejet de la position philosophique computationnelle appuyée principalement sur l'idée de représentation interne. En second lieu, il provient de la reconnaissance par de nombreuses disciplines de la nécessité de considérer conjointement perception et action sans affecter une prédominance logique à l'un des deux ou un mode séquentiel d'exécution. Enfin il provient de l'inaptitude de la robotique classique -influencée par l'intelligence artificielle- à élaborer des artefacts autonomes ou du moins égalant les performances sensorimotrices observées chez les organismes vivants.

Les questions classiques posées par l'informaticien ou le roboticien concernent le type de représentation interne (égocentrée, allocentrée), le choix des structures de données nécessaires à la représentation interne de l'environnement, l'adéquation entre les capteurs et les traits saillants de l'environnement, la vérification puis l'optimisation des algorithmes de planification, de contrôle, de traitement de l'image ou du signal, la calibration. À l'inverse les questions soulevées par la transposition des idées évoquées au long de ce chapitre concerneront l'étude du lien causal entre perception et action, et la formalisation du concept de compatibilité entre le robot et son environnement, via par exemple la traduction des notions d'*invariant* et d'*affordance*. Nous présentons un aperçu des travaux de ce domaine au long du chapitre 2.

## Bibliographie

- [1] D. H. Ballard, M. M. Hayhoe, P. K. Pook, and R. P. N. Rao. Deictic codes for the embodiment of cognition. *Behavioral and Brain Sciences*, 20 :723–742, 1997.
- [2] P. J. Beek, J. C. Dessing, C. E. Peper, and D. Bullock. Modelling the control of interceptive actions. *Philosophical Transactions of the Royal Society B : Biological Sciences*, 358(1437) :1511–1523, 2003.
- [3] R.D. Beer. Dynamical approaches to cognitive science. *Trends in Cognitive Sciences*, 4(3) :91–99, March 2000.
- [4] A. Berthoz. *Le sens du mouvement*. Odile Jacob, 1997.

- 
- [5] G.P. Bingham. Dynamics and the problem of visual event recognition. In R.F. Port and vanGelder T., editors, *Mind as motion : Explorations in the dynamics of cognition*, pages 403–448, Cambridge, MA, 1995. MIT Press.
- [6] G.A. Carpenter and S. Grossberg. Adaptive resonance theory. In *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks, Second Edition*, pages 87–90, Cambridge, MA, 2003. MIT Press.
- [7] A. Clark. An embodied cognitive science? *Trends in Cognitive Sciences*, 3(9) :345–351, Sept. 1999.
- [8] R. Cordeschi. *The Discovery of the artificial. Behavior, mind ans machines before and beyond cybernetics*. Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [9] Lee D.N. and P.E. Reddish. Plummeting gannets : a paradigm of ecological optics. *Nature*, 293 :293–294, 1981.
- [10] J.L. Elman. Language as a dynamical system. In R.F. Port and vanGelder T., editors, *Mind as motion : Explorations in the dynamics of cognition*, pages 195–226, Cambridge, MA, 1995. MIT Press.
- [11] W.J. Freeman. *Neurodynamics : An Exploration In Mesoscopic Brain Dynamics*. Springer-Verlag, 2000.
- [12] J.J. Gibson. *The Ecological Approach to Visual Perception*. Houghton Mifflin, Boston, 1979.
- [13] J.A.S. Kelso. Phase transitions and critical behavior in human bimanual coordination. *American Journal of Physiology : Regulatory, Integrative and Comparative*, 246(6) :1000–1004, 1984.
- [14] J.A.S. Kelso. *Dynamic Patterns : The Self-organization of Brain and Behavior*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [15] J.A.S Kelso. Haken kelso bunz model. *Scholarpedia*, 2007. [http://www.scholarpedia.org/article/Haken-Kelso-Bunz\\_Model](http://www.scholarpedia.org/article/Haken-Kelso-Bunz_Model).
- [16] P.N. Kugler and M.T. Turvey. Two metaphors for neural afference and efference. *Behavioral and Brain Sciences*, 2(2) :305, 1979.
- [17] G. Longo. *The Turing Test Sourcebook*, chapter Laplace, Turing and the imitation game impossible geometry : randomness, determinism and programs in Turing’s test. Springer, 2007.
- [18] H.A. Mallot. Behavior-oriented approaches to cognition : theoretical perspectives. *Theory in Biosciences*, 116 :196–220, 1997.
- [19] C.F. Michaels and C. Carello. *Direct perception*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.
- [20] J.B. Pollack. The induction of dynamical recognizers. In R.F. Port and vanGelder T., editors, *Mind as motion : Explorations in the dynamics of cognition*, pages 283–312, Cambridge, MA, 1995. MIT Press.

### Bibliographie

---

- [21] R. Port and T. van Gelder. *Mind as Motion : Dynamics, Behavior, and Cognition*. MIT Press, 1995.
- [22] A. Rosenblueth, N. Wiener, and J. Bigelow. Behavior, purpose and teleology. *Philosophy of Science*, 10(1) :18–24, Jan. 1943.
- [23] G. Schöner. Dynamical systems approaches to neural systems and behavior. In N J Smelser and P B Baltes, editors, *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*, pages 10571–10575, Oxford, 2002. Pergamon.
- [24] G. Schöner and J.A.S. Kelso. Dynamic Pattern Generation in Behavioral and Neural Systems. *Science*, 239 :1513–1520, March 1988.
- [25] G. Schöner, K. Kopecz, and W. Erlhagen. The dynamic neural field theory of motor programming : Arm and eye movements. *Advances in Psychology*, 119 :271–310, 1997.
- [26] R. Shaw, M. T. Turvey, and W. M. Mace. *Cognition and the Symbolic Processes II*, chapter Ecological Psychology : The Consequence of a Commitment to Realism, pages 159 – 226. Lawrence Erlbaum Associates, 1982.
- [27] E. Thelen and Smith L.B. *A Dynamic systems approach to the development of cognition and action*. MIT Press, Cambridge, MA, 1994.
- [28] E. Thelen, G. Schöner, C. Scheier, and L.B. Smith. The dynamics of embodiment : A field theory of infant perseverative reaching. *Behavioral and Brain Sciences*, 24 :1–34, 2001.
- [29] E. Todorov and M.I. Jordan. Optimal feedback control as a theory of motor coordination. *Nature Neuroscience*, 5 :1226–1235, 2002.
- [30] M. T. Turvey, R. Shaw, and W. M. Mace. *Attention and Performance VII*, chapter Issues in the Theory of Action : Degrees of Freedom, Coordinative Structures and Coalitions, pages 557 – 595. Lawrence Erlbaum Associates, 1978.
- [31] M.T. Turvey. Coordination. *American Psychologist*, 45(8) :938–953, 1991.
- [32] T. van Gelder. The dynamical hypothesis in cognitive science. *Behavioral and Brain Sciences*, 21 :615–628, 1998.
- [33] W.H. Warren. Perceiving affordances : visual guidance of stair climbing. *Journal of Experimental Psychology, Human Perception and Performance*, 10(5) :683–703, 1984.
- [34] W.H. Warren and S. Whang. Visual guidance of walking through apertures : body-scaled information for affordances. *Journal of Experimental Psychology, Human Perception and Performance*, 13(3) :371–383, 1987.

---

## Sources en libre accès

- le Haskins Laboratory met en ligne une base bibliographique en libre accès sur la parole, contenant de nombreux textes de psychologie écologique et ayant trait à l'approche dynamique de la perception, <http://www.haskins.yale.edu/pubs.html>.
- *Direct perception* [19] est téléchargeable sur le site du Center for the Ecological Study of Perception and Action, dirigé par C.Carello <http://ione.psy.uconn.edu/>.
- articles de G. Longo <http://www.di.ens.fr/~longo>
- quelques articles de Robert Shaw sont disponibles sur son site : <http://www.trincoll.edu/depts/ecopsyc/shaw/>
- articles de Gregor Schöner : <http://www.neuroinformatik.ruhr-uni-bochum.de/thbio/members/profil/Schoener/index.html>
- articles de Stephen Grossberg <http://cns-web.bu.edu/Profiles/Grossberg/>
- les livres de Walter J. Freeman sont disponibles en ligne <http://sulcus.berkeley.edu/>

*Bibliographie*

---

# Chapitre 2

## Perception sensorimotrice artificielle et affordances

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Contexte historique et courants influents . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1.1	De l'IA à la robotique située . . . . .	22
2.1.2	Robotique comportementale . . . . .	24
2.1.3	Neuromécanique de la locomotion . . . . .	25
2.1.4	Perspective systémique : neuroéthologie computationnelle . . . . .	27
<b>2.2</b>	<b>Dépendances statistiques et invariants écologiques . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.3</b>	<b>Affordances . . . . .</b>	<b>31</b>
2.3.1	Définitions formelles . . . . .	32
2.3.2	Traduction opérationnelle des <i>affordances</i> . . . . .	33
<b>2.4</b>	<b>Représentation de dépendances sensorimotrices . . . . .</b>	<b>37</b>
2.4.1	Carte sensorimotrice pour parvenir à un but . . . . .	38
2.4.2	Causalité et réseau sensorimoteur . . . . .	42
<b>2.5</b>	<b>Discussion et proposition . . . . .</b>	<b>45</b>
2.5.1	Discussion . . . . .	45
2.5.2	Proposition . . . . .	47
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>48</b>

---

Au cours du chapitre précédent, nous avons tracé une généalogie partielle des courants ayant influencé l'étude actuelle de la perception sensorimotrice, notamment au travers de la psychologie écologique et des approches dynamiques de la cognition. Au cours de ce chapitre, nous replaçons l'étude de la perception sensorimotrice artificielle dans son contexte historique, par rapport à l'Intelligence Artificielle (IA), la robotique comportementale mais également la neuroéthologie computationnelle et des études intégrées de neuromécanique de la locomotion.

Au §2.2, nous confrontons les deux problématiques principales, explication et imitation, qui dominent en robotique autonome avant d'observer comment les chercheurs tentent d'y répondre en s'appropriant les thèmes de la psychologie écologique (§2.3) vus au chapitre précédent.

Pour finir, nous soulignons certaines limites des outils d'inférence statistique des *affordances* et proposons des solutions alternatives en §2.4 avant de formaliser notre contribution en §2.5.

## 2.1 Contexte historique et courants influents

### 2.1.1 De l'IA à la robotique située

Nous nous bornerons ici à rappeler le lien indissociable qui unit la robotique à la naissance de l'informatique, ainsi que le conflit qui opposa la cybernétique et l'intelligence artificielle au sujet de l'explication et de la modélisation des phénomènes mentaux (cf [18]).

Profitant de la redéfinition de la *machine* sous l'impulsion de Turing et de von Neumann, la cybernétique réexamine l'opposition classique entre l'inerte et le vivant, et met en œuvre un formalisme unique, celui de la commande et de la transmission de l'information pour modéliser les capacités de plasticité et d'apprentissage des êtres vivants et des artefacts [52, 4].

A partir des années 50, l'Intelligence Artificielle reprend à son compte certains objectifs de la cybernétique, en s'appuyant d'une part sur l'assimilation des raisonnements humains à des calculs, d'autre part en supposant que l'esprit peut être étudié de manière indépendante<sup>12</sup> de son substrat matériel [17]. Les techniques mises au point en IA permettent certes de résoudre de manière efficace de nombreux problèmes de logique, ou aisément formulables en termes logiques, mais la reproduction et l'explication des facultés supérieures des être vivants restent hors de leur portée. Ce constat est d'autant plus aigu en robotique que l'interaction avec l'environnement reste réfractaire aux représentations simplifiées nécessaires à la résolution de problèmes logiques [42].

Bien que la cybernétique s'éteigne dans le contexte académique vers la fin des années 50, certaines de ses thématiques resurgiront au cours des années 80 à la faveur du développement du connexionisme. Celui-ci inspire entre autres les développements récents de la "nouvelle IA" où les thématiques spécifiquement cognitives (logique, raisonnement, connaissance, mémoire, langage) sont progressivement supplantées par l'étude du rapport entre un agent et son environnement, de la coordination entre perception et action, de la plasticité du comportement dans un environnement fluctuant sous contraintes de performances. S'y rattachent différents courants tels que la robotique réactive (*behavior-based robotics*) [8, 10, 1, 16, 3], évolutionnaire [15, 45], située ou incarnée (*embodied robotics*) [57, 58, 13, 39], et de manière indirecte des disciplines telles que la vie artificielle (*Artificial*

---

<sup>12</sup> idée considérée avec une certaine circonspection par Turing lui-même, cf [36]

*Life*)<sup>13</sup>.

Le paradigme moderne de conception d'un robot mobile se caractérise selon nous par trois aspects. Tout d'abord, un repli vers les thématiques de la perception, mais sans rejet définitif de celles qui caractérisaient l'IA. Ainsi le refus initial des représentations [11] cède la place à une plus grande tolérance là où l'exige la tâche affectée au robot [39, 3].

Du point de vue des objectifs scientifiques, un grand nombre de travaux entretiennent l'ambiguïté entre explication et imitation (cf [65, §4.1] en robotique, [36] de manière plus générale) des performances et de la plasticité du vivant. On en a déjà rencontré des exemples avec les modèles phénoménologiques du chapitre 1. Parfois la posture vis-à-vis de l'explication est clairement affichée, comme dans le manifeste de Brooks :

« I wish to build completely autonomous mobile agents that co-exist in the world with humans, and are seen by those humans as intelligent beings in their own right. I will call such agents Creatures. This is my intellectual motivation. I have no particular interest in demonstrating how human beings work, although humans, like other animals, are interesting objects of study in this endeavor as they are successful autonomous agents » [11, p.145]

Mais une dizaine d'années plus tard sa position, semble avoir évoluée, oscillant entre l'intérêt de l'imitation<sup>14</sup> du point de vue applicatif et la nécessité d'expliquer<sup>15</sup> les phénomènes dont on souhaite s'inspirer. Toutefois, quelques travaux cherchent à expliquer certains mécanismes du vivant grâce à des études interdisciplinaire impliquant des éthologistes, des neurobiologistes, des biomécaniciens et des roboticiens. Par exemple, les Brain-Based Devices (BBDs) de Edelman et al. [34] visent l'étude de la boucle perception/action en s'inspirant de travaux en neuroanatomie et en dynamique neurale ; mais également l'amélioration des performances des robots mobiles<sup>16</sup>. La validation de ces idées repose sur une comparaison à plusieurs niveaux (neuronal, comportemental, systémique) avec des observations effectuées sur des animaux. On pourrait citer dans ce contexte les travaux menés par Arkin et al. [3], les approches neuromécaniques de la locomotion [31] et enfin la neuroéthologie computationnelle dont Arbib et Beer [14] illustrent la démarche et seront repris dans les sections suivantes. Enfin remarquons que ce sujet fait toujours l'objet d'intenses débats dans la littérature (cf l'article de Webb et les réponses correspondantes

<sup>13</sup> née à la fin des années 1980, et essentiellement computationnelles. Voir toutefois le compte-rendu par Stefan Helmreich [29] du congrès de San Sebastien où se réunirent des scientifiques rétifs à cette position.

<sup>14</sup> « At the heart of this disappointment lies the fact that neither AI nor Alife has produced artefacts that could be confused with a living organism for more than an instant (...) although they are much more lifelike than the pure engineering artefacts of traditional AI, in some sense the systems built under the behaviour-based and Alife approaches do not seem as live as we might hope » [9, p.409]

<sup>15</sup> « We build models to understand the biological systems better, but the models never work as well as biology (...) For perceptual systems, say, there might be some organizing principle, some mathematical notion that we need in order to understand how they really work » [9, p.410-411]

<sup>16</sup> « These comparisons serve two purposes : first BBDs are powerful tools to test theories of brain function (...) Second, by using the animal nervous system as a metric, designers can continually make their simulated nervous systems closer to that of the model animal » [34, §2.6]

[65]).

Dernier point caractéristique selon nous, la méthode d'investigation en grande partie expérimentale, malheureusement limitée par les contraintes technologiques. La plasticité matérielle très réduite a le plus souvent pour conséquence une partition en deux niveaux (logiciel et matériel, cf Longo [36]) destinée à compenser les degrés de liberté perdus, mais similaire de fait à celle postulée (*a priori* cependant) par l'IA.

On donne dans la suite plusieurs exemples préoccupés par la plausibilité biologique, par les rapports sensorimoteurs et plus particulièrement leur catégorisation.

### 2.1.2 Robotique comportementale

Les motivations initiales de la robotique réactive (ou *behavior-based*) sont d'une part l'inadaptation des robots issus de la recherche en IA au monde réel, d'autre part le désir d'accroître la "plausibilité" biologique des robots conçus. Le principe fondateur sera donc celui de l'"économie" du temps de calcul, de la complexité des algorithmes et des structures de données. Pour cela, la fraction des données sensorielles utilisées parmi celles disponibles se réduira autant que possible à celle nécessaire à l'accomplissement des tâches motrices assignées<sup>17</sup>, telles que l'évitement d'obstacles ou la poursuite d'une proie.

La méthode de conception consistera en une exploration de l'espace des comportements produits par l'interaction entre un robot muni d'un catalogue de comportements élémentaires et son environnement. Elle sera censée garantir la "haute modularité" des robots, par analogie avec la grande variété des comportements animaux dans des environnements divers. La similitude entre cette méthode et celle de l'ingénierie logicielle destinée à faciliter le développement, l'application et la maintenance des logiciels existants, est frappante ; elle la prolonge ici en englobant le niveau matériel.

Les modules élémentaires instancient des comportements automatisés (e.g. échapper à un "prédateur" ou éviter des obstacles), paramétrables par le concepteur et reposant la plupart du temps sur un modèle d'activité animale. D'une part ceci répond à la difficulté de concevoir *a priori* un module capable d'assurer une tâche dans un environnement donné<sup>18</sup> en adoptant une solution particulière décrite pour un animal donné. D'autre part, ce recours est supposé garantir la plausibilité biologique des solutions retenues. Pour cette raison, les travaux d'éthologues, de psychologues ou de spécialistes de neurosciences sont naturellement mobilisés autour de la théorie des schémas, issue initialement de la psychologie puis mise à profit en neurosciences et en robotique par Arbib et collègues [38, 48].

On assiste ensuite à une différenciation entre les approches purement réactives, et les approches hybrides, dont nous avons donné des exemples ci-dessus. L'approche purement réactive est illustrée par des exemples historiques tels que les tortues de Grey Walter

<sup>17</sup> *need-to-know basis*, "what an agent needs to perceive is based upon its needs to act" cf [3, p.4]

<sup>18</sup> "a pressing question for reactive robotic system designers is just what behaviors are necessary or sufficient for a particular task and environment" [3, p.4]

capables de transitions entre comportements, sans représentation, ou les expériences de psychologie de Braitenberg. Celles-ci démontraient la possibilité de produire un catalogue varié de comportements élémentaires, en apparence semblables à ceux des animaux, mais reposant sur des mécanismes très différents. Selon [3], cette démarche se retrouve chez Brooks<sup>19</sup>, mais pas chez des auteurs tels que Beer dont l'objectif était d'éprouver la fidélité des modèles élaborés en neurosciences, comme on le verra en §2.1.3.

Par opposition aux architectures purement réactives, les approches hybrides [39, 3, 60] font coexister des systèmes de planification avec des modules réactifs, en partant du constat que les architectures réactives sont inadaptées à de nombreuses tâches complexes en robotique. Les modules réactifs sont alors reconfigurés au cours de l'exécution des tâches assignées, ce qui permet selon les auteurs une plus grande flexibilité. Arkin explora une autre solution nommé "*action-oriented sensor fusion*" en construisant des représentations locales pour chaque comportement individuel [3].

Nous renvoyons le lecteur à la section §5.1.1 pour une discussion du modèles de processus concurrents qui sous-tend la théorie de schémas développée par Arbib et al.

### 2.1.3 Neuromécanique de la locomotion

Dans cette section, nous prenons le parti de résumer des travaux en neuromécanique traitant de la locomotion rapide chez des animaux munis de pattes et tentons d'y discerner l'apport de la robotique autonome. Notre référence est l'article de Holmes, Full, Koditschek et Guckenheimer [31], récent et très complet qui embrasse d'un point de vue mathématique et synthétique des travaux émanant de trois disciplines : biomécanique, neurobiologie, et théorie de la commande.

- du point de vue biomécanique, l'analyse des systèmes locomoteurs autorise des modélisations plus ou moins simplifiées, qu'on entre dans le détail des articulations de chaque patte, ou qu'on se limite à un pendule inverse monté sur un ressort aussi bien pour les bipèdes que pour des animaux à huit pattes. Les équations retenues sont le plus souvent celles de systèmes conservatifs holonomes, i.e. soumis à des contraintes de position mais pas de vitesse. De manière plus précise, les équations sont en fait holonomes par morceaux car elles sont modifiées en fonction de la position, par exemple quand les pattes touchent le sol.
- dans une perspective neurobiologique, l'activité des muscles est produite par leur interaction avec un générateur central de signaux (*central pattern generator*), mais aussi un ensemble de neurones distribués permettant la prise en compte d'influences proprioceptives, de rétroactions exteroceptives, et finalement de commandes visant à réaliser un but<sup>20</sup>. A l'inverse de la biomécanique, il n'existe pas en neurosciences

<sup>19</sup> "the subsumption was biologically motivated only in the behaviorist sense as it produced results that resembled certain insect systems but was unconcerned for the underlying biological mechanisms that produced them" [3, §3]

<sup>20</sup> "the timing of muscular contractions driven by a central pattern generator, shapes overall motions but

de résultat théorique de portée aussi générale que le principe de moindre action ou la préservation du volume dans l'espace des phases pour un système Hamiltonien. C'est pourquoi les chercheurs ont élaboré de nombreux modèles phénoménologiques, valables chacun à un niveau donné. Par exemple les équations de Hodgkin-Huxley concernent le neurone isolé et établissent le rapport entre le potentiel, considéré comme homogène à l'intérieur de la cellule, et d'autre part les courants ioniques. Une procédure de séparation d'échelle tire parti des différences d'ordre de grandeur des temps caractéristiques des différentes variables, et permet de considérer les variables rapides comme étant égales à leur valeur d'équilibre. Ceci permet de se ramener à des équation scalaires dont la variable est la phase. En juxtaposant un grand nombre d'unités, les simplifications précédentes, proposées par les mathématiciens, mènent à l'étude d'un réseau d'oscillateurs, dont la résolution analytique est possible.

- du point de vue de la théorie de la commande, il est nécessaire de remarquer que le niveau précédent des générateurs centralisés de signaux (CPG) est conçu comme une excitation en boucle ouverte (*feedforward*) des membres de l'animal. Ces excitations constituent un répertoire de modes propres qui, couplés à ceux de l'appareil musculo-squelettique, expliquent de nombreuses caractéristiques du comportement coordonné de l'animal, mais pas son adaptation à l'environnement. Le rôle des unités distribuées évoquées ci-dessus est moins bien connu que celui du CPG, aussi quatre grandes classes d'architectures de commande sont envisageables, en fonction d'une part du degré de centralisation de la production de la commande, d'autre part en fonction du degré de rétroaction (cf [31, §2.4.2]). Pour cette raison entre autres, les auteurs se limitent alors au cas de la marche rapide, où l'influence des rétroactions sensorielles est minime<sup>21</sup>.

Après avoir assimilé les acquis des autres disciplines, les auteurs proposent alors un modèle neuromécanique intégré partant des neurones à spike jusqu'aux pattes assimilées à des pendules inverses montés sur ressort comme on l'a vu. Sous des hypothèses de couplage faible exploitables par la théorie des perturbations les 60 équations différentielles associées aux neurones à spike sont réduites à une équation différentielle ordinaire assignant une phase à chaque patte. Ses solutions numériques sont étudiées, en particulier leur stabilité asymptotique. La partie mécanique part d'un modèle macroscopique des fibres des muscles de blatte et l'injecte dans un mécanisme plan (*lateral leg spring*). Finalement le modèle neuromécanique obtenu rend compte de certaines propriétés importantes observées chez la blatte.

Le travail accompli n'implique pas les roboticiens de manière déterminante, mais constitue plutôt une parfaite illustration d'application des techniques multiéchelles re-

---

in both vertebrates and invertebrates motor patterns arise through coordinated interaction of distributed, reconfigurable neural processing units incorporating proprioceptive and environmental feedback and goal-oriented 'commands'" [31] §2.3

<sup>21</sup> "insects can run stably over rough ground at speeds high enough to challenge the ability of proprioceptive sensing and neural reflexes to respond to perturbations 'within a stride.'" [31, §1]

posant sur la théorie des perturbations, mais aussi une démonstration de l'utilité de la théorie des systèmes dynamiques pour établir les propriétés -de stabilité notamment- d'un tel modèle.

L'apport des roboticiens relève d'abord des validations expérimentales du modèle mécanique, comme par exemple avec le robot RHex [54] (cf [31] pour une bibliographie plus complète dans le cas de la locomotion de robot munis de pattes), grâce à l'analyse de ses performances. D'autre part, en relâchant la contrainte de plausibilité biologique, certains chercheurs explorent l'espace des circuits neuronaux pour optimiser la performance de marche d'un robot muni de pattes, et démontrent une *dégénérescence* des poids des réseaux de neurones formels, i.e. le fait qu'un grand nombre de réseaux affectés de poids différents ont un comportement et des performances très similaires, ce qui se retrouve d'ailleurs dans la nature [7].

Enfin, en dépassant l'aspect purement mécanique, les roboticiens héritiers des courants décrits en §2.1.1 se sont emparés depuis longtemps de la question du *but* manifestement poursuivi par de nombreux animaux, et qui échappe aux modèles neuromécaniques abordés ci-dessus.

#### 2.1.4 Perspective systémique : neuroéthologie computationnelle

Holmes et al. admettent dans [31, §5.5] que les rétroactions proprioceptives et extéroceptives font défaut à leur modèle, et qu'en les ajoutant le problème de la conservation de la stabilité, garantie en boucle ouverte, se posera avec acuité. Mais comment intégrer les rétroactions exercées par l'environnement dans le type de modélisation intégrée vu en §2.1.3? D'un point de vue historique, cette question fut formulée entre autres par des cybernéticiens comme Ashby [4], et plus tard reprise par des chercheurs tels que Beer [5]. Pour ces auteurs, d'une part on ne peut pas expliquer les mécanismes à l'œuvre chez l'animal sans caractériser ses relations avec son milieu. D'autre part il est possible chez des animaux "simples" non seulement de modéliser l'ensemble des mécanismes fondant l'adaptativité à leur milieu et leur capacité de reproduction, mais aussi de les simuler sur un ordinateur et d'effectuer des prédictions à partir de cette simulation. Cette méthode est en fait partagée par de nombreux chercheurs tels que Cliff, Arbib, et forme la *neuroéthologie computationnelle* (NEC), rattachée à la *biologie cybernétique* et dont l'approche *animat* est un autre exemple. On en donne ci-dessous un rapide aperçu, d'après [12, 14] en commençant par cette citation :

« Adaptive behavior can best be understood within the context of biomechanics of the body, the structure of an organism's environment, and the continuous feedback between the nervous system, the body and the environment » [12, p.553]

La NEC partage certaines positions rencontrées (cf chap. 1) en psychologie écologique et dans l'approche dynamique des phénomènes cognitifs, à propos du rejet de la prédominance du système nerveux central et de son assimilation à un système de traitement du signal. De ce point de vue, l'étude biophysique et moléculaire des cellules et circuits

nerveux ont certes permis de nombreuses avancées, mais ne suffisent pas à expliquer les comportements adaptatifs des animaux dans leur biotope. Les arguments pour appuyer ces positions sont ici d'ordre éthologique (i.e. relatifs à l'étude des comportements des animaux), nous nous contentons ici d'en rappeler quelques exemples et renvoyons à [12] pour plus de détails :

- au cours de l'évolution des espèces mais aussi au cours du développement des individus, on observe des modifications simultanées du corps et du système nerveux.
- en supprimant la rétroaction proprioceptive, le comportement est profondément perturbé.
- en altérant les propriétés physiques du milieu, le comportement se modifie et peut devenir inadapté.

La NEC élabore alors des modèles conjoints des circuits neuronaux, du système biomécanique, et de la niche écologique. La littérature offre des exemples de variations autour de ces principes généraux : d'une part des modèles phénoménologiques très détaillés et largement fondés sur les données biologiques observées sont établis. D'autre part des modèles simplifiés, dégagés des contraintes d'interpolation des observations biologiques, sont conçus pour mettre au jour des mécanismes génériques ; enfin des implémentations physiques sont réalisées et comparées simultanément aux simulations numériques et au comportement de l'animal étudié. Les programmes de recherche d'Arbib et de Beer s'inscrivent dans cette tradition. Le premier par exemple concerne les comportements liés à la vision chez des vertébrés simples, les crapauds [14].

Par un échange continu entre travaux théoriques et expérimentaux, Arbib propose un modèle phénoménologique s'appuyant sur la théorie des schémas. Les observations expérimentales incluent des données myologiques de contraction des différents muscles au cours d'une tâche précise, telle que la saisie d'une proie. Celle-ci est confrontée à une étude neurophysiologique au cours de laquelle sont identifiés des groupes de neurones et de motoneurones, en fonction de la corrélation statistique de leur activité avec la présentation des stimuli de différents types. On renvoie par exemple à [35] pour une illustration d'un tel relevé expérimental.

Arbib encode ces observations expérimentales sous deux formes : a) les *schémas perceptifs* qui associent des données sensorielles à des domaines d'interaction entre l'agent et l'environnement, pendant que b) les *schémas moteurs* sont constitués de suites prototypiques d'actions exécutables par l'agent. La présentation de certains aspects de l'environnement, tels que des objets inertes ou des proies génère des instances de schémas perceptifs qui délimitent des domaines d'interactions possibles entre l'agent et des parties de son environnement, ce qui délimite un ensemble de schémas moteurs possibles. A chaque schéma est associé un niveau d'activité rendant compte de la probabilité que le domaine d'interaction associé à ce schéma soit effectivement présent dans l'environnement. Le comportement global d'un agent s'explique par la juxtaposition d'un grand nombre de schémas formant un réseau. La dernière étape consiste alors à programmer un agent

simulé ou physique sont le comportement instancie les schémas en question à l'aide d'un langage concurrent (cf §5.1.1), comme l'illustre [2].

Le programme de Beer autour de la "blatte computationnelle" *Periplaneta computatrix* prend en considération les observations biologiques mais n'a pas la prétention de constituer un modèle précis de son objet<sup>22</sup>. Le modèle intégré réunit des équations biomécaniques simplifiées, un réseau de neurones reposant sur un modèle du potentiel membranaire des neurones sous forme d'équations différentielles. De plus, s'ajoutent des capteurs sensibles à un gradient d'odeur de nourriture ainsi que des senseurs mécaniques. Les comportements observés de la part du modèle intégré sont alors comparés à ceux de la blatte vivante, et jugés suffisamment proches dans des conditions normales, puis à la suite de lésions. A cette phase de simulation numérique succède l'implémentation d'un robot, et la comparaison des comportements observés d'une part avec ceux de la simulation et d'autre part avec ceux de l'animal.

Les travaux ultérieurs de Beer tendent à simplifier le système considéré et à privilégier les comportements cognitifs "minimaux", tels que la catégorisation d'objets ([6, p.94]), la capacité de juger la traversabilité d'un obstacle ou de "reconnaître" les parties de son propre corps pour un agent donné.

En conclusion, nous notons d'abord que les modèles proposés s'étendent du niveau du potentiel des neurones isolés jusqu'aux rétroactions exercées par les capteurs extéroceptifs et proprioceptifs. Ceci dépasse donc le domaine couvert par les étude neuromécaniques évoquées en §2.1.3.

Cette extension, dans une perspective systémique, s'effectue au prix parfois d'une simplification de certaines étapes, ou de la perte de résultats théoriques (e.g. obtention de l'oscillateur par changement d'échelle à partir de  $n$  neurones régis par des équations de Hodgkin-Huxley ; stabilité). Elle reste toutefois limitée, puisque l'environnement n'est décrit que sommairement.

## 2.2 Dépendances statistiques et invariants écologiques

Dans cette section et les suivantes nous exposons notre positionnement et notre apport vis-à-vis de la partie §2.1. Celle-ci a permis de dépeindre les problèmes posés par l'usage de la robotique et des modèles biorobotiques pour expliquer les comportements animaux, et tirer parti de leur étude afin améliorer les performances des robots.

Pour cela nous nous appuyons sur les principes formulés en psychologie écologique, comme rappelé en §1.4. Ceux-ci incluent d'abord la recherche d'invariants associés à des transformations de l'animal et des objets de l'environnement. Dans une perspective systémique telle que décrite en §2.1.4, les compatibilités d'échelle notamment entre les gran-

<sup>22</sup> "*Periplaneta computatrix* was inspired by biological data but was not intended as a biological model (...) the central focus in Beer's(1990) work was on designing architectures composed from such neural units that could act as controllers for the various behaviors that *P.computatrix* should exhibit" [14, p.14]

deurs caractéristiques (e.g. taille, vitesse) de l'animal et celles de son environnement sont également primordiales. Selon l'hypothèse écologique, validée par de nombreuses observations expérimentales, l'animal est sensible non pas aux propriétés de l'environnement mais aux interactions possibles entre cet environnement et lui-même.

Plusieurs pistes de recherche concrètes s'offrent, la première étant de poursuivre une démarche de modélisation ascendante depuis des niveaux de description fins tels que les activités des neurones, des fibres musculaires et du métabolisme en remontant jusqu'au comportement de l'animal. On en a vu un exemple en §2.1.3, partant du principe que les contributions microscopiques de chaque sous-système (e.g. biomécanique, neuronal) peuvent être intégrées séparément à l'aide de techniques d'agrégation de variables. Elles sont ramenées à une échelle de référence où, d'une part, on connaît leur expression analytique approchée, et où d'autre part leur couplage s'exprime commodément. Dans l'exemple du §2.1.3, ce niveau adéquat est l'échelle de longueur correspondant à la longueur du corps de l'animal. A cette échelle l'élongation de la patte, le niveau d'activation des muscle et le potentiel du CPG sont des grandeurs définies et qu'on sait relier fonctionnellement. Toutefois comme on l'a déjà vu, une telle étude englobant les rétroactions proprioceptives et exteroceptives ainsi que les lois régissant le milieu de l'agent n'est pas disponible à notre connaissance. Notons que ce type d'analyse n'est pas équivalent à la plupart des modèles phénoménologiques vus au chapitre 1, qui prennent en compte un nombre plus limité d'échelles et se situent donc moins dans une perspective de système.

La seconde piste de recherche tend vers une analyse statistique des dépendances, pour mettre au jour les régularités entre les différentes variables impliquées, et se nourrit des arguments suivants. Tout d'abord, certains chercheurs en neuromécaniques sont favorables à une telle approche statistique en complément de leur démarche car les résultats qu'ils obtiennent sont valables en boucle ouverte. Dans le cas d'un système intégré en boucle fermée, seule une approche statistique permet d'isoler les bassins d'attraction.

« We hypothesize that these virtual task basins are 'emergent properties' of control loop architectures that animals 'follow' in a natural manner, much as they follow attractors emerging from their mechanical characteristics within higher-speed preflexive regimes (...) We believe that it is now possible to seek and empirically characterize these virtual task basins. Data collection and analysis methods arising from the information-theoretic view of the animal nervous system (...) should be capable of supporting or refuting these hypotheses. (...) We refer to this strategy as 'dynamical data mining' » [31, §3.3.4]

Notre champ d'étude se réstreint dans le cadre de ce mémoire à des systèmes simplifiés tels que les robots mobiles dont l'apport a été discuté plus haut. Il s'agit donc, en résumant, de rassembler des observations sur les dépendances statistiques entretenues par un robot simulé ou réel avec son environnement, et ce dans une perspective écologique dont on a rappelé les exigences en début de section. L'ensemble de contraintes formulées dans cette section nous mène à un champ de recherche récent voué à l'étude des *affordances* dans le cadre de la robotique. Au cours de la section suivante, nous en examinons des exemples

et remarquons qu'ils reposent sur l'observation des dépendances statistiques. Cependant, nous objecterons que les types de dépendance statistique abordés sont limités, ce qui nous mènera à mobiliser un autre corpus détaché de l'approche écologique mais plus spécifiquement centré sur les dépendances statistiques sensorimotrices, en §2.4.

## 2.3 Affordances

Parmi les travaux en robotique mobile qui déplorent le manque d'autonomie des robots actuels<sup>23</sup>, certains se tournent vers la psychologie écologique<sup>24</sup> et s'attachent à traduire de manière concrète les concepts formulés par Gibson et al. [27, 63]. Les raisons motivant ce transfert tiennent au moins à deux facteurs : d'une part le souci de plausibilité invoqué par les roboticiens. Ensuite la recherche de solutions efficaces et peu coûteuses aussi bien en temps de calcul qu'en complexité des outils mathématiques et des structures de données à mettre en œuvre. Mais comme le soulignent Erich Rome et al. dans [51], la traduction opérationnelle des concepts de psychologie écologique tels que les *affordances* pose problème :

« In all these areas, the major problem for utilization is to find a model that is suitable for the particular usage or implementation of the affordance concept. One major difficulty for finding operational models of the affordance concept is the vast generality of Gibson's affordance definition which he simply defined for all animals. » [51, p.8]

Plus spécifiquement, la référence aux *affordances* s'appuie par exemple pour Murphy sur la compatibilité entre ses travaux menés en vision computationnelle et les principes mis en avant par la psychologie écologique.

« The concept of affordances is particularly attractive because it is compatible with reactive robotics and usually simplifies computational complexity and representational issues. Much of the work in selective, purposive, and task-directed vision is consistent with the principles of Gibson's ecological approach. » [43, p.105]

Elle se traduit concrètement par la conception d'algorithmes de commande réactifs dépourvus de structures de représentation du monde extérieur. Ils reposent sur l'extraction des signaux les plus simples possibles permettant de s'acquitter de tâches élémentaires : suivre une ligne dans un pré, garer un robot dans un espace signalé par des marqueurs dans une pièce [43]. La loi de commande est souvent inspirée de lois phénoménologiques

<sup>23</sup> "Today's mobile robot perception is insufficient for acting goal-directedly in unconstrained, dynamic everyday environment like a home, a factory or a city (...) Robust and general engineering methods for effectively and efficiently coupling perception, action and reasoning are unavailable. Interesting performance, if any, is currently only achieved by sophisticated robot programming exploiting domain features and specialities, which leaves ordinary users no chance of changing how the robot acts." [51, p.1]

<sup>24</sup> Le choix des travaux cités dans cette section s'appuie en grande partie sur l'étude bibliographique réalisée par les partenaires impliqués dans le projet européen Multisensory Autonomous Cognitive Systems (MACS), <http://www.macs-eu.org/>, et accessible dans les publications associées.

empruntées à la littérature éthologique. Murphy et al. comparent ensuite les performances des algorithmes inspirés de la *perception directe* avec celles des architectures de contrôle rattachées à l'IA, reposant sur l'extraction de caractéristiques de haut niveau, la modélisation interne de l'environnement et l'usage d'un moteur d'inférence pour la planification. Nous remarquons toutefois que dans ces travaux, les *affordances* ne sont pas "implémentées" au sens où aucune structure de données ou algorithme ne porte ce nom en tant que tel. On peut conclure que ce concept intervient, pour justifier *a posteriori* une méthode en fait classique en robotique, qui met en rapport la tâche à effectuer, les données éthologiques, les capteurs disponibles et l'algorithme de commande. Dans la suite, nous examinons des définitions plus formelles et détaillons des traductions opérationnelles de ces concepts.

### 2.3.1 Définitions formelles

Au sein même de la littérature en psychologie écologique, de multiples définitions des *affordances* se côtoient comme le rappelle [21] qui en dénombre quatre, sur lesquelles nous ne revenons pas ici. Nous citons simplement celle de Chemero (voir [21] pour les références), pour qui une *affordance* est une relation entretenue par les composants du système animal/environnement, notée :

Affords- $\phi$  (feature, ability)

où  $\phi$  est le comportement rendu possible par la mise en relation d'un aspect d'un objet (*feature*) et d'une capacité (*ability*), i.e. une propriété fonctionnelle<sup>25</sup> développée au cours de l'évolution d'une espèce et transmise à un animal particulier.

Şahin et al. ajoutent la prise en compte de l'effet obtenu, compris comme une différence perceptible d'état soit de l'environnement soit de l'agent. Ils proposent de noter<sup>26</sup> ( $e, (en, b)$ ) s'il existe une potentialité d'obtenir l'effet  $e$  par l'application du comportement  $b$  à l'entité  $en$ . Par exemple, si une bouteille peut être soulevée par le bras droit d'un robot, on notera :

(soulevé, (bouteille-noire, soulève-avec-main-droite) )

où *bouteille – noire* est une notation symbolique devant être remplacée par un ensemble de caractéristiques numériques de l'objet.

L'intérêt pour le roboticien est la définition de classes d'équivalence<sup>27</sup> permise par ce type de notation. En effet, un des griefs mentionnés plus haut à l'encontre de la robotique est son défaut de robustesse, d'adaptativité quand l'environnement change ou quand le robot ne se trouve pas exactement dans les conditions prédéfinies pour accomplir une tâche. Or en écrivant par exemple :

<sup>25</sup> ce terme lui-même pose de nombreuses questions, nous nous contentons de le reproduire sans justifier son emploi dans la littérature.

<sup>26</sup> cf [21] p.14

<sup>27</sup> Şahin et al. dérivent de nombreux autres types d'équivalence, toutefois nous ne rendons compte que de l'équivalence des entités.

(soulevé, (\*, soulève-avec-main-droite) )

on peut définir la classe des objets que le robot peut soulever à l'aide de son bras droit.

Bien entendu, cette technique nécessite de programmer la procédure de vérification du prédicat *soulve*(.,.). De plus, ce formalisme ne constitue pas une théorie, permettant d'expliquer à quelle *affordance* donne lieu la réunion d'un objet et d'un agent donnés, ou par exemple de formuler des prédictions. Il s'agit d'abord d'une notation, d'une manière de coder une observation expérimentale, qui rappelle la logique des prédicats employés dans les moteurs d'inférence, utile en planification. Comme on l'a mentionné ci-dessus, les descriptions symboliques (e.g. "bouteille noire") doivent être remplacées autant que possible par la description issue des capteurs la plus invariante possible par les transformations usuelles, ce qui pose les problèmes de l'individuation et de l'identification des objets du point de vue perceptif. En les supposant résolus, cette notation constitue un classifieur, sur une base sensorimotrice, et pas uniquement sensorielle : une fois le prédicat *lift*(.,.) encodé, l'agent pourra le vérifier pour tous les objets rencontrés, et stockera au fur et à mesure les prédicats vérifiés.

On trouve un exemple de mise en œuvre dans [25], dans le cas de la traversabilité d'une zone de l'espace par un robot. En accord avec la définition précédente, les *affordances* sont notées :

$$\langle b_i, f_k, r_i^k \rangle \quad (2.1)$$

où  $b_i$  est un comportement élémentaire pris dans un répertoire,  $f_k$  des caractéristiques sensorielles des objets (*features*), et  $r_i^k$  le résultat, i.e. ici le succès ou l'échec de la traversée d'un objet.

### 2.3.2 Traduction opérationnelle des *affordances*

Un ensemble de travaux transpose en robotique l'usage des *affordances*. Cette transposition sert des buts distincts en fonction des cas, ce que nous nous attacherons à montrer, en nous appuyant sur le travail de [25]. Pour cet auteur, l'usage des *affordances* donne lieu à deux types d'application : le guidage un comportement simple, le choix d'un comportement dans un répertoire de comportements.

#### 2.3.2.1 Pour guider le comportement

Duchon et al. implémentent dans [24] un algorithme d'évitement d'obstacle reposant sur le flot optique, et faisant référence à la psychologie écologique. Les principes généraux mis en avant et qui ont une conséquence directe sur la conception de l'algorithme sont reproduits ci-dessous :

« Based on the direct relationship between perception and action, the task of the agent is to map available information to the control parameters at its disposal in order to achieve a desired state of the system » [24, p.6]

Le concepteur doit alors à extraire les “bonnes” propriétés physiques du signal reçu qui permettent de mener à bien la tâche assignée au robot, quitte à effectuer des hypothèses restrictives sur l’environnement, rebaptisé ici “niche” par analogie. Pour cela, le concepteur s’appuiera soit sur son intuition soit sur la littérature éthologique, ou sur la cybernétique biologique, qui suggéreront des relations fonctionnelles entre certaines grandeurs macroscopiques<sup>28</sup> sensorielles et motrices. Soit par exemple  $\Delta$  le couple exercé sur le robot par ses effecteurs. Duchon et al. proposent la loi de commande suivante pour garantir l’évitement d’obstacles :

$$\Delta = k \left( \frac{\sum \|\vec{\omega}_l\| - \sum \|\vec{\omega}_r\|}{\sum \|\vec{\omega}_l\| + \sum \|\vec{\omega}_r\|} \right) \quad (2.2)$$

où  $\|\vec{\omega}_l\|$ ,  $\|\vec{\omega}_r\|$  sont les intensités du flux optique dans les parties gauche et droite du champ visuel, et  $k$  une constante.

Comment justifier ce choix ? Dans [43], Murphy rend compte de plusieurs implémentations similaires à celles de Duchon et al., pour des tâches variées telles que le parcours d’un circuit ou le ramassage d’objets. Consciente du caractère arbitraire du choix des signaux et de l’algorithme de commande sélectionnés, elle invoque leur caractère inné dans le cas des animaux. Murphy constate en comparant son implémentation à d’autres fondées sur le paradigme IA que les performances sont identiques, tout en réduisant la charge de calcul des robots. Toutefois, la sensibilité des algorithmes aux variations de conditions expérimentales et aux spécificités du matériel (e.g. capteurs) constituent une limite importante de ces méthodes. Cette approche relève plus d’un savoir-faire que d’une démarche scientifique, au sens où elle ne permet pas d’expliquer quels seront les bons capteurs, les bonnes lois de commande pour réaliser une tâche donnée, compte tenu de la nature de l’environnement et de la morphologie d’un agent.

### 2.3.2.2 Apprentissage statistique des *affordances*

Dans cette section on pose la question suivante : un robot peut-il réaliser un comportement précis dans un contexte donné, tel qu’attraper un objet ou le pousser, en l’absence de connaissance *a priori* telles qu’un modèle de l’environnement ? Pour y répondre, les chercheurs s’appuient sur une démarche empirique : tout d’abord le robot tente d’exécuter le comportement choisi, puis, à l’aide d’un critère *ad hoc* (e.g. “l’objet s’est-il soulevé ?”), la réussite de l’expérience est évaluée. Cet apprentissage présente un intérêt pour au moins deux raisons :

- d’abord il est légitime de se placer du point de vue d’un agent ignorant les lois physiques qui déterminent son interaction avec l’environnement, mais ayant accès à des indices statistiques sur la régularité de son propres comportement.
- ensuite, on peut se placer du point de vue d’un observateur souhaitant modéliser le comportement d’un système mais disposant d’une connaissance imprécise du système agent/environnement.

<sup>28</sup> cf l’exemple des fous de bassan vu en 1.2.2.4

Stoytchev s'intéresse dans [59] à la possibilité pour un robot d'attacher un objet à son corps, afin de le contrôler (*binding affordance*). Le robot est constitué d'un bras articulé muni de pinces, situé dans un environnement où sont disposés différents objets, certains adaptés à la taille de la pince, d'autres non. Le robot est programmé pour effectuer des suites de mouvements élémentaires pris au hasard dans un répertoire prédéfini. L'auteur définit ensuite des "invariants perceptifs", i.e. des fonctions permettant de quantifier la corrélation entre le mouvement d'un objet et celui du corps, dans un référentiel égocentré. Si cette corrélation établie d'après un nombre fini d'essais dépasse un certain seuil, alors l'objet est attaché au corps du robot. Moyennant la suite d'actions élémentaires effectuée, l'objet est considéré comme attachable au corps du robot.

De manière plus formelle, Stoytchev note  $O_j(t) = [o_1(t), \dots, o_n(t)]$  un vecteur d'observation des positions des coins des objets au temps  $t$ . Ces positions sont calculées dans le système de coordonnées attaché à une caméra fixe. Pour déterminer si l'objet est attaché à l'un des segments du bras robot, les positions de chacun de ses coins sont calculées dans chacun des système de coordonnées associés à ces segments. Stoytchev définit par exemple la quantités suivante, en fonction des positions des coins de l'objet exprimées dans le repère  $j$  :

$$I(O_j(t), \dots, O_j(t + \tau)) = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^c \hat{\sigma}(o_i(t), o_i(t + 1), \dots, o_i(t + \tau)) \quad (2.3)$$

où  $c$  est le nombre de coins d'un objet,  $\tau$  un paramètre fixant la durée d'un essai, et  $\hat{\sigma}$  un estimateur de l'écart-type. Si cette quantité est faible dans le repère  $j$ , le mouvement de l'objet est suffisamment proche de celui du repère lui-même, et l'objet  $y$  est considéré comme attaché.

Ces travaux sont similaires à ceux de Fitzpatrick et al. [26] à propos de la capacité de tirer et pousser des objets (*push/pull/poke affordance*). Des objets variés, susceptibles ou non d'être poussés dans une certaine direction sur une surface plane, sont cette fois tirés et poussés  $n$  fois. L'histogramme de la direction privilégiée de déplacement de l'objet en fonction de la position de départ du bras est alors estimé, mais indépendamment de la forme de l'objet considéré. Plus formellement, au cours de chaque essai, un système de poursuite centre la caméra sur l'objet cible, et mesure parallèlement la vitesse de l'extrémité du bras robot. Sont mesurés d'une part la configuration initiale du bras manipulateur, ainsi que le vecteur vitesse au moment du contact entre l'extrémité du bras et la cible. Le but de l'expérience est donc d'estimer empiriquement la fonction reliant la position initiale de l'extrémité du bras avec la direction du vecteur vitesse de la cible au moment du contact<sup>29</sup>, et d'en tirer un histogramme en coordonnées circulaires. Ceci permet dans un second temps de prendre en compte la forme des objets et d'affiner les résultats précédents. En effet, différents objets sont soumis à des poussées répétées dans plusieurs directions comme précédemment, mais c'est désormais l'angle de déplacement

<sup>29</sup> cf [26] II.A pour plus de détails.

instantané de l'objet par rapport à son axe principal d'inertie qui est mesuré. Des statistiques sur l'interaction entre les différents objets et le mouvement particulier du bras sont alors calculées, permettant de partitionner l'ensemble des objets. Comme on le verra dans la section suivante, les auteurs tirent parti de ces résultats pour exécuter une action visant un but (e.g. suivre une direction fixée), grâce à la connaissance empirique préalable des propriétés des objets.

Ugur et al. étudient de leur côté la capacité de traverser un objet (*traversability affordance*), pour un robot mobile et non un bras manipulateur comme précédemment. Si le robot peut se diriger dans une direction donnée de l'environnement sans être immobilisé des suites d'une collision, on convient de dire que le robot peut traverser<sup>30</sup> la zone qui lui fait face. Dans [25] une plateforme mobile peut effectuer des mouvements élémentaires (e.g. avancer, tourner à gauche, etc. . .) notés  $b_i$ . Elle est munie d'un télémètre laser 3D qui mesure les distances entre le robot et les objets situés à son voisinage et en extrait des *features*  $f_k$ . Comme ci-dessus, l'environnement est parsemé d'objets divers, certains susceptibles de rouler dans toutes les directions (balles), d'autre dans une seule direction (cylindres), d'autre enfin demeurant immobiles (cubes). Placé face à chacun de ces objets, il exécute tour à tour les mouvements de son répertoire et détermine dans chaque cas le résultat de cette expérience,  $r_i^k$ , i.e. s'il a pu effectuer le mouvement  $b_i$  dans la situation  $f_k$ . Itéré un grand nombre de fois, cette méthode permet d'estimer la probabilité  $p(R = r_i^k)$  de pouvoir réaliser le comportement  $b_i$  dans les conditions  $f_k$ . Comme dans les travaux de Fitzpatrick, cette étape d'inférence est mise à profit pour sélectionner l'action à accomplir lorsqu'un but est fixé.

Dans [19], Cos-Aguilera et al. conçoivent l'architecture de commande d'un agent simulé reposant sur la motivation, et l'appliquent à une tâche de ramassage d'objets. L'état interne de l'agent est défini par trois variables. A chacune d'elles est assigné un domaine de viabilité : si elles en sortent, l'essai est un échec. Si elles s'écartent de valeurs de référence, des comportements de compensation prédéfinis sont enclenchés. Lors de son exploration aléatoire de l'environnement, le robot rencontre des objets susceptibles de répondre aux comportements compensatoires. A chaque objet correspond une capacité d'interaction associée à chacun des besoins élémentaires du robot. Dans [19], ces capacités d'interaction sont prédéfinies. En revanche, dans [20] les types d'objet ainsi que les *affordances* associées à chaque objet ne sont pas connus à l'avance. L'ensemble des objets doit être partitionné à l'aide d'un algorithme de classification automatique. Les *affordances* sont définies ici comme les variations des variables internes occasionnées par une tentative d'interaction. Ces variations sont inconnues au départ, et un algorithme d'apprentissage est proposé pour trouver les valeurs associées à chaque type d'interaction. Toutefois, les types d'interaction ici sont simplifiés et prédéfinis : ils ne dérivent pas de lois physiques sous-jacentes comme

---

<sup>30</sup> "The environment is said to be traversable in a certain direction, if the robot (moving in that direction) is not enforced to stop as result of contact with an obstacle. Thus, if the robot can push an object by rolling it away, that environment is said to be traversable even if the object is on the robot's path, and a collision occur" [64, III.B]

dans [59], ou d'expériences réelles comme dans [26], ce qui limite leur pouvoir explicatif.

### 2.3.2.3 Affordances pour la sélection de comportement

Comme on l'a vu ci dessus, Stoytchev infère dans [59] les suites de mouvement donnant lieu à un attachement de l'objet au corps du robot, mais ne met pas à profit cette connaissance. A l'inverse chez [25, 19, 26], à la phase d'inférence des *affordances* succède une phase d'exécution d'une tâche orientée vers un but (*goal-directed*) au cours de laquelle les comportements potentiels sont choisis en fonction de leur effet<sup>31</sup>.

Par exemple, une fois la phase d'apprentissage achevée, Ugur et al. [25] imposent au robot la tâche de suivre une direction particulière aussi longtemps que possible. Pour cela, à chaque étape de son parcours, le robot compare l'objet face auquel il se trouve et les signatures enregistrées au cours de la phase initiale. Si cet objet a été associé à une *affordance* de traversabilité, alors le robot avance dans la direction correspondante, et ce aussi longtemps que rien ne l'empêche d'avancer.

## 2.4 Représentation de dépendances sensorimotrices

En §2.2 nous avons remarqué qu'une méthode multiéchelle était hors de portée dans l'immédiat. Ceci nous a conduit à nous limiter à une approche statistique de l'explication du comportement d'un agent artificiel dans son environnement, tributaire de l'accessibilité et de l'abondance des mesures expérimentales.

La volonté de prendre en compte les principes établis en psychologie écologique pousse de nombreux roboticiens à traduire le concept d'*affordance* de manière opératoire dont on a passé en revue quelques exemples dans la section précédente.

Nous nous situons au niveau de l'inférence des *affordances*, en amont des travaux mettant ce niveau à profit pour accomplir une tâche prédéfinie, telle que suivre un chemin ou se rendre en un point donné de l'espace. Dans tous les cas rencontrés, sont prédéfinis :

- un répertoire de comportements moteurs élémentaires, pouvant être composés les uns avec les autres.
- un ensemble de situations (e.g. types d'objets rencontrés), résultant d'une classification non supervisée de données sensorielles continues<sup>32</sup>.
- un critère de succès de ce comportement dans la situation considérée, à valeur dans  $\{0, 1\}$ .

Pour ne plus se limiter aux comportements élémentaires discrets nous proposons de rendre compte de la structure des dépendances sensorimotrices associée à chaque interac-

---

<sup>31</sup> "the mapping (...) may be inverted to select the motor act that causes a particular visual change" [26] p.5

<sup>32</sup> il s'agit d'un abus de langage pour parler des flottants. En statistique, cette distinction ne a les mêmes problèmes qu'en modélisation, par exemple par résolution d'équation différentielle numérique.

tion entre un comportement moteur et une situation, pour donner une valeur explicative aux données observées.

Par exemple chez un robot certaines cartes sensorimotrices sont utilisées pour la commande motrice ; d'autre n'ont pas de rôle dans la commande du robot, mais permettent d'expliquer les dépendances qui s'instaurent lors de l'exécution d'une tâche imposée par un loi de commande imposée. Nous procédons de manière progressive depuis la thématique de construction de cartes cartésiennes, qui a joué un rôle historique en permettant de confronter des apports de plusieurs disciplines (éthologie, psychologie, neurosciences) et fait toujours l'objet de recherches actives en robotique mobile.

## 2.4.1 Carte sensorimotrice pour parvenir à un but

### 2.4.1.1 Cartes cartésiennes

La cognition spatiale est étudiée de plusieurs points de vue, l'un d'entre eux étant dédié aux facultés cognitives de haut niveau nécessaires à la navigation. Ces études héritent autant de travaux en éthologie qu'en psychologie expérimentale à partir de l'hypothèse de Tolman [62] sur les cartes cognitives chez le rat. Par ailleurs, un corpus s'est constitué en neurosciences à la suite de l'observation expérimentale de cellule de lieux (*place cells*) par O'Keefe et Dostrovsky, dans l'hippocampe des rats.

En robotique mobile, une vaste littérature s'est développée autour de la localisation et la construction de carte (*self-localization and mapping*). On distingue en particulier les cartes métriques et topologiques : les premières supposent un système de coordonnées commun dans lequel à chaque objet est associée une position ce qui permet des calculs de distance. En revanche, les cartes topologiques ne rendent compte que des relations de voisinages entre des lieux, identifiés par des symboles ; toutefois elles permettent également à un robot de se rendre d'un lieu à un autre.

La construction de carte fait intervenir deux types d'informations : les données idiothétiques sur les mouvements de l'agent (accélération, vitesse instantanée), permettant notamment d'approcher la position par intégration numérique. Les données allothétiques concernent en revanche l'environnement ; on citera par exemple la reconnaissance d'amers ou le calcul de distances à l'aide d'un télémètre (cf [41]). L'algorithme le plus simple de construction de carte est la méthode incrémentale : on de donne une carte initialement vierge sur laquelle on ajoute au fur et à mesure de l'exploration les différents objets ou caractéristiques perçues de l'environnement (segments de droite, coins, etc...). L'occupation de chaque cellule de l'environnement peut être décrite de manière probabiliste, les informations déjà rassemblées peuvent être corrigées ou pas en fonction de l'exploration ultérieure du robot.

### 2.4.1.2 Apprentissage de chemin

A mi-chemin entre les cartes cognitives et l'apprentissage par renforcement qui prend pour objet les couples perception/action à un moment donné se trouvent plusieurs travaux mettant à profit les actions motrices pour se localiser dans l'environnement. Nehmzow et al. affirment dans [44] que l'action motrice et l'acquisition des données des capteurs ne doivent pas être distinguées, et s'attachent à le démontrer en implémentant un algorithme de localisation qui ne prend en compte que les commandes motrices assignées à un robot mobile au fur et à mesure de l'exploration de l'environnement. Pour cela le robot est pourvu d'un ensemble de comportements élémentaires (e.g. évitement d'obstacle, suivi de mur), qui font appel aux signaux capteurs pour produire la commande motrice. Le robot explore son environnement grâce à ces primitives pendant un temps déterminé, en enregistrant des suites de commandes motrices de longueur finie produites au fur et à mesure. A la fin de cette période d'apprentissage, une carte est construite par classification<sup>33</sup> à l'aide des suites de commandes motrices stockées. Puis commence la phase de restitution, au cours de laquelle le robot est placé au hasard dans l'environnement. Les suites de commande produites peuvent être associées, grâce à la carte, aux situations déjà rencontrées ; on peut donc interpréter ce procédé comme une construction de carte motrice de l'environnement. Des résultats similaires sont obtenus par Brooks et Mataric avec le robot TOTO dans [40].

### 2.4.1.3 Apprentissage par renforcement

Dans les problèmes d'apprentissage par renforcement (AR) on considère un agent prenant en entrée un vecteur  $X(t)$  et produisant une action  $a(t)$ . Un système d'évaluation assigne une valeur  $r(t)$  au produit de l'interaction de l'agent avec son environnement, après un intervalle de temps fixe. Ce principe est schématisé Fig. 2.1, d'après [23].

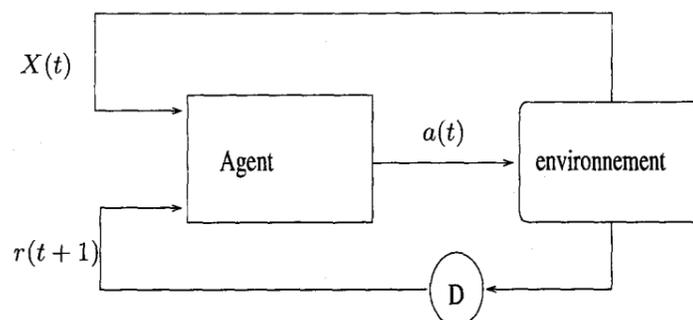


FIG. 2.1 – Schéma de l'apprentissage par renforcement, d'après [23].

Le but des algorithmes d'AR est de parvenir à la meilleure association possible entre

<sup>33</sup> plus précisément il s'agit d'une carte auto-organisatrice de Kohonen.

les états perçus  $X(t)$  du système et les actions  $a(t)$  entreprises de sorte que la somme des renforcements  $\sum_{t>t_0} r(t)$  soit la plus grande possible. Ces méthodes se situent entre les techniques d'apprentissage supervisé et non supervisé. Pour les premières, on dispose d'une mesure précise de l'erreur commise par l'agent au cours de l'apprentissage d'une relation fonctionnelle entre l'entrée et la sortie. Dans le second cas, on ne dispose pas de bonnes réponses *a priori* mais on peut définir des critères de qualité de classification, telle que l'inertie (cf [53, §11.2]). L'AR s'assimile à un apprentissage semi-supervisé dans la mesure où on dispose d'un signal d'erreur souvent pauvre et n'indiquant pas comment corriger l'association proposée par l'algorithme [61, 23].

Il est possible d'établir une analogie entre ce problème et celui posé en §2.3.2.2, en empruntant par exemple la notation de Ugur et al. en (2.1), comme l'illustre la Tab. 2.1.

Inférence	$b_i$	$f_k$	$r_i^k$
AR	$a(t)$	$X(t)$	$r(t+1)$

TAB. 2.1 – Analogie entre apprentissage par renforcement (AR) et inférence des *affordances*.

En effet, le comportement  $b_i$  et l'action  $a(t)$  sont proches, mais pas confondus car les comportements  $b_i$  peuvent être produits par des modules sensorimoteurs élémentaires, donc ne pas se limiter à une action motrice uniquement.  $f_k$  est associé à une situation, à un sous-système de l'environnement décrit par des caractéristiques sensorielles, alors que  $X(t)$  ne suppose pas ce type de référence. Enfin  $r_i^k$  et  $r(t+1)$  correspondent tous les deux à un signal de succès ou d'erreur pauvre.

Que tirer de cette analogie ? Bien qu'elle suggère des développements fructueux, nous considérons qu'elle ne répond pas aux exigences formulées dans l'introduction de cette section §2.4. En effet, selon nous, la représentation perception/action ne donne pas accès à la structure des dépendances sensorimotrices associées à chaque interaction entre un comportement moteur et une situation. Pour cette raison, nous nous tournons en §2.4.2 vers des représentations plus détaillées, mais déconnectées de la commande effective du robot.

#### 2.4.1.4 Reconstruction sensorimotrice

Pierce et Kuipers dans [22] se donnent pour objectif d'inférer la structure de l'appareil sensorimoteur d'un robot ainsi que celle de son environnement. Les hypothèses de départ restreignent le champ d'étude à des lois de commande approximativement linéaires, et à des environnements continus et immobiles. Cette "reconstruction" nécessite d'abord l'"apprentissage du système sensoriel" (*learning sensory apparatus*) puis l'apprentissage du système moteur.

La première étape nécessite de disposer d'un ensemble de capteurs, et des suites de valeurs mesurées par ces capteurs pour des instants de temps échantillonnés, alors que les

#### 2.4. Représentation de dépendances sensorimotrices

commandes motrices sont choisies au hasard. Ce que les auteurs nomment “apprentissage du système sensoriel” est la recherche de capteurs proches les uns des autres au sens d’une certaine distance. Pour quantifier la distance entre deux capteurs, les auteurs proposent plusieurs métriques parmi lesquelles :

$$d_{ij}^{(1)}(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |x_i(k) - x_j(k)| \quad (2.4)$$

$$d_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_b |H_{x_i}(b) - H_{x_j}(b)| \quad (2.5)$$

où  $H_{x_i}(b)$  représente le nombre d’échantillons du  $b$ -ème *bin* de l’histogramme de  $x_i$ . Pour former des groupes de capteurs proches au sens de la métrique ci-dessus, ils introduisent les relations suivantes :

$$\varepsilon_{k,i} = 2 \min_j \{d_{k,ij}\} \quad (2.6)$$

$$i \approx_k j \iff d_{k,ij} < \min\{\varepsilon_{k,i}, \varepsilon_{k,j}\} \quad (2.7)$$

$$i \approx j \iff \forall k, i \approx_k j \quad (2.8)$$

$$i \sim j \iff i \approx j \vee (\exists k, (i \sim k) \wedge (k \sim j)) \quad (2.9)$$

en notant  $\wedge$  le *et* logique. La relation (2.9) est une relation d’équivalence, grâce à laquelle on peut partitionner l’ensemble des capteurs en classes d’équivalence. Pierce et Kuipers donnent une représentation visuelle intuitive de l’ensemble de capteurs en les associant à des points représentatifs dans un espace. Cependant nous n’avons pas accès à cet espace, mais connaissons les distances entre chacun des couples de capteurs. L’idée consiste alors, en partant de l’ensemble des distances dans l’espace des capteurs, à projeter les points représentatifs des capteurs dans un espace de dimension faible en préservant les distances. Il est possible de déterminer la dimension de l’espace la plus faible qui autorise cette projection tout en préservant les distances grâce aux classes d’équivalence déjà disponibles, mais aussi de trouver les meilleurs positions des points dans le nouvel espace de sorte que les contraintes soient respectées le plus fidèlement possible [22, §2.4]. Le résultat obtenu est une surface plane sur laquelle sont répartis des points figurant les capteurs, en respectant les relations métriques existant dans l’espace des capteurs.

Dans un second temps les auteurs se tournent vers l’“apprentissage du système moteur”, i.e. la découverte de types de mouvement susceptibles d’être exécutés par le robot, ainsi que l’identification des commandes motrices susceptibles de produire ce mouvement. Pour cela, l’espace des commandes motrices possibles est partitionné, un représentant étant assigné à chaque classe. Des suites de commandes motrices prises au hasard parmi ces représentants sont successivement appliquées un nombre fini de fois, dans des situations variables. Pour tous les capteurs est alors calculée une vitesse d’évolution, leur ensemble formant le champ de vitesse des capteurs. Ici l’hypothèse de linéarité est mise à profit en effectuant une analyse en composantes principales (ACP) de l’ensemble des champs

de vitesse moyennés, ce qui permet d'exhiber une base réduite correspondant aux valeurs propres de plus grande amplitude. Enfin chacun des vecteurs propres de cette base réduite de champs de vitesse est associé à l'un des représentants de l'espace de commandes motrices ; elles sont alors nommées *primitives d'action*, chacune correspondant alors à l'un des degrés de liberté du robot. A l'issue de ce processus, l'observateur, muni des algorithmes décrits, connaît le nombre de degrés de liberté du système et peut produire des commandes correspondant à chacun de ces degrés de liberté. L'objectif des concepteurs est de mettre à disposition de l'utilisateur une interface abstraite rendant transparente la dynamique particulière du robot, afin de le piloter de manière intuitive grâce à des instructions de haut niveau. Plus, il s'agit à terme de modéliser l'environnement comme une carte abstraite masquant ses détails, et ne révélant que les objets utiles et reconnaissables<sup>34</sup>. Ces résultats sont toutefois limités par les hypothèses de linéarité de l'ensemble des mouvements réalisables, et sont à rapprocher par exemple des travaux de Philipona et al. [49, 50] valables sans hypothèse de linéarité dans le cadre plus rigoureux de la géométrie différentielle.

Plusieurs travaux s'inspirent de l'article de Pierce et Kuipers. Citons ceux de Olsson et al. [46, 47] qui remplacent les distances proposées dans [22] par des mesures tirées de la théorie de l'information, telles que l'*information mutuelle* qui quantifie le degré de dépendance statistique entre deux variables aléatoires sans hypothèses de linéarité (cf chapitre 3). Le calcul du champ de vitesse est réalisé cette fois à l'aide d'algorithmes de calcul du flot optique. En résumé la démarche est donc celle-ci :

1. création d'une carte *sensoritopique* i.e. représentant deux capteurs d'autant plus proches l'un de l'autre que leur information mutuelle est élevée.
2. inférence de l'effet d'un ensemble de commandes motrices élémentaires.
3. inversion de la fonction ainsi obtenue et choisir les commandes motrices permettant de réaliser une tâche prédéfinie.

Une différence importante réside dans la recherche chez [22] d'une base de l'ensemble des champs de vitesse, afin d'en déduire une base de l'espace des commandes élémentaires correspondant à chaque degré de liberté. Olsson et al. ne conduisent par cette analyse, mais choisissent un ensemble de commandes élémentaires sans les déduire d'une étude algébrique de l'espace des mouvements observés possibles. Dans la suite, on se tourne vers des études où seul l'apprentissage de l'appareil sensoriel est examiné, au profit d'un accroissement du niveau de détail.

#### 2.4.2 Causalité et réseau sensorimoteur

En §2.4.1.4 la discussion portait sur l'inférence de l'activité de l'appareil sensorimoteur d'un agent afin de réaliser un but. Pierce et Kuipers se donnent une base de l'ensemble

---

<sup>34</sup> "Abstract the continuous world of a robot or a cognitive map by which the world is viewed as a discrete set of recognizable places with well-defined paths connecting them" [22, p.21]

des mouvements observés et en déduisent une base des commandes motrices. Olsson et collègues se donnent directement une base de commandes motrices. Dans les deux cas, le but final est d'automatiser le choix des commandes motrices appropriées pour réaliser un objectif.

Dans la littérature, certains travaux se limitent aux premières étapes de ce raisonnement comme le montre l'exemple de [32], dans le cadre de la théorie de l'information, pour un robot quadrupède AIBO. L'abandon du but peut avoir pour contrepartie un accroissement du niveau de détail dans la représentation des interactions sensorimotrices, ce qui correspond aux objectifs fixés plus haut.

#### 2.4.2.1 Causalité

L'*information mutuelle* est une mesure symétrique de la dépendance statistique entre deux variables aléatoires. Ceci ne signifie pas qu'elle soit aveugle aux dépendances statistiques unidirectionnelles, comme c'est le cas d'une dépendance fonctionnelle entre deux variables<sup>35</sup>. Cependant elle ne rend pas compte de la causalité, pour laquelle de nombreuses mesures sont proposées dans la littérature (cf [30] pour une revue), telle que l'entropie de transfert introduite par Schreiber [55]. Celle-ci présuppose l'existence de deux processus  $I$  et  $J$ ; s'ils sont indépendants alors la propriété généralisée de Markov est vérifiée :

$$p(i_{n+1}|i_n^{(k)}, j_n^{(l)}) = p(i_{n+1}|i_n^{(k)}) \quad (2.10)$$

où  $i_n$  est l'état discret de  $I$  au temps  $n$ ,  $i_n^{(k)} = (i_n, \dots, i_{n-k+1})$  et  $j_n^{(l)} = (j_n, \dots, j_{n-l+1})$ . L'idée de l'entropie de transfert est alors de quantifier la déviation par rapport à la propriété de Markov en s'inspirant de la divergence de Kullback-Leibler (cf chapitre 3 pour plus de détails) :

$$T_{J \rightarrow I} = \sum_{i,j,n} p(i_{n+1}, i_n^{(k)}, j_n^{(l)}) \log \frac{p(i_{n+1}|i_n^{(k)}, j_n^{(l)})}{p(i_{n+1}|i_n^{(k)})} \quad (2.11)$$

Lungarella et Sporns considèrent par exemple dans [37] un agent comme un réseau sensorimoteur couplant les niveaux sensoriels, moteurs et neuronaux avec l'environnement, à plusieurs échelles temporelles. Pour donner une expression formelle à cette position, ils s'appuient précisément sur l'entropie de transfert vue ci-dessus. Ces auteurs montrent que le flot d'information entre les senseurs et les effecteurs d'un robot mobile dépend de l'échelle de temps, des zones de l'espace sensoriel, de la disposition des capteurs les uns par rapport aux autres. Pour cela ils examinent les données renvoyées à chaque pas de temps par une caméra couleur basse résolution. Si on note  $s_{ij}(t)$  l'ensemble des variables aléatoires associées au pixel  $(i, j)$  de l'image renvoyée par la caméra, et  $m(t)$  l'état d'un

<sup>35</sup> Supposons par exemple que  $Y$  dépende complètement de  $X$  de sorte que  $Y = f(X)$ , sans que  $X$  dépende de  $Y$ . Alors  $H(Y|X) = 0$ , donc  $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y)$ . Si à l'inverse  $X = f(Y)$ , alors  $I(X, Y) = H(X)$

effecteur pris parmi l'ensemble des effecteurs d'un robot, la quantité qui intéresse ces auteurs est  $T_{s_{ij}(t) \rightarrow m(t)}$ , pour tous les pixels  $(i, j)$  de l'image de départ. Pour résumer, cette mesure est utile car elle introduit la notion de causalité, et qu'elle adopte une perspective systémique faisant intervenir l'environnement, la géométrie de l'ensemble des capteurs, le type de tâche exécutée. Cependant elle ne rend pas compte de la structure des dépendances statistiques entre les différents senseurs et effecteurs, mais de la juxtaposition<sup>36</sup> des  $T_{s_{ij}(t) \rightarrow m(t)}$ , pour un seul effecteur.

#### 2.4.2.2 Graphe de causalité

Comme dans les travaux précédents Seth propose dans [56] d'analyser les influences respectives de la tâche imposée et de l'environnement dans la modulation de l'activité interne d'un robot, piloté par un réseau de neurones. Pour expliquer l'activité du réseau il mobilise d'autres outils : un modèle ARMA<sup>37</sup> multivarié et la théorie des graphes. Le but est donc d'identifier l'activité de l'agent à un réseau de connectivité causal pour lui appliquer des principes d'analyse bien établis en statistiques des séries temporelles et en théorie des graphes.

Le robot étudié, préprogrammé comme dans les cas précédents, comporte un système tête/œil simulé. L'implémentation d'une tâche de poursuite et de fixation d'une cible repose sur un réseau de neurones formels prenant en entrée les senseurs proprioceptifs et visuels, et commandant en sortie les actuateurs du robot.

Le cadre de modélisation est celui de la causalité de Granger [28], distinct des concepts de théorie de l'information tels que l'information mutuelle. Elle repose sur l'assimilation des grandeurs étudiées à des processus stochastiques et se propose de vérifier leur adéquation avec un processus ARMA multivarié. Pour un modèle bivarié on écrirait par exemple :

$$X_1(t) = \sum_{k=1}^p a_{11,k} X_1(t-k) + \sum_{k=1}^p a_{12,k} X_2(t-k) + e_1(t) \quad (2.12)$$

$$X_2(t) = \sum_{k=1}^p a_{21,k} X_1(t-k) + \sum_{k=1}^p a_{22,k} X_2(t-k) + e_2(t) \quad (2.13)$$

où  $p$  est l'ordre du modèle,  $e_1, e_2$  des résidus, et  $\{a_{ij}\}$  des coefficients à déterminer. Si le signal  $X_2$  cause le signal  $X_1$  alors les valeurs passées de  $X_2$  permettent de prédire  $X_1$  mieux que les valeurs passées de  $X_1$  seules. Plus précisément, si la variance de l'erreur de prédiction  $E_1$  est réduite quand on inclut  $X_2$  dans la première équation alors  $X_2$  cause  $X_1$  au sens de Granger.

Ayant déterminé s'il existe des relations de causalité significatives au sens de Granger, Seth représente ces relations sous forme de graphe et définit les caractéristiques de sa

<sup>36</sup> cf [37] section *Effects of Sensorimotor Coupling on Information Structure and Flow* pour plus de précisions.

<sup>37</sup> processus stochastique autoregressif.

connectivité en s'inspirant de la théorie des graphes (e.g. densité causale, déséquilibre causal, puits et source de causalité). L'analyse de la modulation de l'activité du réseau de neurones par interaction avec l'environnement met en évidence :

- une orientation causale globale partant des neurones visuels ("exteroception") vers les neurones moteurs<sup>38</sup>, et la prépondérance d'un certain type de senseurs (ici les neurones exteroceptifs par rapports aux neurones proprioceptifs).
- une corrélation entre les variations de la complexité de l'environnement<sup>39</sup> et la densité causale du réseau.

En résumé, ces outils permettent d'analyser la structure fine des relations de dépendance statistique dans un réseau sensorimoteur et d'autre part d'examiner les influences de la complexification de l'environnement ou de la tâche assignée au robot ; cependant ils nécessitent d'admettre les présupposés de la causalité de Granger, notamment la définition de causalité, mais aussi les hypothèses fortes de stationarité et de linéarité.

## 2.5 Discussion et proposition

### 2.5.1 Discussion

Résumons le chemin parcouru depuis le début de ce mémoire : au cours du chapitre 1, nous avons retracé une généalogie partielle des courants ayant influencé l'étude actuelle de la perception sensorimotrice, notamment au travers de la psychologie écologique et des approches dynamiques de la cognition. Au cours de ce chapitre, nous avons décrit la perception sensorimotrice artificielle par rapport à l'Intelligence Artificielle, la robotique comportementale jusqu'à la neuroéthologie computationnelle et les études intégrées de neuromécanique de la locomotion.

Deux problématiques principales s'entremêlent et parcourent l'ensemble de ces travaux :

- d'un côté, la volonté d'expliquer les phénomènes naturels par la conception de modèles simplifiés, soucieux de reproduire les mécanismes à l'œuvre dans la nature.
- de l'autre, l'optimisation des performances pour une tâche donnée, en s'inspirant des certains mécanismes observés dans la nature, et en laissant de côté l'ensemble des relations de dépendances à différentes échelles spatiales et temporelles, nécessaires à la première.

Nous avons mentionné plusieurs pistes de recherche appartenant à la première école, et soulignons d'une part la perspective systémique et d'autre part la nécessité qui s'en dégageait d'intégrer plusieurs échelles. Nous remarquons que les travaux de Arbib, Arkin, Beer, Cliff, Edelman, Holmes et al. traitent des mécanismes prépondérants aux échelles microscopiques (neurones, CPG, fibres musculaires, ...), à l'échelle macroscopique du système

<sup>38</sup> ces résultats contredisent a priori ceux de Lungarella et Sporns, mais un examen plus approfondi s'impose.

<sup>39</sup> cf [56] pour les définitions.

musculosquelettique et des comportements coordonnés élémentaires (e.g. locomotion, saisie d'une proie, évitement d'obstacle, ...), et enfin que ces niveaux peuvent être reliés fonctionnellement. Cependant le rapport avec les niveaux les plus élevés, comme la modulation des comportements en fonction de l'environnement ou l'organisation à long terme de ces différents comportements est moins explicite.

Nous notons enfin en §2.3 que les formalisations des *affordances* dans la littérature robotique sont essentiellement statistiques, démarche cohérente avec les suggestions de Holmes et al., conscients des limites actuelles de la modélisation multiéchelle (cf chapitre 5).

Parmi les travaux mentionnés, deux catégories se dessinent :

1. l'"apprentissage du système sensorimoteur" doit se comprendre comme l'apprentissage d'une fonction  $f$  : commande  $\rightarrow$  effet, qui à une commande choisie au hasard dans un ensemble discret associe une variation statistiquement significative des mesures renvoyées par les capteurs [22, 47].
2. la formalisation des affordances est assimilable à l'apprentissage d'une fonction  $f$  : commande  $\times$  situation  $\rightarrow$  effet qui prend également comme argument la "situation", i.e. le plus souvent le type d'objet avec lequel le robot interagit. Dans certains cas, l'effet est un scalaire ou un champ de vecteurs décrivant le mouvement produit par l'interaction (e.g. angle de la trajectoire d'un objet avec le bras du robot) [26, 47, 22], dans d'autres cas [60, 64, 33] il s'agit d'un booléen caractérisant le succès ou l'échec de la tâche demandée (e.g. traversabilité). Le succès est déterminé par des critères *ad hoc* tels que la comparaison entre une distance effective parcourue et une distance tabulée [64, 33], ou par la corrélation entre le mouvement du robot et le mouvement d'un objet qui doit y être attaché [60]. Dans le premier cas, l'activité des effecteurs est délaissée au profit de l'évaluation du mouvement de l'agent par rapport à son environnement. Dans le second cas, elle est masquée par le critère de succès.

Dans ces deux cas, à la première étape d'apprentissage succède en général une tâche de satisfaction d'un objectif, tel que déplacer le robot dans une direction donnée, se déplacer au hasard en évitant les obstacles, ou pousser un objet dans une direction préassignée. Pour cela, la fonction  $f$  est inversée : on connaît désormais l'effet souhaité (e.g. se déplacer dans une direction donnée) et la situation actuelle (e.g. faire face à un cube), et l'on cherche la commande appropriée pour obtenir cet effet [26, 64, 22, 47].

Selon nous, la description de l'effet devrait donner un part symétrique à l'activité des senseurs et à celle des effecteurs, et expliciter leurs dépendances de manière détaillée, ce qui n'est pas le cas hormis dans les travaux de Seth et al. [56], établis dans un cadre causal mais qui souffrent cependant de l'hypothèse de linéarité. Nous développons ce point de vue ci-dessous et mobilisant des outils provenant de la théorie de l'information et de la théorie des graphes et matrices aléatoires.

### 2.5.2 Proposition

Nous ne traitons pas dans ce mémoire le problème inverse, qui consiste à choisir les commandes appropriées pour accomplir un objectif défini *a priori* (cf [22, 26, 33]).

Nous reprenons l'objectif d'apprentissage d'une application  $f$  définie comme suit :

$$f : \text{commande} \times \text{situation} \rightarrow \text{effet} \quad (2.14)$$

en définissant un ensemble discret de comportements, mais en remplaçant l'effet par une description de l'activité du robot vu comme un réseau sensorimoteur aléatoire dont les nœuds seraient les capteurs et les effecteurs du robot. En effet, nous ne souhaitons pas associer à chaque expérience un indicateur de succès de la tâche comme dans [64, 59, 33], car ce succès est défini par l'observateur, de manière externe au robot.

A chaque expérience doit être associée une description précise de l'interaction sensorimotrice du robot avec son environnement, pour dresser à terme un relevé des activités possibles du réseau étant donné le type de robot et la situation particulière dans laquelle il se trouve au sein de l'environnement.

Nous souhaitons pour cela un niveau de détail élevé, ne se limitant pas à un relevé du champ des vitesses mesurées par les capteurs [22], mais associant les différents composants du réseau sensorimoteur, comme dans [47, 32, 37]. Comme dans les travaux de Seth [56] nous souhaitons qu'un rôle équivalent soit donné aux senseurs et aux effecteurs dans la description de l'effet. Afin de mesurer les relations de dépendances entre les différentes unités du réseau sensorimoteur, nous devons nous passer d'hypothèses de linéarité (ce qui exclut la causalité de Granger mise en œuvre dans [56]) mais pas de la représentation sous forme de graphe qui nous semble appropriée du fait du niveau de détail qu'elle permet de maintenir, mais aussi à cause du rapport entre le niveau local et global qu'elle autorise, comme on le verra ci-dessous.

La théorie de l'information employée par [37, 32, 47] nous semble donc adaptée, pourvu que soient prises en compte toutes les interrelations possibles, à l'inverse de [37], et éventuellement encodées sous forme de graphe comme dans [56]. Nous souhaitons de plus que le relevé des dépendances statistiques ne soit pas restreint aux statistiques d'ordre 2, mais puisse s'étendre aux statistiques d'ordre supérieur, pour des raisons qui apparaîtront au cours du chapitre 3. Ceci exclut donc le transfert d'entropie utilisé par Lungarella et Sporns, au profit de l'information mutuelle et de ses extensions algébriques.

Pour finir on a constamment mis en avant l'importance des relations entre différentes échelles d'observation. Au cours du chapitre suivant, nous verrons que l'encodage sous forme de graphe (ou la généralisation d'un graphe pour des relations  $n$ -aires) permet précisément d'explorer les dépendances entre niveau local et global par l'intermédiaire des propriétés des matrices et graphes aléatoires.

Nous formalisons ces contraintes au cours du chapitre 3 et donnons de nombreux exemples de mise en œuvre avec un répertoire simplifié de comportements.

## Bibliographie

- [1] Y. Aloimonos. Is visual reconstruction necessary? Obstacle avoidance without passive ranging. *Journal of Robotic Systems*, 9 :843–858, September 1992.
- [2] R. Arkin, A. Kahled, A. Weitzenfeld, and F. Cervantes-Prez. Behavioral models of the praying mantis as a basis for robotic behavior. *Robotics and Autonomous Systems*, 32(1) :39–60, Jul 2000.
- [3] Ronald C. Arkin. Reactive robotic systems. Technical report, Georgia Tech, College of Computing, 1995.
- [4] W.R. Ashby. *Design for a Brain*. Chapman & Hall, 1952.
- [5] R.D. Beer. The dynamics of adaptive behavior : A research program. *Robotics and Autonomous Systems*, 20 :257–289, 1997.
- [6] R.D. Beer. Dynamical approaches to cognitive science. *Trends in Cognitive Sciences*, 4(3) :91–99, March 2000.
- [7] R.D. Beer. Beyond control : The dynamics of brain-body-environment interaction in motor systems. In *Progress in Motor Control V : A Multidisciplinary Perspective*. Springer, 2007.
- [8] V. Braitenberg. *Vehicles : Experiments in Synthetic Psychology*. MIT Press, Cambridge, MA, 1984.
- [9] R. Brooks. The relationship between matter and life. *Nature*, 409 :409–411, January 2001.
- [10] R. A. Brooks. A robust layered control system for a mobile robot. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA-2(1) :14–23, 1986.
- [11] R.A. Brooks. Intelligence without representation. *Artificial Intelligence*, 47 :139–159, 1991.
- [12] H. Chiel and R.D. Beer. The brain has a body : adaptive behavior emerges from interaction of nervous system, body and environment. *Trends in Neurosciences*, 20 :553–557, 1997.
- [13] W.J. Clancey. *Situated Cognition : On Human Knowledge and Computer Representations*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1997.
- [14] D. Cliff. Computational neuroethology. In *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks, 2nd edition*, M.A. Arbib (ed). MIT Press, 2003.
- [15] Dave Cliff, Phil Husbands, and Inman Harvey. Explorations in evolutionary robotics. *Adapt. Behav.*, 2(1) :73–110, 1993.
- [16] David Coombs, Martin Herman, Tsai-Hong Hong, and Marilyn Nashman. Real-time obstacle avoidance using central flow divergence and peripheral flow. In *ICCV*, pages 276–283, 1995.

- 
- [17] R. Cordeschi. The enchanted loom : Chapters in the history of neuroscience. In *Brain, mind and computers*, pages 294–300, Oxford, 1991. Oxford University Press.
- [18] R. Cordeschi. *The Discovery of the artificial. Behavior, mind and machines before and beyond cybernetics*. Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [19] I. Cos-Aguilera, L. Cañamero, and G.M. Hayes. Motivation-driven learning of object affordances : First experiments using a simulated khepera robot. In *Proceedings of the 9th International Conference in Cognitive Modelling (ICCM'03)*, Bamberg, Germany, 4 2003.
- [20] I. Cos-Aguilera, L. Cañamero, and G.M. Hayes. Using a sofml to learn object affordances. In *Proceedings of the 5th Workshop of Physical Agents*, Girona, Catalonia, Spain, 3 2004.
- [21] E. Şahin, M. Cakmak, M.R. Dogar, E. Ugur, and G. Ucoluk. To afford or not to afford : A new formalization of affordances towards affordance-based robot control. *Adaptive Behavior*, in press, pages –, 2007.
- [22] Pierce D. and Kuipers B.J. Map learning with uninterpreted sensors and effectors. *Artificial Intelligence*, 92(1) :169–227, 1997.
- [23] F. Davesne. *Étude de l'émergence de facultés d'apprentissage fiables et prédictibles d'actions réflexes, à partir de modèles paramétriques soumis à des contraintes internes*. PhD thesis, Université Evry Val d'Essonne, Laboratoire Systèmes Complexes, Avril 2002.
- [24] A.P. Duchon, L.P. Kaelbling, and W.H. Warren. Ecological Robotics. *Adaptive Behavior*, 6(3-4) :473–507, 1998.
- [25] Ugur E. Direct perception of traversability affordance on range images through learning on a mobile robot. Master's thesis, Middle East Technical University, Sept. 2006.
- [26] P. Fitzpatrick, G. Metta, L. Natale, S. Rao, and G. Sandini. Learning about objects through action : Initial steps towards artificial cognition. In *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '03)*, 2003.
- [27] J.J. Gibson. *The Ecological Approach to Visual Perception*. Houghton Mifflin, Boston, 1979.
- [28] C.J. Granger. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*, 37(424), 1969.
- [29] S. Helmreich. Artificial intelligence, artificial life, and alternatives to computationalism and objectivism. *Stanford Electronic Humanities*, 4(2) :-, 1995.
- [30] K. Hlavackova-Schindler, M. Paluš, M. Vejmelka, and J. Bhattacharya. Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis. *Physics Reports*, 441(1) :1–46, March 2007.

## Bibliographie

---

- [31] Philip Holmes, Robert J. Full, Dan Koditschek, and John Guckenheimer. The dynamics of legged locomotion : Models, analyses, and challenges. *SIAM Review*, 48(2) :207–304, 2006.
- [32] F. Kaplan and V. Hafner. Mapping the space of skills : an approach for comparing embodied sensorimotor organizations. In *Proceedings of 2005 4th International Conference on Development and Learning*, pages 129–134. IEEE, 2005.
- [33] D. Kim, J. Sun, S.M. Oh, J.M. Rehg, and A.F. Bobick. Traversability classification using unsupervised on-line visual learning for outdoor navigation. In *Proceedings of IEEE 2006 International Conference on Robotics and Automation*, Orlando, Florida, 2006.
- [34] J.L. Krichmar and G.M. Edelman. Principles underlying the construction of brain-based devices. In *Adaptation in Artificial and Biological Systems*, T. Kovacs, and J. A. R. Marshall, pages 37–42, Bristol, UK, 2006. Society for the Study of Artificial Intelligence and the Simulation of Behaviour.
- [35] Jim-Shih Liaw, Ananda Weerasuriya, and Michael A. Arbib. Snapping : a paradigm for modeling coordination of motor synergies. *Neural Netw.*, 7(6-7) :1137–1152, 1994.
- [36] G. Longo. *The Turing Test Sourcebook*, chapter Laplace, Turing and the imitation game impossible geometry : randomness, determinism and programs in Turing’s test. Springer, 2007.
- [37] M. Lungarella and O. Sporns. Mapping information flow in sensorimotor networks. *PLoS Computational Biology*, 2(10), 2006.
- [38] D.M. Lyons. A schema-theory approach to specifying and analysing the behavior of robotic systems. In *Prerational Intelligence*, (Eds. Ritter, Cruse Dean), Dordrecht/Boston/London, 2000. Kluwer Academic.
- [39] M. Mataric. Situated robotics. In *Encyclopedia of Cognitive Sciences*. Nature Publisher Group, 2002.
- [40] M. Mataric and R.A. Brooks. Learning a distributed map representation based on navigation behaviors. In *Proceedings of USA/Japan symposium on flexible automation*, pages 499–506, Kyoto, 1990.
- [41] J.A. Meyer and D. Filliat. Map-based navigation in mobile robots - II. a review of map-learning and path-planing strategies. *Journal of Cognitive Systems Research*, 4(4) :283–317, 2003.
- [42] H. Moravec. Robotics. In *Encyclopaedia Britannica*, July 2003.
- [43] Robin R. Murphy. Case studies of applying gibson’s ecological approach to mobile robots. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part A : Systems and Humans*, 29(1) :105–111, 1999.
- [44] U. Nehmzow, T. Smithers, and J. Hallam. Location recognition in a mobile robot using self-organising feature maps. In G. Schmidt, editor, *Information Processing*

- 
- in *Autonomous Mobile Robots. Proc. of the Int. Workshop*, pages 267–277, Berlin, Heidelberg, 1991. Springer.
- [45] Stefano Nolfi, Dario Floreano, Orazio Miglino, and Francesco Mondada. How to evolve autonomous robots : Different approaches in evolutionary robotics. In *Brooks, R. and Maes, P. (eds.) Artificial Life IV*, pages 190–197. MIT Press, 1994.
- [46] L. Olsson, C.L. Nehaniv, and D. Polani. Sensory channel grouping and structure from uninterpreted sensor data. In *NASA/DoD Conference on Evolvable Hardware (EH'04)*, 2004.
- [47] L.A. Olsson, C.L. Nehaniv, and D. Polani. From unknown sensors and actuators to actions grounded in sensorimotor perceptions. *Connection Science*, 18(2) :121–144, 2006.
- [48] Giovanni Pezzulo and Gianguglielmo Calvi. *Anticipatory Behavior in Adaptive Learning Systems : Advances in Anticipatory Processing. Springer LNAI 4520*, chapter Schema-based design and the AKIRA Schema Language : An Overview. 2007.
- [49] D. Philipona, J.K. O'Regan, and J.-P. Nadal. Is There Something Out There? Inferring Space from Sensorimotor Dependencies. *Neural Comp.*, 15(9) :2029–2049, 2003.
- [50] D. Philipona, J.K. O'Regan, J.-P. Nadal, and Olivier Coenen. Perception of the structure of the physical world using unknown multimodal sensors and effectors. In Sebastian Thrun, Lawrence Saul, and Bernhard Schölkopf, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems 16*. MIT Press, Cambridge, MA, 2004.
- [51] Erich Rome, Joachim Hertzberg, Georg Dorffner, and Patrick Doherty. 06231 executive summary – towards affordance-based robot control. In Erich Rome, Patrick Doherty, Georg Dorffner, and Joachim Hertzberg, editors, *Towards Affordance-Based Robot Control*, number 06231 in Dagstuhl Seminar Proceedings. Internationales Begegnungs- und Forschungszentrum fuer Informatik (IBFI), Schloss Dagstuhl, Germany, 2006. <<http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2006/725>> [date of citation : 2006-01-01].
- [52] A. Rosenblueth, N. Wiener, and J. Bigelow. Behavior, purpose and teleology. *Philosophy of Science*, 10(1) :18–24, Jan. 1943.
- [53] G. Saporta. *Probabilités, Analyse de Données et Statistiques*. Technip, 2<sup>nd</sup> edition, 2006.
- [54] Uluc Saranlı, Martin Buehler, and Daniel E. Koditschek. RHex : A Simple and Highly Mobile Hexapod Robot. *The International Journal of Robotics Research*, 20(7) :616–631, 2001.
- [55] Thomas Schreiber. Measuring information transfer. *Phys. Rev. Lett.*, 85(2) :461–464, Jul 2000.
- [56] A.K. Seth. Causal connectivity analysis of evolved neural networks during behavior. *Network : Computation in Neural Systems*, 16(1) :35–55, 2005.

## Bibliographie

---

- [57] L. Steels. A case study in the behavior-oriented design of autonomous agents. In *SAB94 : Proceedings of the third international conference on Simulation of adaptive behavior : from animals to animats 3*, pages 445–452, Cambridge, MA, USA, 1994. MIT Press.
- [58] Luc Steels. The artificial life roots of artificial intelligence. *Artif. Life*, 1(1-2) :75–110, 1994.
- [59] A. Stoytchev. Toward learning the binding affordances of objects : A behavior-grounded approach. In *Proceedings of AAAI Symposium on Developmental Robotics*. Stanford University, 2005. March.
- [60] A. Stoytchev and R.C. Arkin. Combining deliberation, reactivity, and motivation in the context of a behavior-based robot architecture. In *Proceedings 2001 IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, pages 290–295. IEEE, 2001.
- [61] R.S. Sutton and A.G. Barto. *Introduction to Reinforcement Learning*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1998.
- [62] E.C. Tolman. Cognitive maps in rats and men. *The Psychological Review*, 55(4) :189–208, 1948.
- [63] M.T. Turvey and C. Carello. *Mind as motion : Explorations in the dynamics of cognition*, chapter Some dynamical themes in perception and action, pages 373–401. The MIT Press, 1995.
- [64] Emre Ugur, Mehmet R. Dogar, Maya Cakmak, and Erol Sahin. The learning and use of traversability affordance using range images on a mobile robot. In *Proceedings of IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation (ICRA 07)*, April 2007.
- [65] B. Webb. Can robots make good models of biological behaviour. *Behavioral and Brain Sciences*, 24 :1033–1050, 2001.

## Sources en libre accès

- publications du Biologically Inspired Robotics Group (BIRG), EPFL, <http://birg2.epfl.ch/publications>
- Roberto Cordeschi <http://w3.uniroma1.it/cordeschi/Inglese.html>
- Bibliographie du projet MACS, au Department of Computer Engineering, Middle East Technical University, <http://www.kovan.ceng.metu.edu.tr/wbt/>
- quelques articles de Aloimonos sur <http://www.cfar.umd.edu/~larson/dialogue/references.html>
- tous les articles du Georgia Tech Mobile Robot Lab, où officie Ronald Arkin <http://www.cc.gatech.edu/ai/robot-lab/publications.html>
- articles de Cos-Aguilera en ligne : <http://www.inf.ed.ac.uk/publications/author/ignasi.html>

- 
- articles de MacDorman en ligne :[www.macdorman.com](http://www.macdorman.com)
  - Luc Berthouze <http://www.informatics.sussex.ac.uk/users/lb203/Publications.html> et <http://staff.aist.go.jp/luc.berthouze/>
  - publications du Neurosciences Institute de G.Edelman <http://vesicle.nsi.edu/nomad/pubs.html>
  - articles récents de M.Arbib <http://neuroinformatics.usc.edu/mediawiki/index.php/Publications>

*Bibliographie*

---

## Chapitre 3

# Caractéristiques topologiques d'un réseau de relations probabilistes et statistiques

### Sommaire

---

<b>3.1 Liaison probabiliste et statistique entre variables . . . . .</b>	<b>56</b>
3.1.1 Liaison linéaire . . . . .	57
3.1.2 Dépendance statistique non linéaire . . . . .	60
<b>3.2 Organisation des relations de dépendance, représentations et caractérisations . . . . .</b>	<b>68</b>
3.2.1 Propriétés des matrices aléatoires . . . . .	69
3.2.2 Propriétés des graphes aléatoires . . . . .	70
3.2.3 Relations $n$ -aires, complexes simpliciaux et caractérisation topologique . . . . .	76
3.2.4 Application : classification de source et de comportement . . . . .	85
<b>3.3 Illustrations numériques . . . . .</b>	<b>87</b>
3.3.1 Implémentation . . . . .	88
3.3.2 Liaison statistique entre variables . . . . .	88
<b>3.4 Propriétés des matrices et graphes aléatoires . . . . .</b>	<b>98</b>
3.4.1 Classification de sources . . . . .	101
3.4.2 Propriétés spectrales des matrices d'information mutuelle . . . . .	103
3.4.3 Propriétés des graphes . . . . .	109
<b>3.5 Relations d'ordre supérieur et homologie simpliciale . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>3.6 Conclusions, perspectives . . . . .</b>	<b>118</b>
3.6.1 Bilan . . . . .	118
3.6.2 Perspectives . . . . .	121
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>126</b>

---

Dans le chapitre 2 on a rendu compte des travaux en robotique mobile autonome qui proposent d'améliorer l'autonomie des robots mobiles en s'inspirant des études cognitives de la perception sensorimotrice introduites au cours du chapitre 1.

Pour cela, le chapitre qui suit explore des techniques de représentation de l'activité d'un grand nombre de sources dans un cadre probabiliste. Ces techniques reposent largement sur les formalisations probabilistes et statistiques de la dépendance (§3.1), en particulier sur la théorie de l'information.

On élabore alors une distinction entre le niveau *local* des dépendances entre capteurs pris par groupes, et le niveau *global* du réseau de dépendances constitué par tous les capteurs (§3.2). Pour rendre compte de l'activité globale, on fait alors appel à la théorie des matrices aléatoires puis à la théorie des graphes aléatoires. Puis, on propose de passer des relations binaires entre couples de capteurs à des relations  $n$ -aires entre groupes de capteurs. Nous mettons en oeuvre les outils probabilistes et statistiques associés, ainsi que les méthodes de caractérisation des objets globaux obtenus, issus de la topologie computationnelle.

Enfin on donne des illustrations numériques de l'utilisation des outils et concepts introduits (§3.3).

### 3.1 Liaison probabiliste et statistique entre variables

On trouve dans la littérature en probabilités, théorie de l'information et statistiques, de nombreuses mesures de dépendance entre variables aléatoires discrètes ou continues, scalaires ou de grande dimension. Ces mesures visent classiquement la dépendance entre deux variables, on parle alors de dépendance bivariée. Cependant elles sont parfois étendues aux dépendances simultanées entre  $n$  variables; on parle alors de dépendance multivariée. La dépendance se situe entre l'indépendance et la dépendance fonctionnelle. Historiquement, en statistiques modernes le cas de la dépendance linéaire entre variables aléatoires joue un rôle fondamental, dans la régression linéaire notamment.

Les mesures de dépendance sont définies du point de vue probabiliste avant de trouver une traduction statistique. Les mesures de dépendance provenant de la théorie de l'information permettent par exemple de révéler des dépendances non linéaires.

Dans [40], Rényi pose sept conditions que devrait remplir une mesure de dépendance entre deux variables aléatoires  $\delta(X, Y)$  :

- être définie pour tout couple de variables aléatoires  $(X, Y)$ .
- ne pas dépendre de l'ordre des variables.
- prendre des valeurs réelles, dans  $[0, 1]$ .
- valoir 0 en cas d'indépendance uniquement.
- valoir 1 en cas de dépendance fonctionnelle uniquement, i.e. il existe  $f$  telle que

$$Y = f(X).$$

- se conserver par transformation bijective de chaque variable prise séparément, i.e. si  $f_1$  et  $f_2$  sont des bijections à valeur dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\delta(f_1(X), f_2(Y)) = \delta(X, Y)$ .
- être égale au coefficient de corrélation  $\rho$  quand les variables considérées sont normales.

Ces conditions sont souvent citées dans la littérature, et parfois étendues. Par exemple, Goodman [18] les prolonge dans un cadre multidimensionnel, alors que Joe [25] ajoute une condition -empruntée à [1] - de conservation approchée de  $\delta$  par discrétisation d'une variables aléatoire continue :

« It is defined for both categorical and continuous variables; and for ordinal categorical variables for which there may be underlying continuous variables, there is a close relationship between the measure for the continuous and the measure for the discretization of the variables. In addition, the measure should not be too sensitive to category choice » [25, p.157].

Le problème posé par l'influence de la discrétisation sur l'organisation d'un ensemble de dépendances sera toutefois abordé en §3.2.2.3. Dans l'immédiat nous poursuivons de manière plus détaillée ces quelques éléments de formalisation de la notion intuitive de dépendance, en veillant à considérer successivement les faces probabiliste et statistique de ce problème.

### 3.1.1 Liaison linéaire

On se reporte essentiellement dans cette section aux ouvrages généraux de probabilités, statistiques et analyse de données [42, 50, 47].

#### 3.1.1.1 Corrélation

Du point de vue des probabilités, les distributions prises individuellement sont souvent décrites grâce à leurs premiers moments. Ces caractéristiques numériques décrivent parfois complètement une distribution, comme dans le cas de la loi normale et de ses deux premiers moments  $\mu$  et  $\sigma^2$ , respectivement l'espérance  $E[X]$  et la variance  $E[(X - \mu)^2]$ .

De la même manière, un couple de variables aléatoire peut être décrit et parfois caractérisé par ses moments, le plus couramment employé étant la *covariance*, que l'on écrit en Eq.(3.2) dans le cas de variables aléatoires continues  $X$  et  $Y$  de densité de probabilité jointe  $f(x, y)$  :

$$K_{xy} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (3.1)$$

$$= \int \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) dx dy \quad (3.2)$$

Cette caractéristique est influencée non seulement par la dépendance entre  $X$  et  $Y$  mais également par leur dispersion  $\sigma$  sur le support conjoint. En effet, si l'une des variables a

une faible dispersion autour de son espérance  $\mu$ , la covariance sera faible même si  $X$  et  $Y$  sont fortement liées. Pour ne caractériser que la dépendance en corrigeant les disparités de dispersion, le *coefficient de corrélation* suivant est préféré à la covariance :

$$\text{corr}_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (3.3)$$

La corrélation, comprise entre  $-1$  et  $1$ , mesure le caractère linéaire uniquement de la dépendance entre deux variables, si bien que deux variables peuvent être dépendantes sans être corrélées. Pour se convaincre de la sensibilité de  $\text{corr}_{xy}$  aux liaisons linéaires uniquement, il peut être utile de se reporter, en statistiques cette fois, au modèle de la régression simple fondé sur la minimisation de  $E[(Y - f(X))^2]$  où  $f$  est l'inconnue. La résolution de cette équation sous l'hypothèse de linéarité de  $f$  fait alors apparaître le coefficient de Bravais-Pearson, analogue statistique de la corrélation probabiliste :

$$r = \frac{1}{n} \frac{\sum (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} \quad (3.4)$$

où  $\{(x_i, y_i)\}_{i < N}$  est un nuage de points en dimension 2 ; et  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{\sigma}_X$  et  $\hat{\sigma}_Y$  sont respectivement les estimateurs de l'espérance et de l'écart-type pour  $X$  et  $Y$ .

Nous renvoyons le lecteur intéressé à [42] (chap. 6 et 16) pour plus de détails, et évoquons dans la suite les questions de significativité statistique relatives à ce type de mesure de dépendance.

**Inférence : estimateurs et significativité statistique** L'emploi en statistiques du coefficient  $r$  n'a de sens qu'après vérification de l'adéquation des données et du modèle linéaire. En statistiques inférentielles, il existe des tests de linéarité de la régression destinés précisément à valider les hypothèses du modèle linéaire, mais elles nécessitent de disposer de nombreuses observations de  $Y$  pour chaque valeur de  $X$  (cf [42, p.397]).

En supposant que ces hypothèses soient vérifiées, il nous faut ensuite remarquer que le coefficient  $r$  n'est pas robuste, dans la mesure où il est très sensible aux valeurs extrêmes ou aberrantes présentes dans un échantillon. D'autres estimateurs du coefficient de régression existent, tels que la régression  $L_1$ , mais elle nécessite des algorithmes particuliers (cf [42, p.404]).

Supposons qu'on se trouve dans un cas où l'usage de  $r$  est légitime. On peut alors se demander dans quelle mesure la valeur de  $r$  calculée pour un échantillon donnée est significative. Pour répondre à cette question, les statisticiens disposent d'un test fondé sur la corrélation de deux variables aléatoires  $X, Y$  Gaussiennes dont on connaît la corrélation  $\text{corr}(X, Y)$ . Le coefficient de corrélation empirique  $r$  peut être considéré comme issu de la réalisation d'une variable aléatoire  $R$  de loi connue quand  $\text{corr}(X, Y) = 0$ , d'expression :

$$\frac{R}{\sqrt{1 - R^2}} \sqrt{n - 2} \rightsquigarrow T_{n-2} \quad (3.5)$$

où  $T$  est une variable aléatoire qui suit une loi de Student à  $n - 2$  degrés de liberté. Pour  $n > 100$  la loi de  $R$  est approximée par une loi normale centrée d'écart type  $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ . Ceci permet de tester l'hypothèse  $H_0$  "pas de liaison significative entre  $X$  et  $Y$ ".

Remarquons que "le seuil de signification décroît quand  $n$  croît [donc] le fait de trouver que  $r$  diffère significativement de 0 ne garantit nullement que la liaison soit forte" ([42, p.131]).

Une limite de ce test réside dans la normalité supposée de  $X$  et  $Y$ . Néanmoins il est établi que ce test est robuste et fournit des résultats valables pourvu que  $n$  soit suffisamment grand. Enfin Eq.(3.5) suppose qu'on dispose de  $\text{corr}(X, Y)$ , qui n'est pas connu à l'avance. Le test est donc le plus souvent employé contre l'hypothèse alternative  $\text{corr}(X, Y) = 0$ .

On renvoie en §3.3 des illustrations expérimentales de l'utilisation de ce test.

### 3.1.1.2 Corrélation partielle, réseau de liaisons linéaires

Étant données deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$ , on sait que si  $X$  et  $Y$  sont dépendantes, alors la connaissance de la valeur particulière  $y_i$  prise par  $Y$  réduit l'incertitude sur la valeur que prend  $X$  à l'issue d'une expérience. On note ainsi  $P(X|Y = y_i)$  la distribution de probabilité de  $X$  en sachant que  $Y = y_i$ .

Lorsque  $X$  et  $Y$  sont maintenant continues, l'expression  $P(X|Y = y)$  n'a pas de sens, et de nombreux travaux visent à donner un fondement mathématique à la notion de probabilité conditionnelle (cf [42, p.77-80]). Néanmoins, si le couple  $(X, Y)$  est à valeur dans  $\mathbb{R}^2$  et possède une densité  $h(x, y)$  alors les densités conditionnelles existent, et s'expriment comme suit :

$$g(y|x) = \frac{h(x, y)}{f(x)} \quad (3.6)$$

Les lois conditionnelles nous permettent de définir des corrélations partielles, destinées à examiner finement les dépendances apparentes entre deux variables. En effet, celles-ci sont souvent dues aux variations d'une troisième variable, et la forte corrélation entre deux variables peut disparaître quand on fixe la valeur d'une troisième (cf [42, p.132]).

Plusieurs voies coexistent pour définir ces coefficients : en adoptant un point de vue géométrique, en admettant le cadre de travail de la régression linéaire multiple, ou en se plaçant dans un cadre Gaussien. Dans ce dernier cas, on se donne un vecteur aléatoire  $X$  régi par une loi normale multivariée  $N(\mu, \Sigma)$  dont  $\mu$  est la moyenne et  $\Sigma$  la matrice de variance-covariance. Supposons qu'on partitionne  $X$  en deux vecteurs  $X_1$  et  $X_2$ , de moments respectifs  $(\mu_1, \Sigma_1)$  et  $(\mu_2, \Sigma_2)$ . La loi de  $X_1|X_2$  est une loi multinormale de même dimension que  $X$ , de matrice de variance-covariance  $\Sigma_{1|2}$ . A partir des termes de cette matrice, nommés covariances partielles, on peut alors définir les coefficients de corrélation partielles. Dans le cas où  $X_1$  et  $X_2$  sont de dimensions respectives 2 et 1, on obtient :

$$\text{corr}(x_1, x_2|x_3) = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1 - \rho_{13}^2)(1 - \rho_{23}^2)}} \quad (3.7)$$

en notant  $\rho_{ij} = \text{corr}(X_i, X_j)$ .

Comme nous l'avons mentionné, la définition de ces coefficients s'étend hors du cas Gaussien, et est étroitement reliée à la régression multiple ; en effet  $\text{corr}(x_1, x_2|x_3)$  est le coefficient de corrélation linéaire entre les parties de  $X_1$  et de  $X_2$  qui ne sont pas expliquées linéairement par  $X_3$ .

Il existe une littérature riche sur l'interprétation causale de ces corrélations partielles, moyennant l'introduction d'un modèle simplifié et la séparation de l'ensemble des variables en variables endogènes et exogènes. Les relations de dépendances normalisées peuvent alors se représenter comme des graphes dans lesquels deux sommets sont :

- non connectés s'il n'existe aucune dépendance significative directe.
- connectés de manière orientée si une variable dépend directement de l'autre, la réciproque étant fausse.
- connectés sans orientation si une dépendance existe, sans dépendance directe d'une variable par rapport à l'autre.

On renvoie le lecteur intéressé à [47, chap. 28] pour une introduction détaillée à la *path analysis*.

### 3.1.2 Dépendance statistique non linéaire

Dans la section précédente notre intérêt s'est porté sur différentes définitions de la dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires. Ces différentes mesures sont attachées au caractère linéaire des dépendances, alors qu'en toute généralité deux variables peuvent dépendre l'une de l'autre de manière non linéaire, voire sans qu'existe une dépendance fonctionnelle entre elles.

Le degré de dépendance s'apparente à un continuum, entre l'indépendance et la dépendance fonctionnelle qui elle-même peut être unidirectionnelle ou bidirectionnelle.

Il existe dans la littérature des tests de dépendance monotone (non nécessairement linéaire) entre deux variables tel que le test de corrélation des rangs de Kendall. Étant données  $X$  et  $Y$ , il s'agit de savoir dans quelle mesure elles varient dans le même sens en considérant le signe du produit  $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)$ , et notamment la probabilité que ce produit soit positif. On note alors :

$$\tau = 2P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - 1 \quad (3.8)$$

avec  $-1 < \tau < 1$ . Cette définition possède une contrepartie statistique que nous ne détaillons pas ici (cf [42, p.138-140]), mais insistons en revanche sur l'utilité de ces coefficients pour éprouver l'indépendance de deux variables  $X$  et  $Y$  qui ne sont pas régies par une loi normale. En suivant Saporta, nous conviendrons du fait que « les coefficients de corrélation de rangs sont en fait des coefficients de dépendance monotone car ils sont invariants pour toute transformation monotone croissante des variables » ([42, p.140]). Le coefficient de Kendall est un cas particulier des coefficients de Daniels et Guttman, définis dans un cadre plus général.

Nous avons évoqué ici une méthode d'étude des dépendances probabilistes et statistiques non nécessairement linéaires. Dans la suite nous élargissons notre champ d'étude en brossant une rapide esquisse des concepts fondateurs de la théorie de l'information.

### 3.1.2.1 Point de vue de la théorie de l'information

*On s'inspire largement de [50] dans cette partie.*

Cette branche de la théorie des probabilités se préoccupe de la transmission de l'"information", et notamment de son encodage. Les problèmes typiques résolus dans ce cadre sont par exemple ceux de l'encodage le plus économique d'un message en terme de quantité de symboles transmis, dans un contexte aléatoire ou le dimensionnement d'un canal entre une source d'information continue et un récepteur.

Dans les travaux fondateurs de C.Shannon [44], l'"information" est quantifiée par le degré d'incertitude sur la connaissance d'un système physique. Tout renseignement obtenu à propos de l'état de ce système est jugé d'autant plus informatif que l'incertitude est grande avant réception.

La quantification du "degré d'incertitude" repose sur l'entropie de Shannon, une forme d'entropie parmi les nombreuses existantes, destinée à caractériser une distribution de probabilité, et non l'état du système<sup>40</sup>. La définition de cette entropie part du constat suivant : l'incertitude sur l'état d'un système physique dépend non seulement du nombre de ses états mais également de leur probabilité de réalisation. En prenant en compte cette remarque, l'entropie de Shannon se définit comme suit, dans le cas discret :

$$H(X) = \sum_i p_i \log p_i \quad (3.9)$$

où  $X$  est une variable aléatoire représentant l'état d'un système physique, pris parmi un ensemble discret d'états possibles  $\{x_i\}_{i \leq n}$  auxquels sont associées les probabilités  $P(X = x_i) = p_i$ .

Elle possède de nombreuses propriétés compatibles avec le sens informel communément admis de l'"information" :

- (i)  $H$  s'annule si l'un des états est certain, i.e. si aucune incertitude n'entache l'état du système.
- (ii)  $H$  est maximale quand la distribution est uniforme, i.e. quand l'incertitude portant sur l'état du système est maximale ; elle augmente avec le nombre d'états.
- (iii) dans le cas d'un système composé d'une réunion de sous-systèmes :

<sup>40</sup> selon Shalizi : "These ("Shannon") entropies are properties of the probability distributions of the variables, rather than of particular realizations. (This is unlike the Boltzmann entropy of statistical mechanics, which is an objective property of the microscopic state, at least once we fix our partition of the former into macroscopic states. Confusing the two entropies is common but bad.)", [www.cscs.umich.edu/~crshalizi/notebooks/complexity-measures.html](http://www.cscs.umich.edu/~crshalizi/notebooks/complexity-measures.html)

- si les deux systèmes dont les états sont notés  $X$  et  $Y$  sont indépendants, alors leurs entropies s'ajoutent :

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) \quad (3.10)$$

- sinon lorsque les sous-systèmes sont dépendants, on parle de sous-additivité de l'entropie de Shannon :

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (3.11)$$

On interprète cette relation comme suit : l'incertitude portant sur le système formé de parties dépendantes est inférieure à l'incertitude du système formé de parties indépendantes.

Par ailleurs, l'entropie de Shannon est une notion probabiliste, posée *a priori* qui quantifie le degré d'incertitude ; or celui-ci diminue dès qu'on dispose de renseignements même partiels mais tangibles sur l'état d'un système. La notion d'entropie conditionnelle répond au besoin d'expression de cette subtilité. L'entropie conditionnelle du système  $Y$  quand le système  $X$  se trouve dans l'état  $x_i$  s'écrit :

$$H(Y|X = x_i) = - \sum_j p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) \quad (3.12)$$

Mais cette quantité ne vaut que pour un état donné  $x_i$ , il est donc légitime d'en prendre la moyenne pondérée par les probabilités associées à chaque état  $x_i$ . On définit enfin :

$$H(Y|X) = - \sum_i p_i \left[ \sum_j p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) \right] \quad (3.13)$$

Cette définition donne lieu à de nombreux développements, mais nous ne retiendrons que les deux suivants :

$$H(X, Y) = H(Y|X) + H(X) \quad (3.14)$$

$$H(Y|X) \leq H(Y) \quad (3.15)$$

La formule Eq.(3.14) constitue l'analogie de la formule d'additivité des systèmes indépendants Eq.(3.10), mais pour des systèmes dépendants cette fois. La formule Eq.(3.15) signifie que l'incertitude portant sur l'état d'un système est nécessairement plus grande que l'incertitude réduite par la connaissance de l'état d'un autre système.

A l'aide des concepts déjà mis en avant ci-dessus, notamment l'entropie de Shannon, on peut définir l'*information mutuelle* comme la réduction de l'incertitude portant sur l'état  $X$  d'un système occasionnée par l'observation de l'état  $Y$  d'un autre système :

$$I_{Y \rightarrow X} = H(X) - H(X|Y) \quad (3.16)$$

Dans le cas particulier de deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  prenant les valeurs dans  $\{x_i\}_{i \leq m}$  et  $\{y_j\}_{j \leq n}$ , de probabilité jointe  $p(x_i, y_j)$  on obtient en particulier :

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \quad (3.17)$$

Elle possède les propriétés suivantes :

- $I_{Y \rightarrow X} = 0 \iff$  les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- $I$  est symétrique en  $X$  et  $Y$  :

$$I_{Y \rightarrow X} = I_{X \rightarrow Y} = I(X, Y) \quad (3.18)$$

- bien qu'elle soit symétrique en  $X$  et  $Y$ ,  $I$  est sensible aux dépendances unidirectionnelles. En effet si  $X$  est dépendant de  $Y$  mais non l'inverse, alors l'incertitude restant sur  $X$  quand  $Y$  est connu vaut  $H(X|Y) = 0$  alors que  $H(Y|X) = H(Y)$ . On en déduit donc que :

$$I(X, Y) = \begin{cases} H(X) & \text{si } X \text{ est complètement dépendante de } Y \\ H(Y) & \text{dans le cas opposé} \end{cases}$$

ce qui permet de distinguer ces deux types de dépendance.

Ces définitions s'étendent, moyennant un travail supplémentaire, pour les variables aléatoires continues (cf [50, §18.7]) qui apparaîtront dans la suite de ce mémoire.

Il est important de remarquer que, à la différence des mesures de corrélation, aucune hypothèse concernant la linéarité de la dépendance entre les variables  $X$  et  $Y$  ne sous-tend ces résultats. L'information mutuelle permet donc d'une part de tester l'indépendance entre deux variables, ou de quantifier le degré de dépendance entre variables. Comme nous le verrons en §3.2.3.1, de nombreux travaux étendent cette notion au cas multivarié (à ne pas confondre avec le cas où  $X$  et  $Y$  sont vectorielles).

L'utilité de ces outils est illustrée expérimentalement au cours de la section §3.3.

### 3.1.2.2 Aspects inférentiels, significativité statistique

On s'intéresse dans cette partie à la significativité statistique de la dépendance. Nous supposons une connaissance minimale de la théorie des test statistiques que nous n'approfondissons cependant pas ici ; le lecteur intéressé se reportera à [50, §14] et à [42, chap.14] pour une introduction.

**Test de dépendance, cas bivarié** En §3.1.1.1 la possibilité d'explicitier la loi de l'estimateur du coefficient de Bravais-Pearson a attiré notre attention, car elle permet de dériver un test statistique de dépendance linéaire entre deux variables Gaussiennes.

On trouve dans la littérature statistique plusieurs tests de l'indépendance entre deux variables aléatoires. Le premier d'entre eux est le test du  $\chi^2$  qui suppose la donnée de deux

variables discrètes (qualitatives)  $X$  et  $Y$  pouvant prendre respectivement  $p$  et  $q$  valeurs, et décrivant un ensemble de  $n$  individus. On note habituellement  $n_{ij}$  le nombre d'individus présentant le caractère  $X = x_i$  et le caractère  $Y = y_j$ , de plus on note  $n_{i\bullet} = \sum_j n_{ij}$  et  $n_{\bullet j} = \sum_i n_{ij}$ . Les données disponibles sont résumées dans le tableau de comptage (cf Tab.3.1). On remarque que dans le cas de l'indépendance, chacune des lignes  $x_i$  normalisée par la marge  $n_{i\bullet}$  doit contenir les mêmes proportions de chacun des  $y_j$  car la connaissance de  $X$  n'est pas supposée modifier la loi conditionnelle de  $Y$ . Plus précisément, sous l'hy-

$X \setminus Y$	$y_1$	$\dots$	$y_j$	$\dots$	$y_q$	
$x_1$	$n_{11}$	$\dots$	$n_{1j}$	$\dots$	$n_{1q}$	$n_{1\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$			$\vdots$
$x_i$	$n_{i1}$	$\dots$	$n_{ij}$		$n_{iq}$	$n_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$		$\vdots$
$x_p$	$n_{p1}$	$\dots$	$n_{pj}$	$\dots$	$n_{pq}$	$n_{p\bullet}$
	$n_{\bullet 1}$	$\dots$	$n_{\bullet j}$	$\dots$	$n_{\bullet q}$	$n_{\bullet\bullet}$

TAB. 3.1 – Tableau de contingence

pothèse d'indépendance chaque terme du tableau devrait compter  $n \binom{\frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}}{\frac{n_{ij}}{n}} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$  individus. Pearson définit une distance mesurant l'écart à l'indépendance entre la distribution observée et la distribution qu'on aurait observée sous l'hypothèse d'indépendance qui s'écrit :

$$d^2 = \sum_i \sum_j \frac{\left( n_{ij} - \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n} \right)^2}{\frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}} \quad (3.19)$$

Sous l'hypothèse d'indépendance, la loi de la variable aléatoire  $D^2$  d'où est tirée  $d^2$  suit approximativement une loi du chi-deux à  $(p-1)(q-1)$  degrés de liberté, notée  $\chi^2_{(p-1)(q-1)}$ , ce qui permet de définir un risque d'erreur de première espèce et une valeur critique de  $d^2$  au delà de laquelle on peut rejeter l'hypothèse d'indépendance.

L'usage du test précédent se limite aux variables discrètes. Pour les variables continues, on dispose d'un test mettant en oeuvre la méthode du test du  $\chi^2$ , défini en fait au cours du processus d'estimation de l'information mutuelle, qu'on abordera dans la partie suivante. Ce test relaté dans l'article de Celluci et al. [8, p.5] s'intéresse à deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  à valeurs scalaires continues dont on tire  $N$  échantillons  $\{x_i, y_i\}_{i \leq N}$ . On réalise alors un histogramme des échantillons répartis sur une grille bidimensionnelle divisée en  $N_X = N_Y$  pavés; et l'on note  $n_{ij}$  le nombre de points occupant le pavé de coordonnées  $(i, j)$  de la grille. Le nombre de points occupant ce pavé sous l'hypothèse d'indépendance permet de calculer une distance à l'indépendance, et d'en tirer un test statistique. En s'inspirant de [9], Celluci et al. rappellent certaines conditions fréquemment négligées posées pour un usage légitime du test du  $\chi^2$ , notamment le fait que  $n_{ij} \geq 1$  pour tous les éléments de la partition, et  $n_{ij} \geq 5$  pour 80% des éléments.

Sur le modèle de la statistique de Bravais-Pearson, Roulston [39] propose une transformation  $Z_H$  de l'information mutuelle de deux variables indépendantes qui suit une loi normale d'espérance zéro et de variance unité. Roulston en déduit un test statistique, comme on l'a vu précédemment en définissant une erreur de première espèce  $\alpha$  et un seuil critique, tiré de la connaissance des moments de la loi de  $Z_H$ . Cette méthode est notamment comparée à un test empirique inspiré de la technique des données de substitution, qui dérive elle-même du *bootstrap* (*surrogate data*, cf [48] p.79) :

- on se munit d'un estimateur de l'information mutuelle (cf partie suivante), qu'on applique à l'échantillon  $\mathcal{E} = \{(x_i, y_i)\}_{i \leq n}$ .
- on permute au hasard les indices des  $y_i$  et on recalcule l'estimation de l'information mutuelle ; ces deux opérations étant itérées  $N$  fois.

A l'issue de ces deux étapes on dispose d'une part de l'estimation de l'information mutuelle entre  $X$  et  $Y$ , d'autre part d'un échantillon de  $N$  informations mutuelles estimées pour des échantillons rendus indépendants. Sous hypothèse de normalité de cet échantillon, on peut alors en déduire un seuil critique étant donnée une erreur de première espèce  $\alpha$  ; cependant en s'inspirant de la méthode mise en œuvre pour le *bootstrap* on peut aussi calculer empiriquement les quantiles et se passer de l'hypothèse de normalité.

**Estimation de l'information mutuelle, cas bivarié** La section §3.1.2.2 supposait, pour les tests de Celluci et Roulston du moins, la disponibilité d'un estimateur de l'information mutuelle. Il en existe de nombreux dans la littérature, aussi nous renvoyons en priorité à la revue très complète et récente établie dans [22, §4]. Nous nous contenterons d'un mentionner quelques uns parmi les plus significatifs.

D'une manière générale, l'estimation consiste à approximer certains paramètres, tels que la moyenne ou la variance, d'une population large à partir d'un échantillon de taille limitée. Elle repose sur les théorèmes limites de la théorie des probabilités, telle que la loi des grands nombres ou le théorème central limite, et justifient par exemple l'usage d'estimateurs empiriques tel que  $\bar{x} = \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{N}$ .

Comme on l'a rappelé il existe de nombreux estimateurs pour chaque paramètre d'une population donnée, et pour les distinguer la théorie de l'estimation définit des indicateurs de qualité (cf [42, §13]). Tout d'abord, la *vitesse de convergence* quantifie le nombre d'échantillons nécessaires pour obtenir une approximation suffisamment "proche" de la valeur vraie du paramètre. Toutefois on ne peut pas parler de vitesse de convergence sans avoir défini la notion de "proximité", elle-même formulée en terme statistique via la *précision*. Il est nécessaire en effet de se rappeler que si chaque échantillon  $\{x_1, \dots, x_N\}$  tiré d'une population donnée est une variable aléatoire, il en va de même de l'estimateur  $T$  défini à partir de cet échantillon. En nommant par exemple  $\theta^*$  la valeur du paramètre à trouver,  $E[T] - \theta$  quantifie l'écart entre la valeur moyenne  $E[T]$  prise par  $T$  et  $\theta$ . Cet écart est nommé le *biais* ou encore l'erreur systématique, comme l'illustre la Fig. 3.1. La

précision d'un estimateur  $T$  se mesure grâce à l'erreur quadratique moyenne :

$$E[(T - \theta)^2] \quad (3.20)$$

cette quantité permet de constater qu'entre deux estimateurs sans biais (i.e.  $E[T] - \theta = 0$ ), le plus *précis* est celui à variance minimale (cf [42, §13.1.2])

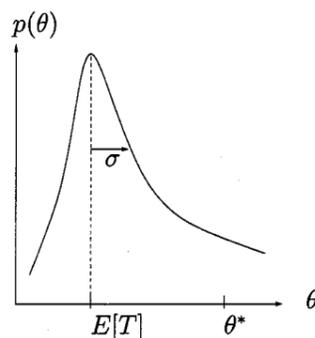


FIG. 3.1 – Loi de l'estimateur  $T$  et paramètre  $\theta$  à estimer.

En général pour trouver le meilleur estimateur d'un paramètre, il est nécessaire<sup>41</sup> d'émettre des hypothèses sur la loi de probabilité de la variable  $X$  dont on veut estimer le paramètre  $\theta$ . Néanmoins, la plupart des estimateurs que nous considérerons sont non paramétriques<sup>42</sup>, i.e. on ne formule aucune hypothèse sur la loi des variables sous-jacentes car elles sont inconnues la plupart du temps dans les applications ; ce qui nous prive de certaines des garanties offertes par la théorie classique de l'estimation.

Comme on l'a d'abord rappelé, après avoir formalisé la notion de *précision* se pose alors le problème du *type de convergence* et des autres propriétés que l'on peut attendre d'un estimateur. Nous renvoyons par exemple à [22, §3.1] pour une introduction dans le cas particulier des estimateurs de l'entropie de Shannon et de l'information mutuelle.

Revenons maintenant au problème particulier de l'estimation de l'information mutuelle. Dans [22], Hlaváčková-Schindler et al. classent l'ensemble des techniques non paramétriques appropriées en familles d'estimateurs :

- “plugin” : fondés sur l'estimation analytique de la densité de probabilité  $\hat{f}$  de la loi, avant de l'injecter dans les formules de l'information mutuelle vues en §3.1.2.1.
- partitionnant l'espace : approximation de la loi jointe  $p(x_i, y_j)$  à l'aide d'un histogramme, et injection dans (3.17).
- ordinaux : approximation d'une quantité intermédiaire, l'entropie de Rényi.

<sup>41</sup> “on ne peut résoudre d'une façon générale le problème de la recherche du meilleur estimateur d'un paramètre sans faire d'hypothèses sur le phénomène échantillonné. En effet la variance d'un estimateur ne peut en général se calculer que si l'on connaît la loi de  $T$  qui dépend de celle des  $X_i$ ”, [42, p.291].

<sup>42</sup> pour des estimateurs paramétriques de l'information mutuelle, se reporter à [22, §5].

- de calcul de distances : il est possible d'estimer l'entropie à partir d'une statistique des distances des points les proches de chaque point de l'échantillon. A partir de l'estimation de  $H$  on peut obtenir une estimation de  $I$ .
- théorie de l'apprentissage : ces méthodes recherchent avant tout des estimateurs ayant des propriétés de différentiabilité en vue d'une optimisation, au détriment de la consistance. Elles s'appuient par exemple sur l'entropie de Rényi.
- du maximum de vraisemblance : ces méthodes mettent en oeuvre des outils d'estimation paramétrique, et permettent de retrouver les propriétés de convergence de certains estimateurs rattachés à d'autres familles (e.g. "plugin").
- méthodes de correction : reposent sur des développements analytiques des termes des estimateurs classiques.

Un aperçu de ces nombreuses approches se trouve dans [22], nous renvoyons donc le lecteur à cet article de revue pour plus de détails. Ci dessous nous revenons sur trois des méthodes évoquées ci-dessus :

1. estimateurs "plugin" : on estime les densités de probabilité des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont on souhaite calculer l'entropie. Ces estimations sont utilisées pour calculer l'information mutuelle. Certains auteurs s'appuient sur la méthode des noyaux de Parzen pour approximer la densité. Bien que non paramétrique, cette technique dépend de manière critique du choix de la taille de la fenêtre  $h$ , ainsi que (de manière plus marginale) du type de noyau retenu. Dans [25], Joe calcule un biais et une variance asymptotiques, et démontre que pour les distributions multivariées le nombre d'échantillons nécessaire pour une estimation précise croît rapidement avec la dimension.
2. estimateurs partitionnant l'espace : la manière la plus directe d'estimer  $I(X, Y)$  est d'approximer la loi jointe  $p(x_i, y_j)$  et les marginales  $p(x_i), p(y_j)$  à l'aide d'un histogramme, et de les injecter (3.17). On en trouve des illustrations en reconstruction de réseau, par exemple dans [7]. Cependant il est prouvé que ces estimateurs souffrent d'une erreur systématique, et sont inapplicables en grande dimension, d'autant plus que le nombre d'échantillons est limité. En effet se pose alors le problème du sur-échantillonnage : si on se donne  $N$  boîtes par dimension, avec  $d$  dimensions, on trouve au total  $N^d$  boîtes. Si ce nombre avoisine le nombre d'échantillons  $n$ , l'estimation est influencée plus par le nombre d'échantillons disponibles que par leur distribution. Plusieurs solutions ont été proposées pour résoudre ce problème, comme le partitionnement équiprobable marginal [37]. D'autres algorithmes plus complexes reposent sur une partition adaptative des données [16].
3. estimateurs fondés sur le calcul de distances : il existe des estimateurs de l'entropie de Shannon reposant sur la distance  $\rho_i$  entre chaque point d'indice  $i$  de l'échantillon et son plus proche voisin :

$$\hat{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(n\rho_i) + \log 2 + C_E \quad (3.21)$$

d'après [22, §4.4.2]. La convergence en moyenne quadratique<sup>43</sup> est prouvée sous certaines conditions. Moyennant certaines hypothèses, il est possible d'exprimer analytiquement  $\rho_i$  et d'en dériver  $\hat{H}$  comme suit, en dimension 1 :

$$\hat{H} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \log(x_{i+1} - x_i) + \psi(1) - \psi(N) \quad (3.22)$$

où  $\psi$  est la fonction digamma. Kraskov et al. [29] définissent une distance de la norme maximum et, à l'aide de l'expression  $I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$ , mettent à profit l'estimateur (3.22). En notant  $\langle \dots \rangle$  la moyenne empirique sur les points de l'échantillon ils obtiennent alors l'estimation de  $I$  suivante, que nous mettrons en oeuvre à la section §3.3 :

$$I^{(1)}(X, Y) = \psi(k) - \langle \psi(n_x + 1) + \psi(n_y + 1) \rangle + \psi(N) \quad (3.23)$$

où  $k$  est le nombre de plus proches voisins à prendre en compte au cours du calcul de la distance,  $n_x(i)$  le nombre de points  $x_j$  dont la distance à  $x_i$  est inférieure à un seuil, et de même pour  $n_y$ . Bien que le rôle du paramètre  $k$  ne soit pas parfaitement compris, la qualité de l'estimation ne semble pas en dépendre de manière critique. Cet estimateur a l'avantage d'être non biaisé si  $X, Y$  sont indépendants, ce qui se vérifie empiriquement sur de nombreuses distributions classiques. De plus, pour de très petits échantillons l'erreur numérique est faible, comme le montrent les simulations numériques menées par les auteurs sur des variables Gaussiennes corrélées (cf [29, p.14]).

## 3.2 Organisation des relations de dépendance, représentations et caractérisations

Au cours de la sections 3.1 on a précisé comment définir du point de vue statistique des relations élémentaires entre des sources dont les activités sont interdépendantes.

Au cours de cette section, on se penche sur la transition entre la donnée d'un ensemble de relations locales juxtaposées et les propriétés globales de l'interaction d'ensemble. On pourrait entendre au sens large "propriétés globales" d'un réseau aléatoire comme l'étude des motifs présents dans un grand réseau ou -en associant un état et une fonction de transition entre états à chaque noeud- l'examen des rapports entre topologie et dynamique du réseau (cf [30, §5]). Ces interactions sont en effet capitales pour comprendre par exemple la robustesse d'un réseau face à la suppression aléatoire d'arcs, ou l'examen de la propagation sur un réseau aléatoire. Néanmoins ici on donnera à "propriétés globales" le sens restreint de "propriétés topologiques de l'espace".

<sup>43</sup> i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E[|H - H_n|^2] = 0$

### 3.2. Organisation des relations de dépendance, représentations et caractérisations

En effet, si on considère chaque capteur ou source comme un point dans un espace, les concepts et techniques exposés au long de la section §3.1 permettent de décider que deux points de l'espace sont en relation si par exemple l'information mutuelle entre les sources  $X, Y$  associées est supérieure à un certain seuil. Dans la suite on définira une relation binaire  $R_\varepsilon(X, Y)$  entre les deux sources définie comme suit :

$$R_\varepsilon(X, Y) \iff I(x, y) \geq \varepsilon \quad (3.24)$$

On admet que deux points  $(X, Y)$  sont "connectés" si la relation binaire précédente est vérifiée, ce qui revient à induire une topologie sur l'espace des capteurs  $\{X_i\}_{i < n}$  à l'aide des relations binaires  $R_\varepsilon$ .

Ayant pris le parti d'associer un espace topologique à un ensemble de capteurs, on peut tenter d'expliquer la relation entre le type d'espace topologique obtenu et le type d'activité d'ensemble des capteurs. Formaliser la notion de "type" d'espace topologique, et classer ces espaces a constitué l'activité de nombre de mathématiciens pendant des siècles<sup>44</sup> aussi nous proposons de leur emprunter certaines signatures, ou caractéristiques.

Nous proposons de distinguer trois cas :

- dans le premier on associe à chaque couple de capteurs une mesure de dépendance en s'inspirant de celles énumérées en §3.1. Ainsi à chaque ensemble de capteurs  $\{X_i\}_{i < n}$  on peut associer une matrice de réels symétrique (si les mesures de dépendance le sont). Ce cas sera abordé théoriquement en §3.2.1.
- en ajoutant au cas précédent une discrétisation formalisée par la donnée d'une relation binaire, on se ramène à l'étude des propriétés d'un graphe induit, qu'on détaillera en §3.2.2 et illustrera en §3.4.3.
- enfin, on généralisera le cas précédent au cas des relations  $n$ -aires en §3.2.3. .

#### 3.2.1 Propriétés des matrices aléatoires

L'objet manipulé, constitué d'un ensemble de réels qui quantifie la dépendance statistique entre des couples de sources, est une matrice réelle symétrique, du fait de l'absence d'orientation de la dépendance statistique. De nombreux aléas propres aussi bien à la mesure qu'aux incertitudes introduites par l'arithmétique des nombres flottants lors du calcul sur ordinateur entachent les calculs effectués. Il est dès lors légitime de considérer les matrices en question comme aléatoires, et de tirer parti des résultats théoriques et pratiques élaborés en théorie des matrices aléatoires. Bien que cette littérature soit riche de résultats et constitue un champ de recherche actif, en proposer un tour d'horizon même allusif dépasse le cadre de ce mémoire, nous renvoyons donc le lecteur à des ouvrages spécialisés tels que [34], et nous limiterons ici à l'énoncé de quelques résultats élémentaires. En particulier on prend le parti de s'intéresser d'une part à l'histogramme du spectre des

<sup>44</sup> cf [54, chap.4] pour une discussion à ce sujet, et l'exemple de la classification des surfaces compactes à l'aide de la caractéristique d'Euler.

matrices aléatoire choisi pour sa prévalence dans les travaux concernant le spectre des matrices d'adjacence de graphes aléatoires (cf §3.2.2), ainsi qu'aux valeurs maximales du spectre.

Il existe des théorèmes (cf [17]) fournissant des encadrements plus ou moins précis des plus grandes valeurs propres du spectre d'une matrice aléatoire symétrique de taille finie, sous certaines conditions que nous précisons ici de manière informelle. Si  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$  sont des variables aléatoires telles que  $|a_{ij}| < 1$ , telles que les termes non diagonaux aient une même espérance  $E[a_{ij}]$ , et une même variance  $\sigma^2$  et si de plus les termes diagonaux ont tous la même espérance  $E[a_{ii}]$  alors l'espérance de la plus grande valeur propre en valeur absolue est :

$$E[\lambda_1] = (n-1)E[a_{ij}] + E[a_{ii}] + \frac{\sigma^2}{E[a_{ij}]} + o(1) \quad (3.25)$$

où  $o(1)$  est un terme d'erreur négligeable devant 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Si  $E[a_{ij}] = 0$  alors avec une probabilité proche de 1 :

$$\lambda_1 \geq 2\sigma\sqrt{n} + O(n^{1/3} \log n) \quad (3.26)$$

On remarque que ces résultats donnent un ordre de grandeur et sont utiles surtout lorsque  $n$  est suffisamment grand.

L'histogramme du spectre d'une matrice aléatoire a fait l'objet de nombreux travaux, le résultat le plus connu étant la "semi-circle law" due à Wigner [52] dans le cadre de l'étude des propriétés de la fonction d'onde de certains systèmes quantiques. Soit comme précédemment une matrice symétrique dont les termes diagonaux sont des variables aléatoires régies par une même loi, et dont les termes non diagonaux obéissent à une même loi (éventuellement distincte de la précédente). Dans ces conditions, si  $W_n(x)$  est le nombre de valeurs propres de la matrice inférieures à  $x$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n(x2\sigma\sqrt{n}) = 2/\pi \int_{-1}^x \sqrt{1-x^2} dx \quad (3.27)$$

D'une manière remarquable, les hypothèses portant sur les distributions sont très limitées. La limite principale de ce résultat est son caractère asymptotique, on peut aussi ajouter que les dépendances statistiques entre variables ne sont pas prises en compte ici.

### 3.2.2 Propriétés des graphes aléatoires

Nous nous tournons brièvement dans cette section vers la littérature des "systèmes complexes" et plus particulièrement vers l'étude des propriétés statistiques des grands réseaux. L'idée est ici d'assimiler l'ensemble des capteurs aux noeuds d'un réseau afin d'en caractériser la connectivité d'un point de vue statistique.

En effet un champ de recherche est consacré à l'étude des principes qui sous-tendent non seulement l'organisation [38] mais aussi l'évolution des grands réseaux [12]. Par

### 3.2. Organisation des relations de dépendance, représentations et caractérisations

---

exemple en biologie, trois types de réseaux macromoléculaires prennent part au fonctionnement d'une cellule : les réseaux métaboliques, protéine-protéine, et les réseaux de régulation génétiques. De nombreuses études encodent les réseaux métaboliques sous forme de graphes, ce qui permet leur caractérisation à l'aide de la théorie des graphes aléatoires [4, 24] : la relation élémentaire qui relie deux métabolites du réseau est l'existence d'une réaction catalysée par certains enzymes, et dont ils sont les réactifs. Il est prouvé que de tels principes régissent nombre de processus intracellulaires où l'on rencontre des organisations particulières telle que l'invariance d'échelle jugée responsable de leur résistance caractéristique aux erreurs. Devant la grande hétérogénéité des constantes de réaction [3], il est néanmoins légitime de s'interroger sur l'utilisation de graphe dont les poids des arcs ne sont pas pondérés, comme nous le verrons plus loin.

En neurophysiologie, les réseaux cérébraux peuvent être examinés de deux points de vue : structurel et anatomique d'un côté, fonctionnel et effectif de l'autre [46]. Le premier concerne les connexions physiques à différentes échelles possibles, que ce soit à celle des neurones individuels ou à celle des zones cérébrales, qui mènent à des réseaux de tailles différentes. Le second domaine s'intéresse à l'activité et aux dépendances entretenues par des neurones ou par des zones cérébrales. La distinction entre études fonctionnelles [41] et effectives relève de la prise en compte de la causalité, privilégiée par la connectivité effective tandis que la connectivité fonctionnelle prend en compte des dépendances statistiques (cf [43, 31] pour les réseaux neuronaux artificiels).

Les deux exemples ci-dessus révèlent une limite des représentations sous forme de graphe : la topologie du graphe dépend fortement de la définition de la relation binaire qui définit l'existence d'un arc entre deux sommets. Il a été proposé dans la littérature [53, 5] d'assigner un poids aux arcs, et de généraliser les invariants définis pour les graphes dont les arcs ne sont pas pondérés. Nous explorons ici une piste alternative : tout d'abord nous définissons des relations dépendantes d'un seuil, puis nous comparons des structure de données et des méthodes de caractérisation de la structure globale qui prennent en compte les valeurs du seuil pour lesquelles les caractéristiques du réseau changent quand le seuil parcourt un intervalle donné.

La section §3.2.2.1 traite des différentes techniques de caractérisation d'un ensemble de relations binaires ; la section §3.2.2.3 s'intéresse au problème du choix du seuil, et des structures de données adaptées ; enfin la section §3.2.3 traite du problème des relations  $n$ -aires.

#### 3.2.2.1 Relations binaires

Le système étudié se compose de  $n$  unités dont les activités sont quantifiées par des scalaires assimilés à des variables aléatoires dépendantes les unes des autres sans qu'on connaisse la nature de cette dépendance. Il s'agit d'abord de proposer une représentation de l'activité d'ensemble, sans se soucier ici d'en fournir une explication.

A l'instar des fonctionnelles courantes telles que l'entropie qui prennent en argument de

grands échantillons et produisent des scalaires, les méthodes dont on discute ici reposent sur des fonctionnelles prenant les activités des  $n$  variables en argument, et examinent leur comportement en fonction de l'activités des  $n$  unités. Cependant, à l'inverse des fonctionnelles courantes, les outils tirés de l'étude statistique des grands réseaux tirent leur spécificité de l'importance qu'elles accordent aux propriétés topologiques, de connectivité du réseau. Le plus souvent, elles s'appuient sur des relations binaires entre unités, mais sans s'interdire de considérer des relations  $n$ -aires (cf §3.2.3).

Comment définir ces relations binaires? Si  $u_i$  et  $u_j$  sont deux unités dont on mesure les activités, on peut par exemple dire que " $u_i$  et  $u_j$  sont reliées" si leurs activités sont corrélées. On a vu plus haut (3.1) que la corrélation était un outil fondamental, mais limité d'une part par l'hypothèse de linéarité de la dépendance statistique, d'autre part par le fait de prendre en compte deux variables uniquement. Dans la suite on pourra par exemple poser que deux variables sont reliées, ce qu'on note  $R_\varepsilon(X, Y)$  si leur indice de corrélation est supérieur en valeur absolue à un certain  $\varepsilon$ , ou si leur information mutuelle est supérieure à  $\varepsilon$ .

$$R_\varepsilon(X, Y) \iff |\text{corr}(X, Y)| > \varepsilon \quad (3.28)$$

$$R_\varepsilon(X, Y) \iff MI(X, Y) > \varepsilon \quad (3.29)$$

Bien entendu, l'influence du niveau  $\varepsilon$  est cruciale, et sera abordée en §3.2.2.3. Affirmer que deux unités sont reliées ne suffit pas cependant, car il nous faut encore caractériser l'activité d'ensemble en partant de la juxtaposition des relations élémentaires. Par exemple, il est courant en informatique de construire un graphe une fois que la relation élémentaire entre variables est posée, comme l'illustre la Fig.3.3, avant de caractériser ce graphe de multiples manières.

### 3.2.2.2 Organisation d'un ensemble de relations binaires

Dans cette section on limite la discussion au cas des relations binaires, dont la donnée équivaut à associer un graphe à l'activité de l'ensemble des unités dont ils constituent les sommets. Quelles sont les propriétés globales produites par l'ensemble des interactions locales? De quel type de signature globale peut-on se munir? Étant donnée la nature aléatoire des graphes concernés, on propose d'emprunter à la théorie des graphes aléatoires quelques outils. Pour cela on commence par identifier précisément le type de graphe auquel on a affaire : on a déjà supposé que les arcs des graphes n'étaient pas pondérés, de plus on remarque que matrices des relations (3.28) sont symétriques ; les graphes obtenus sont donc non orientés.

Parmi les nombreux outils disponibles en théorie des graphes aléatoires (cf [38]), le plus courant est le *degré* qui correspond au nombre de sommets auquel un sommet est connecté. Classiquement, à chaque type de graphe aléatoire on souhaite associer la densité de probabilité du degré, qu'on connaît parfois analytiquement comme dans le cas du

### 3.2. Organisation des relations de dépendance, représentations et caractérisations

graphe aléatoire de Erdős-Rényi (cf [6]), défini comme un graphe possédant  $n$  sommets et  $e$  arêtes choisies au hasard parmi les  $n(n-1)/2$  arêtes possibles. Dans ce cas, il est démontré qu'asymptotiquement quand  $n \rightarrow +\infty$  la loi du degré  $K$  d'un tel graphe suit une loi de Poisson  $P(K = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$ , de premier moment  $\lambda = 2e/n$  (cf Fig. 3.2(b)).

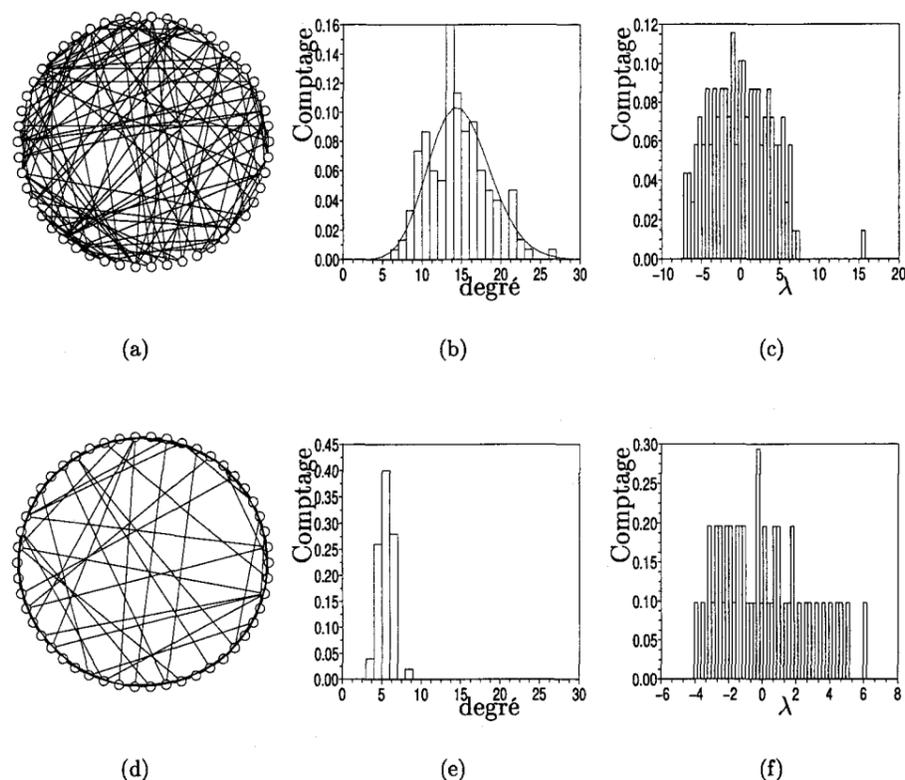


FIG. 3.2 - Graphe aléatoire de Erdős-Rényi et Small-World, pour une probabilité de recablage  $p = 0.2$  (a,d) graphe (b,e) distributions empiriques et théoriques des degrés. Pour le graphe d'Erdős-Rényi, on vérifie bien que  $E[K] = \lambda = 2e/n$ , où  $e$  est le nombre d'arêtes et  $n$  le nombre de sommets (c,f) histogramme du spectre de la matrice d'adjacence.

Une autre caractéristique faisant l'objet de nombreux travaux est le spectre du graphe de la matrice d'adjacence. On rappelle que cette dernière encode la connectivité des noeuds du graphe comme suit :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } R_\epsilon(X, Y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les valeurs propres du spectre caractérisent notamment l'existence de communautés très connectées à l'intérieur du graphe, qu'on peut identifier par les valeurs propres proches de

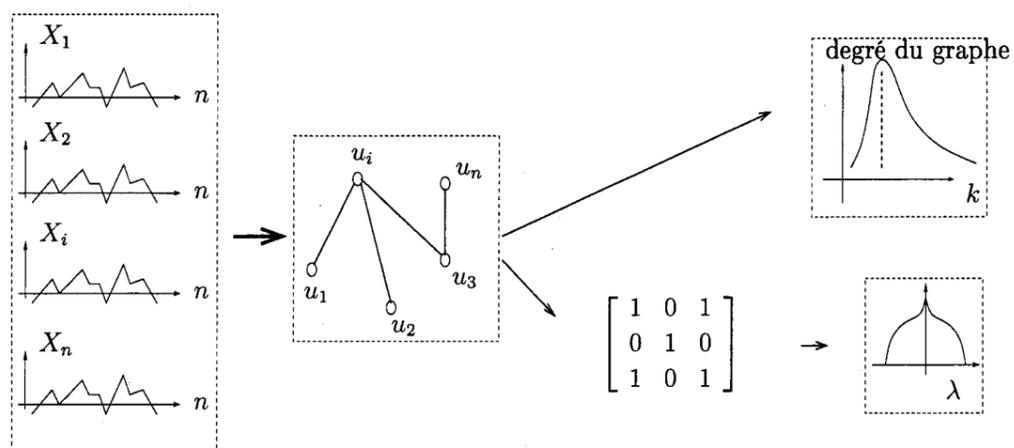


FIG. 3.3 – Construction et caractérisation du graphe associé à des variables aléatoires, pour une relation binaire donnée. Deux caractéristiques sont calculées d'après le graphe : (*haut droite*) la densité de probabilité du degré  $k \rightarrow P(K = k)$ , (*bas droite*) le spectre de la matrice d'adjacence du graphe

1 des sous-espace associés (cf [30, p.4]). La littérature sur les graphes aléatoires identifie les spectres caractéristiques associés à de nombreux types de graphes aléatoires, dont ceux des graphes de Erdős-Rényi et Small-world donnés par Fig.3.2(c,f). On renvoie pour des plus amples développements et interprétations aux articles de revues faisant autorité dans ce domaine, tels que [38, 15].

De manière plus générale, bien que dans la suite seul le degré soit considéré, la Fig.3.3 illustre l'ensemble de la démarche qui consiste à :

- à l'aide d'un nombre fini de réalisations des variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$ , estimer si ces deux variables sont reliées au sens de (3.28) à l'aide d'un estimateur statistique.
- itérer sur l'ensemble des  $1 \leq i, j \leq n$  et on obtient un graphe.
- caractériser ce graphe à l'aide d'une fonctionnelle topologique, et plus particulièrement sa distribution empirique en examinant l'ensemble des sommets.

Enfin, on se pose les questions suivantes :

- peut-on expliquer l'allure des caractéristiques obtenues pour différents choix des ensembles  $\{X_i\}_{i \leq n}$  ?
- ces caractéristiques permettent-elles de distinguer ces situations ?
- les graphes construits à l'aide de données tirées d'expériences en robotique sont-ils semblables aux graphes classiques de la théorie des graphes aléatoires (Erdős-Rényi, small-world,...)

Les réponses expérimentales partielles à ces question sont données section §3.4.3.

### 3.2.2.3 Choix du seuil : solutions mises en oeuvre et perspectives

Au cours du §3.2.2, nous avons détaillé la procédure de discrétisation des relations de dépendances entre des sources permettant de se ramener à l'étude des propriétés de graphes aléatoires. Au cours du processus survient le choix crucial du seuil de discrétisation, effectué arbitrairement. Il est important de remarquer que, même lorsqu'en apparence la discrétisation obéit à un critère "objectif", un choix arbitraire est souvent nécessaire. Prenons l'exemple des tests de dépendance statistiques entre variables, évoqué en §3.1.2.2. On a proposé plusieurs techniques telles que le test de Celluci inspiré du  $\chi^2$ , le test de Roulston introduisant une statistique  $Z_H$  qui suit une loi uniforme quand  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, ou encore le test empirique fondé sur la constitution d'un ensemble de données de substitution (*surrogate data*). Ces trois cas se rattachent à la théorie classique des tests qui prévoit la fixation de l'erreur de première espèce  $\alpha$ , et quantifie la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle  $H_0$  alors même qu'elle est validée. Or le choix de ce seuil  $\alpha$  est conventionnel, i.e. fixé par l'usage en statistiques. On trouvera des exemples de tels procédés, lorsqu'il s'agit de reconstruire un réseau de régulation en génétique (cf [7, 32]).

Dans cette partie nous énumérons différentes méthodes de choix du seuil et proposons une piste de recherche exploitant la théorie de l'information. Il est possible :

- d'imposer une fraction fixe du nombre total d'arcs possibles : en effet les propriétés des graphes aléatoires dépendent largement de leur taille, aussi il convient avant de comparer deux graphes aléatoires de les normaliser en égalisant par exemple leur nombre de sommets et d'arêtes<sup>45</sup>. Soient alors  $n$  sources associées à autant de sommets, potentiellement reliées par des arcs en fonction d'une relation binaire  $R_e$  entre couples de sommets. Le nombre maximal des arcs est  $e_{max} = \frac{n(n-1)}{2}$  quand les liens d'un sommet à lui-même sont proscrits. D'après le principe de normalisation énoncé plus haut, il est alors légitime de fixer  $\varepsilon$  de sorte que le nombre d'arcs  $e$  du graphe soit toujours égal à une fraction fixe de  $e_{max}$ . On emploie cette solution en §3.3.
- d'encoder tous les graphes associés à un nombre fini de valeurs de  $\varepsilon$  : une solution consiste à se donner un vecteur de valeurs de  $\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p]$  et de caractériser les graphes associés. De manière plus économique, on préférera ne stocker que les valeurs de  $\varepsilon$  pour lesquelles un changement du graphe survient ; ce qui permet d'envisager l'étude de la variation des caractéristiques topologiques dans le "temps". Cette méthode donne lieu aux développements de la partie §3.2.3, dans le cas des relations  $n$ -aire.
- mettre à profit la théorie de la distorsion : cette branche de la théorie de l'information s'intéresse à l'encodage d'un signal discret ou continu dans le but de transmettre et de reconstituer ce signal avec la plus grande fidélité possible.

Nous développons brièvement ce dernier point dans le paragraphe ci-dessous.

<sup>45</sup> "for many properties  $Q$  in random graphs there is no unique,  $N$ -independent threshold, but we have to define a threshold function that depends on the system size" [38] p.55

**Rate distortion theory** Cette section résume quelques résultats dont rendent compte Cover et Thomas, [10, chap.13].

Soit une source qui produit une suite  $X^n = (X_1, \dots, X_n)$  d'échantillons de longueur  $n$ , générés par des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) à valeurs dans  $\mathcal{X}$ . On échantillonne cet ensemble  $\mathcal{X}$  en définissant une partition composée de  $2^R$  sous ensemble ( $R$  est nommé *rate* en anglais). A chaque sous-ensemble de la partition est associé un élément d'un ensemble  $\hat{\mathcal{X}}$ . Alors chaque suite  $X^n$  est prise parmi un ensemble de  $2^{nR}$  suites possibles ; il est donc possible d'associer un entier à chaque suite, pourvu que celui-ci soit compris entre 1 et  $2^{nR}$ . L'objet d'étude est alors le couple encodeur-décodeur, dont le rôle est le suivant : l'encodeur associe à toute suite  $X^n$  produite par la source, à valeurs dans  $[1, 2^{nR}]$ , alors que le décodeur associe à chacun de ces symboles une estimation  $\hat{X}^n$  de la suite  $X^n$ .

On définit alors une *distorsion*  $d : \mathcal{X} \times \hat{\mathcal{X}} \rightarrow R^+$ , qui quantifie le coût de représenter  $X \in \mathcal{X}$  par le symbole  $\hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$ . De même on définit une mesure de distorsion entre suite de symboles  $d(X^n, \hat{X}^n)$  comme la moyenne de la distorsion par symbole  $d(.,.)$  pour une suite donnée de symboles. Enfin, la distorsion associée à un code est définie comme une moyenne sur l'ensemble des suites de symboles de la distance entre une suite et sa représentation, sous la forme  $E[d(X^n, g_n(f_n(X^n)))]$ , où  $f_n$  et  $g_n$  sont les fonctions respectivement associées à l'encodage et au décodage.

Le résultat principal de la théorie de la distorsion est le "rate distortion theorem" qui répond à la question : existe-t-il un code permettant d'obtenir une distorsion moyenne  $\bar{d}$ , étant donnée la fonction de distorsion par symbole  $d$ ? Ce théorème ne suffit cependant pas à résoudre le problème global du codage puisqu'il ne donne pas les partitions ni les symboles associés. Pour cela, on dispose toutefois de l'algorithme de Lloyd qui permet d'obtenir un extremum local de la distorsion moyenne.

Comment appliquer ces résultats à notre problème ? De manière évidente, la construction d'un graphe à partir de la matrice des informations mutuelles s'apparente à un encodage à deux niveaux pour chacun des couples possibles. On ne met pas à profit des outils au long de ce chapitre, mais on discute des perspectives d'utilisation en conclusion.

Dans la suite, nous généralisons aux relations  $n$ -aires les principes d'étude mis en avant jusqu'ici dans le cas de relations binaires.

### 3.2.3 Relations $n$ -aires, complexes simpliciaux et caractérisation topologique

En §3.2.2.2, un ensemble de relations binaires à été assimilé à un espace topologique, qu'on sait caractériser de diverses manières. Nous avons restreint notre domaine d'étude aux relations binaires entre variables. Or si nous revenons au sens statistique des relations, qui s'appuient sur la notion de dépendance, on doit constater que les relations entre 2 variables dans un ensemble de  $n$  variables ne suffisent pas à rendre compte de toute la

3.2. Organisation des relations de dépendance, représentations et caractérisations

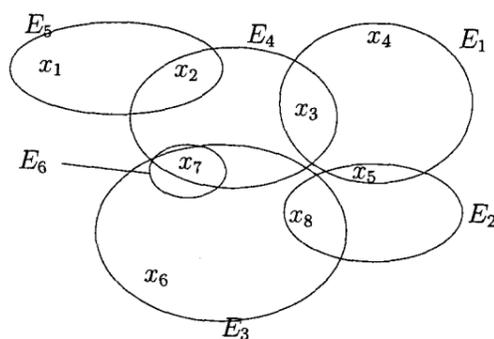
richesse des interactions. On renvoie pour des exemples précis à la communication entre deux sources émettrices et une source réceptrice [33], ou à l'inférence de réseau génétique [32].

Les statistiques nous enseignent donc l'importance des dépendances d'ordre supérieur, et nous permettent d'inférer l'intensité de ces dépendances d'après une quantité finie de mesures comme on le verra en §3.2.3.1.

Mais du point de vue des représentations, de l'encodage et de la caractérisation d'un tel ensemble de relations de dépendance d'ordre supérieur, de quels outils dispose-t-on ? Soit  $\mathbf{X}$  un ensemble fini de variables aléatoires,  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  dont on extrait des  $m$ -uplet de variables aléatoires  $E = \{X_{i_1}, \dots, X_{i_m}\}$ . Une solution consiste à associer à chaque  $m$ -uplet une mesure de dépendance statistique  $f(\mathbf{E})$  et à ne retenir que les  $m$ -uplets tels que  $f(E) > \varepsilon$  comme on l'a déjà vu en 3.2 pour obtenir des graphes. On obtient une famille de sous-ensembles de  $\mathbf{X}$ ,  $H = (E_1, \dots, E_m)$  tel que  $\mathbf{X} = \cup_i E_i$ , définissant un *hypergraphe* et une matrice d'incidence (cf Fig.3.4).

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$E_1$	0	0	1	1	1	0	0	0
$E_2$	0	0	0	0	1	0	0	1
$E_3$	0	0	0	0	0	1	1	1
$E_4$	0	1	1	0	0	0	1	0
$E_5$	1	1	0	0	0	0	0	0
$E_6$	1	1	0	0	0	0	1	0

(a)



(b)

FIG. 3.4 - Hypergraphe, adapté de [26]

Plutôt que d'aborder ce problème dans sa généralité, nous nous restreignons ici à un espace topologique discret nommé *complexe simplicial*, dont nous donnerons une définition

plus précise en §3.2.3.2 ainsi qu'un exemple de caractéristique reposant sur la théorie de l'homologie. Le bénéfice de la restriction à ce type d'espace est de disposer de nombreux travaux développés en topologie et plus particulièrement en topologie computationnelle, qui permettent l'implémentation efficace des caractéristiques en question.

### 3.2.3.1 Relations et dépendance statistique d'ordre supérieur

La section §3.1.2 définissait une relation binaire entre deux variables aléatoires par l'information mutuelle (cf Eq.(3.24). Il existe plusieurs manières d'étendre cette définition dans un cadre multivarié, i.e. pour un ensemble de  $n > 2$  variables aléatoires (non nécessairement scalaires), la plupart provenant de la théorie de l'information [10, 25, 28].

La première est de revenir de l'information mutuelle vers l'entropie relative qui la fonde, dénommée aussi distance de Kullback-Leibler (cf [10, p.19]). Soient  $p$  et  $q$  deux densités de probabilités associées à un ensemble d'événements discrets  $\{x_i\}_{i < n}$  :

$$D(p||q) = \sum_i p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

L'information mutuelle est l'entropie relative entre la loi jointe et le produit des lois marginales. Remarquons d'abord que le terme de "distance" est ici abusif car cette quantité n'est pas symétrique et ne vérifie pas l'inégalité triangulaire ([10, p.18]). En revanche on dispose du résultat suivant de positivité qui s'accorde avec la conception classique d'une distance :

$$D(p||q) \geq 0 \quad (3.32)$$

$$D(p||q) = 0 \iff \text{pour tout } x, p(x) = q(x) \quad (3.33)$$

Ce résultat s'obtient grâce à l'inégalité de Jensen fondée sur la convexité du log (cf [10] p.26), dont on peut déduire :

$$I(X, Y) \geq 0 \quad (3.34)$$

$$I(X, Y) = 0 \iff X, Y \text{ sont indépendantes} \quad (3.35)$$

l'indépendance étant obtenue pour  $p(X, Y) = p(X)p(Y)$ . De même  $n$  variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si leur loi jointe se factorise en le produit des marginales. Nous rappelons au passage que  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes si pour toute suite extraite  $X_1, \dots, X_m$  et pour tout ensemble fini  $a_1, \dots, a_m$  les événements  $\{X_1 \leq a_1\} \dots \{X_m \leq a_m\}$  sont mutuellement indépendants.

### 3.2. Organisation des relations de dépendance, représentations et caractérisations

Alors, pour définir une relation paramétrée, on procède par analogie avec les définitions de relations déjà introduites en (3.24). En définissant cette fois une relation d'indépendance, au lieu d'une relation de dépendance :

$$R_\varepsilon(X, Y) \iff D(p(X, Y) || p(X)p(Y)) < \varepsilon \quad (3.36)$$

qui s'étend aisément aux ordres supérieurs. Remarquons que, en matière de tests d'indépendance, on dispose d'outils mieux justifiés du point de vue inférentiel tels que le test du  $\chi^2$  proposé par Celluci (déjà évoqué en §3.1.2.2). Pourquoi alors préférer cette définition ? Car elle entraîne alors la propriété suivante qui nous sera utile par la suite :

$$R_\varepsilon(X, Y, Z) \Rightarrow R_\varepsilon(X, Y), R_\varepsilon(X, Z), R_\varepsilon(Y, Z) \quad (3.37)$$

dont on donne la preuve en fin de chapitre. Cette relation découle directement de la définition de l'indépendance mutuelle et de l'indépendance 2 à 2 en théorie des probabilités, et rappelée ci-dessus. La quantité :

$$D\left(p(X_1, \dots, X_n) || \prod_i p(X_i)\right) \quad (3.38)$$

aussi appelée *redondance* dans la littérature (cf [51]) s'écrit également<sup>46</sup> à l'aide de l'entropie de Shannon, en généralisant l'écriture de  $I(X, Y)$  sous la forme  $I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$ , soit :

$$r(X_1, \dots, X_n) = \sum_i H(X_i) - H(X_1, \dots, X_n) \quad (3.39)$$

Elle présente l'avantage d'être toujours positive. De plus en remarquant que  $r(X, Y) = I(X, Y)$ , on vérifie la propriété suivante (cf [29, p.15]) :

$$r(X, Y, Z) = r((X, Y), Z) + r(X, Y) \quad (3.40)$$

De manière notable, le membre de droite ne s'exprime qu'en fonction de redondances à deux arguments, ce qui permet de décomposer une redondance d'ordre élevé en redondances élémentaires à deux facteurs. On en déduit au passage que  $r(X, Y, Z) \geq r(X, Y)$  et que donc la propriété (3.37) est valable aussi pour la redondance.

Dans la littérature on trouve une autre généralisation de l'information mutuelle dans le cas multivarié, qui se comprend à partir du passage du diagramme de Venn à deux variables à celui à trois variables, représentés Fig.3.5(a,b) (cf [10]). Dans ce cas on pose (cf [10] p.45) :

$$I(X, Y, Z) = I(X, Y) - I(X, Y|Z) \quad (3.41)$$

<sup>46</sup> voir calcul en fin de chapitre

En confrontant cette définition avec celle de la redondance, on constate que cette dernière ne satisfait pas l'intuition graphique suggérée par la Fig.3.5(b).  $I(X, Y, Z)$  s'annule si et seulement si  $(X, Y, Z)$  sont indépendantes, et s'interprète comme une interaction simultanée. Toutefois elle présente l'inconvénient de ne pas être toujours positive, et de ne pas vérifier à notre connaissance la propriété (3.37).

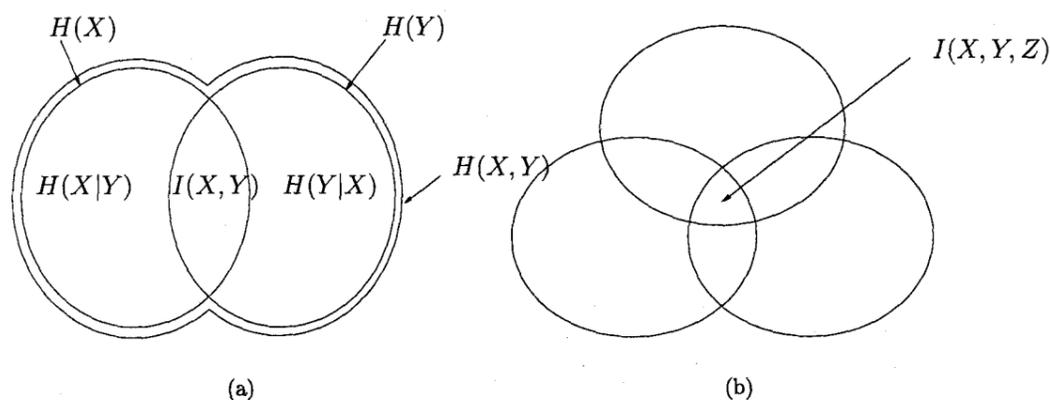


FIG. 3.5 – Diagramme de Venn pour (a) deux puis (b) trois variables aléatoires.

### 3.2.3.2 Organisation et caractérisation de l'ensemble des relations

En §3.2.3, la transition entre un ensemble de relations locales et les "propriétés de l'interaction globale" est formalisé en deux temps :

- identification un ensemble de relations  $n$ -aires à un espace topologique.
- caractérisation de cet espace à l'aide d'invariants topologiques.

Dans cette section nous montrons comment, à l'aide de la propriété Eq.(3.37) vérifiée pour certaines des relations  $R_e$  posées plus haut, on peut construire un *complexe simplicial* et le caractériser par l'intermédiaire de son *homologie*. Nous donnons dans la suite une définition de l'homologie, et la situons brièvement par rapport à d'autres traditions d'étude topologique.

**Homologie simpliciale** La théorie de l'homologie simpliciale fournit des *invariants*, i.e. des applications de l'ensemble des espaces topologiques vers un espace plus simple tel que la droite réelle  $\mathbb{R}$ , ou un sous ensemble tel que  $\mathbb{Q}$ . L'hypothèse principale est que l'ensemble des espaces topologiques de départ est constitué de classes d'équivalence difficilement accessibles directement. Idéalement, un invariant associe deux nombres distincts à deux espaces topologiques appartenant à des classes distinctes. Toutefois, le pouvoir discriminant de ces invariants est limité et ils ne permettent pas en général de distinguer finement toutes les classes prévues par la théorie, mais seulement des groupes de classes.

### 3.2. Organisation des relations de dépendance, représentations et caractérisations

En revanche, deux espaces appartenant à la même classe auront toujours le même invariant, comme l'illustre la Fig.3.6. De ce fait les invariants sont souvent employés par contraposition : si les caractéristiques associés à deux espaces topologiques sont distinctes, alors ces espaces appartiennent nécessairement à des classes distinctes. Pour résumer : si deux espaces appartiennent à la même classe, leur invariant doit être identique, mais s'ils appartiennent à des classes différentes, leur invariant n'est pas nécessairement distinct ; et l'objet de nombreuses recherches en mathématiques consiste précisément à élaborer des invariants de plus en plus fins.

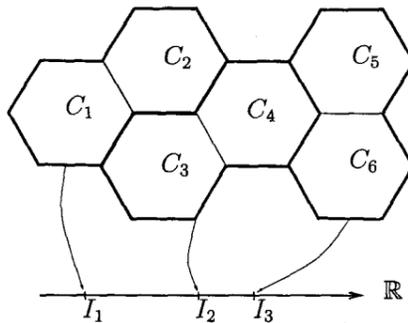


FIG. 3.6 – Principe de l'invariant topologique.

La théorie de l'homologie simpliciale nous fournit de tels invariants, comme on le verra au cours de cette section, en s'appuyant principalement sur l'ouvrage de Zomorodian [54]. Nous commençons par la situer parmi les disciplines connexes occupées par la comparaison entre des espaces de différentes natures, et la partition de l'ensemble de ces espaces en classes d'équivalence. Le terme d'*équivalence* peut se comprendre de plusieurs manières :

1. *homéomorphie* : soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques<sup>47</sup>. S'il existe une application continue et bijective  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f^{-1}$  soit continue alors  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes, et de même type topologique.
2. *homotopie* :  $X$  et  $Y$  sont équivalents par homotopie si on peut déformer continûment l'un jusqu'à ce qu'il devienne l'autre.
3. *homologie* : au lieu de manipuler les espaces par l'intermédiaire d'applications définies entre ces espaces, l'homologie introduit des structures algébriques intermédiaires (des groupes, en l'occurrence) et caractérise les structures algébriques plutôt que les espaces eux-mêmes.
4. *homologie simpliciale* : cette forme d'homologie est définie dans un cadre discret, i.e. quand les points qui forment l'espace sont dénombrables et forment des espaces topologiques particuliers : les complexes simpliciaux.

<sup>47</sup> une topologie est un ensemble de sous-ensemble qui définit la connectivité de l'espace.

Zomorodian [54] compare ces différentes notions empruntées à la topologie et à la topologie algébrique, et oriente son attention vers l'homologie simpliciale, seule compatible selon lui avec la possibilité d'implémenter des algorithmes et de mener des calculs.

**Complexes simpliciaux et indépendance statistique** Pour manipuler de manière computationnelle les caractéristiques topologiques des espaces, une contrepartie semble être de se restreindre à l'ensemble des complexes simpliciaux. Ceux-ci sont définis grossièrement comme des ensembles dénombrables de sommets, reliés par des arcs et des faces de dimension supérieure à 1. Ces contraintes formelles ne sont toutefois pas développées ici, et nous renvoyons le lecteur intéressé à une présentation axiomatique dans [54]. Nous énonçons les définitions de manière plus intuitive :

- un *simplexe* de dimension donnée est constitué d'un ensemble de sommets  $V$ , et de tous les *simplex* de dimensions inférieures que l'on peut former avec des sous-ensembles de  $V$ . Par exemple un 2-simplex  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  est constitué d'une part des sommets  $v_1, v_2, v_3$ , et d'autre part de l'ensemble des simplexes que l'on peut former avec des sous-ensembles de  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . Dans ce cas particulier ces sous-ensembles sont aisément énumérables et se limitent aux arêtes et faces suivantes (cf Fig. 3.7(a)) :

$$\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$$

- un *complexe simplicial* est un ensemble de simplexes qui peuvent avoir des intersections non vides, du moment que ces intersections coïncident exactement avec des simplexes du complexe, comme illustré Fig. 3.7(b).

Pour mémoire on nomme  $C_1$  la condition fondamentale vue ci-dessus :

( $C_1$ ) : si un simplex  $s$  appartient à un complexe simplicial  $K$ , alors toutes ses faces appartiennent à  $K$ .

La compatibilité entre la condition  $C_1$  et la propriété (3.37) apparaît clairement ici. Si on se donne un ensemble de sources  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  on peut énumérer l'ensemble des sous-ensembles de  $\mathbf{X}$  et estimer si les sources contenues dans chaque sous-ensemble sont indépendantes au sens de  $R_e$ . On énumère ainsi des sous-ensembles qu'on peut désormais associer à des sommets d'un complexe simplicial, car si  $X_i, X_j, X_k$  forment une face dont les sommets sont des sources mutuellement indépendantes au sens de  $R_e$ , alors  $(X_i, X_j)$ ,  $(X_i, X_k)$ ,  $(X_j, X_k)$  forment également des faces dont les sommets sont des sources indépendantes deux à deux, au sens de  $R_e$  :

$$R_e(v_i, v_j, v_k) \Rightarrow \begin{array}{l} R_e(v_i, v_j) \\ R_e(v_i, v_k) \\ R_e(v_j, v_k) \end{array}$$

Dans la suite nous décrivons des techniques de caractérisation offertes par l'homologie simpliciale.

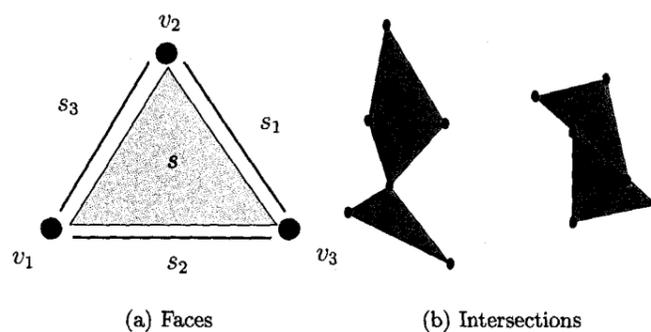


FIG. 3.7 - (a) 2-simplex  $s = \{v_1, v_2, v_3\}$ , et faces  $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$ .  
 (b) Complexe simplicial avec intersections (gauche) permises ou (droite) interdites.

**Nombres de Betti** Dans des expériences sur lesquelles nous ne nous attarderons pas ici, nous avons proposé d'étendre les notions employées en théorie des graphes aléatoires, telles que le degré, mais en tenant compte de la présence d'interaction d'ordre supérieur à 1. On peut en effet légitimement se demander quelle est la probabilité pour un sommet d'appartenir simultanément à exactement  $k_0$  simplexes de dimension 0,  $k_1$  simplexe de dimension 1, etc... mais cela supposerait de manipuler une densité de probabilité jointe de dimension élevée, paramétrée par un seuil. Pour ces raisons nous n'avons pas poursuivi cette piste.

Les topologistes disposent d'invariants efficaces pour classifier les types d'espace. L'invariant le plus connu reste la caractéristique d'Euler  $\chi$  définie comme suit pour les polyèdres :

$$\chi = S - A + F \quad (3.42)$$

où  $S$  est le nombre de sommets,  $A$  le nombre d'arêtes et  $F$  le nombre de faces du polyèdre. Prenons l'exemple de polyèdres homéomorphes à une sphère, tels qu'une tétraèdre, un cube, un octaèdre. Bien qu'en géométrie ces polyèdres soient considérés comme distincts du fait de leurs différences de nombre de faces, d'arêtes et de sommets, ils sont tous déformables continûment en une sphère. On s'attend donc à ce que l'invariant topologique d'Euler calculé pour chacun des ces polyèdres soit le même. C'est bien ce qui se produit, comme on le vérifie avec la formule d'Euler pour les polyèdres homéomorphes à une sphère :

$$\chi = 2 \quad (3.43)$$

Les polyèdres constituent un cas particulier où les faces sont de dimension 2; si toutefois les faces sont de dimension plus grande, la caractéristique d'Euler devient

$$\chi = k_0 - k_1 + k_2 - k_3 + \dots \quad (3.44)$$

Pour un espace topologique quelconque, la caractéristique d'Euler s'écrit :

$$\chi = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \dots \quad (3.45)$$

où les  $\beta_i$  sont les *nombre de Betti*. Rappelons que ces nombres sont définis comme le rang du  $n$ -ième groupe homologique. Ils possèdent une interprétation plus intuitive que cette définition ne le laisse supposer. Supposons en effet que nous considérons un complexe simplicial en dimension 3 ; pour le caractériser on peut compter le nombre de bulles d'air enfermées à l'intérieur de ce complexe, ainsi que le nombre de tunnels qui permettent de traverser ce complexe. La justification topologique du fait qu'un tel inventaire caractérise effectivement le complexe vient de l'impossibilité de déformer continûment une bulle d'air incluse dans un complexe en un tunnel qui passe à travers le complexe.

Prenons l'exemple suivant en nous appuyant sur la Fig. 3.8 qui représente une sphère (creuse) et un tore (creux). Intuitivement, il semble impossible de déformer continûment la sphère pour qu'elle devienne un tore. La vision homologique de ce constat est la suivante : la sphère englobe complètement une bulle d'air, tout comme le tore. Toutefois, un tunnel passe au travers du tore, ce qui n'est pas le cas de la sphère. A l'inverse si on creusait un tunnel muni d'une paroi à l'intérieur de la sphère, on retrouverait le même type d'objet, du point de vue de l'homologie.

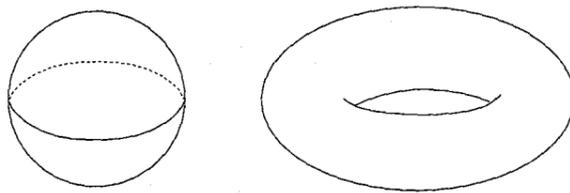


FIG. 3.8 – Sphère et tore (creux).

Ainsi, dans la littérature topologique, les nombres de Betti d'ordre  $k$   $\beta_k$  encodent les propriétés suivantes des espaces topologiques :

- $\beta_0$  s'interprète comme le nombre de *composantes connexes* du complexe simplicial.
- $\beta_1$  est le *nombre de tunnels* ceints par l'espace.
- $\beta_2$  est le *nombre de vides* enclos par l'espace.

On se souvient que les relations  $R_\varepsilon$  dont on dispose sont paramétrées par  $\varepsilon$ . Que se passe-t-il quand ce seuil varie ? Lorsque ce seuil est proche de zéro, les sources étudiées doivent être proches de l'indépendance pour valider le prédicat  $R_\varepsilon(\dots)$ . A mesure qu'on augmente  $\varepsilon$ , la contrainte devient de moins en moins sévère, et de plus en plus d'arcs et faces sont susceptibles d'apparaître. Il est aisé de constater que les variations de  $\varepsilon$  donnent naissance à une famille paramétrée de complexes simpliciaux  $K_\varepsilon$ , cette famille étant croissante au sens de l'inclusion des complexes simpliciaux à mesure que  $\varepsilon$  croît.

Il y a donc lieu, en revenant à la caractérisation du complexe simplicial à l'aide des nombres de Betti, de calculer autant de triplets  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  (en se limitant à la dimension

3) qu'on veut examiner de valeurs du seuil  $\varepsilon$ . Ceci pose un problème computationnel, car le calcul des nombre de Betti nécessite un grand nombre de cycles de calcul.

Dans la section suivante, on donne un bref aperçu de la solution avancée par Edelsbrunner et al. [14] à ce problème de topologie computationnelle, en introduisant la notion d'homologie persistante pour capturer les nombres de Betti ayant une longue durée de vie par rapport à l'évolution de  $\varepsilon$ .

**Filtrations et homologie persistante** Une filtration est une suite croissante de sous-complexes d'un complexe simplicial  $K$ , dont on donne un exemple en Fig. 3.30. Soit une application  $t : [0, 1] \rightarrow K$  qui à toute valeur de  $t$  associe un sous-complexe de  $K$ , et telle que lorsque  $t$  augmente, le sous-complexe croisse jusqu'à recouvrir l'intégralité du complexe simplicial  $K$ . Ce paramétrage se présente par exemple quand des complexes sont formés à partir de  $R_\varepsilon$ , et dans de nombreux autres tels que la triangulation d'une surface ou d'un nuage de points [49]. Quel est la significativité d'une propriété du complexe observée pour une valeur donnée du paramètre  $t$ , sachant que pour une valeur proche de  $t$  cette propriété peut changer (e.g. le nombre de cycles Fig. 3.30(a) et (b)) ? On peut s'intéresser d'abord aux propriétés qui restent vraies pour un grand nombre de valeurs de  $t$ .

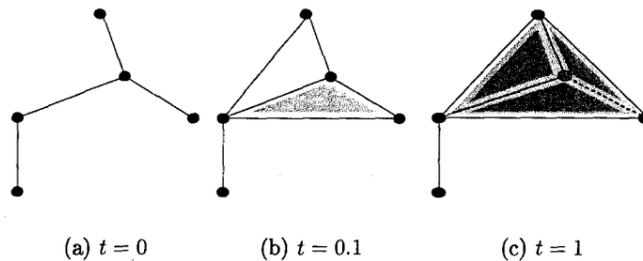


FIG. 3.9 – Filtrations pour des valeurs croissantes du seuil.

Pour résoudre ce problème, Edelsbrunner et al. étendent les nombres de Betti aux filtrations et définissent la persistance d'homologie qui met en évidence les attributs topologiques ayant une longue durée de vie dans une filtration [14, 54].

### 3.2.4 Application : classification de source et de comportement

Comme on l'a vu au cours de l'introduction, il s'agit dans ce chapitre de formaliser et d'organiser les invariants mesurés lors de l'activité simultanée et aléatoire d'un ensemble de sources dépendantes les unes des autres.

Dans le cas par exemple d'un robot mobile, la problématique telle que précisée en 2 peut inclure la catégorisation d'interactions sensorimotrices correspondant à des situations

différentes rencontrées par le robot dans son environnement. Il peut également s'agir de regrouper les différents capteurs d'un robot en fonction de leurs dépendances mutuelles (cf [36]).

On trouve dans la littérature [13, 42] de nombreuses méthodes de *classification* dont le but est de partitionner un ensemble de mesures en catégories "naturelles". Ces méthodes peuvent être soit supervisées soit non supervisées. La première suppose une phase d'apprentissage au cours de laquelle un ensemble d'échantillons est réparti en classes déjà identifiées, ce qui permet d'initialiser les paramètres de l'algorithme avant de l'appliquer à des échantillons pour lesquels on ne dispose pas *a priori* de la catégorie correspondante. Comme ici on suppose qu'aucune connaissance préalable n'est disponible pour réaliser un apprentissage, nous nous limiterons aux méthodes non supervisées qui, elles, laissent un algorithme organiser les classes.

On donne ci-dessous un très rapide aperçu des techniques existantes, et engageons le lecteur à se reporter à [13, chap.10] pour de plus amples développements :

- apprentissage bayésien non supervisé : un échantillon  $\{x_1, \dots, x_p\}$  est partitionné en un ensemble de classes  $\{w_j\}_{j \leq c}$  dont on connaît les probabilités a priori  $P(W = w_j)$ . Les densités conditionnelles  $p(x|w_j, \theta_j)$  sont supposées Gaussiennes le plus souvent, paramétrées par un vecteur  $\theta$  connu partiellement. Il est alors possible d'obtenir la probabilité conditionnelle  $p(w_j|x_{p+1})$  de l'appartenance de  $x_{p+1}$  à la classe  $w_j$  étant donné la connaissance de l'échantillon  $\{x_1, \dots, x_p\}$ .
- *k*-means : on désigne un nombre arbitraire  $c$  de représentants  $\{\mu_j\}_{j \leq c}$  parmi les points de l'échantillon, qui joueront le rôle de centres de classe. Chaque point  $x$  de l'échantillon est alors assigné au représentant  $\mu_j$  dont il est le plus proche au sens d'une certaine métrique. Une fois les classes initialisées, on modifie les centres de classes en prenant pour chaque classe le point le plus proche du barycentre de la classe. Ces opérations sont alors répétées jusqu'à l'obtention de représentants stables.
- analyse de composantes : il s'agit ici de projeter les données dans un espace permettant de séparer plus naturellement les échantillons. L'opération de base est ici la transformée de Karhunen-Loève évalue les valeurs propres et espaces propres de la matrice de variance-covariance  $\Sigma$  des échantillons. Les sous-espaces propres sont rangés par ordre de valeurs propres associées croissantes; on ne retient que les  $k$  vecteurs propres correspondants aux  $k$  plus grandes valeurs propres. On projette enfin les données sur le sous-espace associé à ces vecteurs propres. Il existe des généralisations non linéaires, ou reposant sur l'indépendance statistique (cf [13, §10.13]).
- agglomération hiérarchique : on dispose d'une métrique sur l'espace des échantillons, et d'une métrique sur l'espace des classes d'échantillons. Au début les  $n$  échantillons sont affectés à autant de classes, il n'y a donc qu'un échantillon par classe. Puis on regroupe les deux classes les plus proches au sens de la métrique sur l'espace des classes; et ce de manière itérative jusqu'à l'obtention d'une classe

unique. Pour obtenir une partition des données, on impose soit le nombre de classes, soit une distance seuil.

Nous retiendrons cette dernière méthode au cours des sections suivantes, car elle permet de représenter et de visualiser non pas une partition, mais un ensemble de partitions possibles. Comme dans le domaine de la classification non supervisée, le résultat dépend toujours d'un paramètre que nous préférons ne pas fixer, et laissons au lecteur l'appréciation du caractère "naturel" ou non des partitions potentielles. Le *dendrogramme* permet de visualiser les regroupements successifs entre classes en fonction de la distance pour laquelle ils surviennent. La Fig.3.10 présente en (a) un ensemble d'individus dont l'occupation du plan obéit à une loi normale bimodale, et en (b) le dendrogramme associé à la distance Euclidienne entre les individus. On voit bien que deux classes apparaissent nettement.

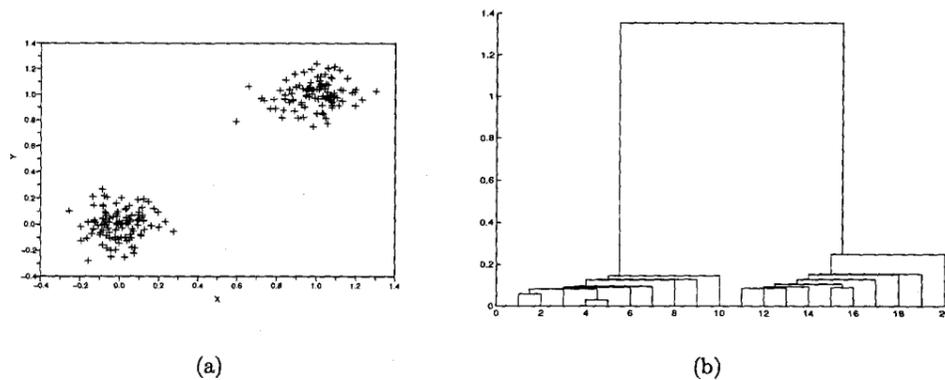


FIG. 3.10 – Classification par agglomération hiérarchique (a) source gaussienne bimodale (b) dendrogramme de la matrice d'interdistances pour la distance euclidienne. En abscisses, les individus (ou caractères), et en ordonnée les distances entre classes pour laquelle survient le regroupement.

Dans les sections ultérieures on mettra à profit le dendrogramme pour classer soit des sources lors d'une expérience unique (cf §3.4.1), soit des réalisations dans des conditions expérimentales distinctes (cf §3.4.2.1, §3.4.3, §3.5).

### 3.3 Illustrations numériques

Nous avons voulu dans cette partie éprouver les outils présentés précédemment dans des cas simples dans lesquels des couples ou des systèmes de variables aléatoires sont dépendants et dont le niveau de dépendance est connu à l'avance. Un simulateur simplifié de robot mobile sera également mis à profit dans différentes situations élémentaires.

Ceci nous permet de comparer la fiabilité et la richesse des renseignements fournis

d'une part par les test de dépendance et d'autre part par l'estimateur d'information mutuelle, enrichi des intervalles de confiance obtenus par bootstrap.

Enfin à l'aide des indicateurs tirés d'un côté de la théorie des matrices aléatoires, et de l'autre de la théorie des graphes aléatoires introduits en §3.2, on évaluera les possibilités de caractérisation le l'activité de l'ensemble des capteurs au cours d'expériences variées, ce qui nous amènera à répondre à deux questions. D'une part, peut-on légitimement, au cours d'une seule expérience, partitionner l'ensemble des capteurs en classes "naturelles". D'autre part, étant donné cette fois un grand nombre d'expériences réalisées dans des situations expérimentales distinctes, peut on partitionner l'ensemble des expériences en classes "naturelles" ? Ces possibilités seront évaluées au moyen d'une classification hiérarchique (cf §3.2.4), et ce pour chaque type de caractéristiques.

### 3.3.1 Implémentation

Nous avons réalisé l'implémentation des statistiques de Celluci, Roulston en Matlab et Scilab. Les tests statistiques associés (détermination de seuils critiques) sont implémentés également en Matlab et Scilab et s'appuyant sur la toolbox Stixbox de Anders Holtsberg<sup>48</sup>. Le bootstrap de Stixbox a du être adapté car il ne prend pas en compte les échantillons multivariés.

Au cours de nos expériences préliminaires reposant sur le calcul de la redondance dans [21], nous implémentons un estimateur "plugin" qui suppose l'estimation des densités de probabilité multivariées, réalisées à l'aide de méthodes à noyaux fondées sur les statistiques de plus proches voisins [19], déjà implémentée par Ihler [23] en Matlab. L'estimation de l'information mutuelle repose sur l'algorithme KSG de Kraskov et collègues introduit en 3.1.2.2 et donné par l'Eq.(3.23), dont les sources C sont disponibles.

Les structures de données associées aux graphes ainsi que leur visualisation et le calcul de certaines de leurs caractéristiques numériques (e.g. leur degré) tirent partie de la toolbox Metanet de Scilab.

Les calculs de filtrations, nombre de Betti, et d'homologie persistante sont réalisés grâce à la librairie Plex 2.5, écrite par P. Perry et V. de Silva, qui intègre les routines C++ d'homologie persistante de L. Kettner et A. Zomorodian.

### 3.3.2 Liaison statistique entre variables

Dans cette section on examine des indicateurs de liaison statistique entre variables aléatoires, de manière non orientée et sans intérêt particulier pour les rapports de causalité (qui seront brièvement abordés en 3.6).

---

<sup>48</sup> plus exactement son amélioration par l'équipe Probabilité et Statistiques d'Orsay, cf section "Sources en libre accès" à la fin du chapitre

### 3.3.2.1 Données tirées de distributions courantes

Ici on génère des multiples réalisations tirées de couples ou d'ensembles de variables aléatoires dont on contrôle la dépendance statistique.

**Cas bivarié** Des couples de variables  $X, Y$  sont formés selon plusieurs modalités décrites ici, en s'inspirant de la présentation de [8]. Soit  $X$  une variable certaine prenant des valeurs croissantes et réparties à intervalles réguliers dans  $[-3, 3]$ . Ensuite, on définit successivement la variable aléatoire  $Y$  de la sorte :

1.  $Y$  suit une loi normale de moments  $\mu = 0, \sigma = 1$ .  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, on s'attend en traçant la courbe paramétrée  $Y = f(X)$  à observer un nuage centré autour de 0 et donc la répartition spatiale le long de l'axe  $Y$  n'est pas influencée par la valeur de  $X$ , ce que confirme empiriquement la Fig.3.11(a).
2.  $Y$  suit une loi normale de moments  $Y = X + 0.2.\varepsilon$  où  $\varepsilon$  suit une loi centrée de variance unité.  $Y$  dépend donc de  $X$  de manière linéaire, ce que confirme la Fig.3.11(b).
3.  $Y$  dépend fonctionnellement de  $X$  par la relation non-linéaire  $Y = X^2 + \varepsilon$  comme l'illustre la Fig.3.11(c).

Le Tab.3.2 résume ces différents cas.

	X	Y	X et Y
1	$x \in [-3, 3]$	$\mathcal{N}(0, 1)$	indépendance
2	$x \in [-3, 3]$	$\mathcal{N}(x, 0.2)$	dép. linéaire
3	$x \in [-3, 3]$	$\mathcal{N}(x^2, 0.2)$	dép. non lin.

TAB. 3.2 – Dépendances bivariées

Pour chacun de ces trois cas, on connaît donc a priori, par construction, le type de dépendance (dépendance fonctionnelle, indépendance, dépendance linéaire ou non) et l'on souhaite vérifier que les indicateurs dont on s'est munis en §3.1.2 reflètent bien ces dépendances. Pour cela on soumet nos échantillons à plusieurs tests successifs :

1. le test d'indépendance linéaire fondé sur le calcul du coefficient de corrélation de Bravais-Pearson (cf §3.1.1.1).
2. le test de dépendance statistique de Cellucci (cf §3.1.2.2).
3. le test de dépendance empirique basé sur les quantiles de l'estimation de l'information mutuelle de données de substitution (*surrogate data*) (cf §3.1.2.2).

On produit  $N = 500$  échantillons des trois modalités ci-dessus, qu'on soumet aux trois tests statistiques, puis on compte le nombre d'acceptation de l'hypothèse  $H_0$  d'indépendance entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Les résultats sont représentés Fig. 3.12 et font apparaître que dans le cas de l'indépendance par construction de la Fig. 3.11(a), les trois tests concluent dans plus de 90% des cas au rejet de l'indépendance, au seuil de 5%. Dans

les deux cas suivants, l'indépendance est rejetée systématiquement par les test de Celluci et par le test d'information mutuelle, alors qu'elle est systématiquement acceptée par le test de Pearson.

On en déduit que conformément à ce que prédit la théorie, les tests qui reposent sur un modèle de dépendance linéaire (e.g.  $R$  de Pearson) peuvent conclure à l'indépendance entre deux variables sur la base des échantillons disponibles alors que les variables sont dépendantes de manière non-linéaire.

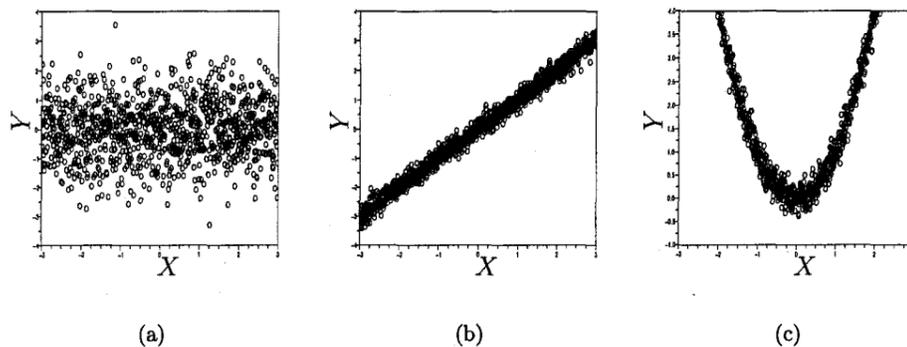


FIG. 3.11 -  $X$  est une fonction certaine qui varie linéairement de  $-3$  à  $3$ .  $Y$  est une variable aléatoire (a) Gaussienne  $\varepsilon$  centrée et de variance unité (b)  $Y = X + 0.2\varepsilon$  (c)  $Y = X^2 + 0.2\varepsilon$ . On effectue  $N$  tirages de 1000 échantillons et on calcule pour chacun le coefficient  $r$  de Pearson.

**Introduction de l'information mutuelle, cas multivarié,** En guise de mesure du degré de dépendance statistique, on met ici à profit les notions introduites en §3.1.2 en s'intéressant cette fois à des couples de variables aléatoires entretenant des relations statistiques mutuelles.

Soient trois situations impliquant un vecteur Gaussien obéissant à une loi multinormale de dimension  $n$ . La matrice de variance-covariance détermine complètement les dépendances mutuelles entre les variables dans le cas Gaussien. Les  $n$  variables aléatoires qui composent ce vecteur sont prises :

1. mutuellement indépendantes ; la matrice de variance-covariance  $\Sigma$  est nulle exceptée sur la diagonale comme le montre la Fig. 3.13 (b).
2. dépendantes de sorte que la matrice de variance-covariance soit tirée au hasard selon une loi uniforme  $\mathcal{U}_{[1,3]}$  entre 1 et 3, comme l'illustre Fig. 3.13 (d).
3. dépendantes par blocs ;  $\Sigma$  s'écrit, en prenant  $A$  et  $D$  identiques au cas précédent,

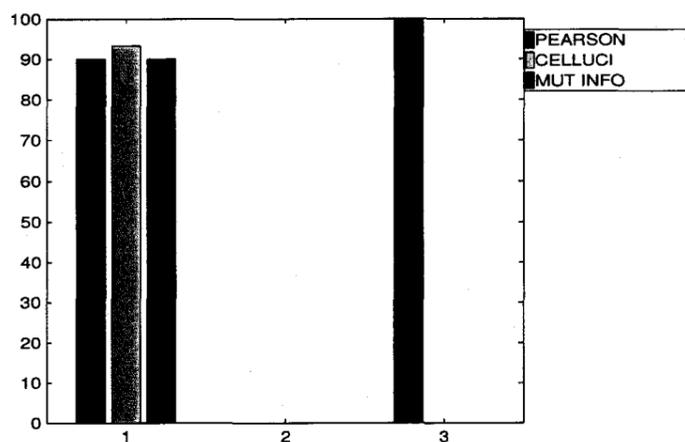


FIG. 3.12 – Taux d'acceptation pour  $N = 500$  réalisations de l'hypothèse d'indépendance d'après les tests de Pearson, Celluci, et le test fondé sur l'information mutuelle et les données de substitution (*surrogate data*). En abscisse, 1, 2 et 3 correspondent respectivement à  $Y = \varepsilon$ ,  $Y = X + 0.2\varepsilon$  et  $Y = X^2 + 0.2\varepsilon$

alors que  $B$  et  $C$  sont nulles :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

On constate que dans chaque cas la matrice d'information mutuelle estimée donne des résultats cohérents : Fig. 3.13(a), la matrice d'information mutuelle estimée est nulle partout sauf le long de la diagonale ; Fig. 3.13(c) le niveau moyen est plus élevé qu'en (a) en dehors de la diagonale en étant toutefois bien inférieur à la valeur maximale le long de la diagonale ; enfin en Fig. 3.13(e) on retrouve bien les zones sombres correspondant aux groupes de variables décorréelées, ainsi que les matrices  $A$  et  $D$  semblables à la Fig. 3.13(e).

### 3.3.2.2 Robot simplifié

On considère un robot mobile muni de roues évoluant sur une surface plane. Il est pourvu d'un ensemble de capteurs de distance répartis de manière circulaire sur sa surface. On contrôle la vitesse de rotation des roues pour lui imposer différents mouvements représentés par la Fig. 3.14. En (a) et (b), le robot se détourne ou au contraire se tourne vers un obstacle plan, à vitesse constante. On impose ensuite au robot d'effectuer des oscillations d'amplitude fixée autour d'une position d'équilibre, comme indiqué par la Fig. 3.14(c). Enfin, le robot oscille de manière aléatoire, avec une amplitude très faible, autour d'une position centrale, comme illustré par la Fig. 3.14(d).

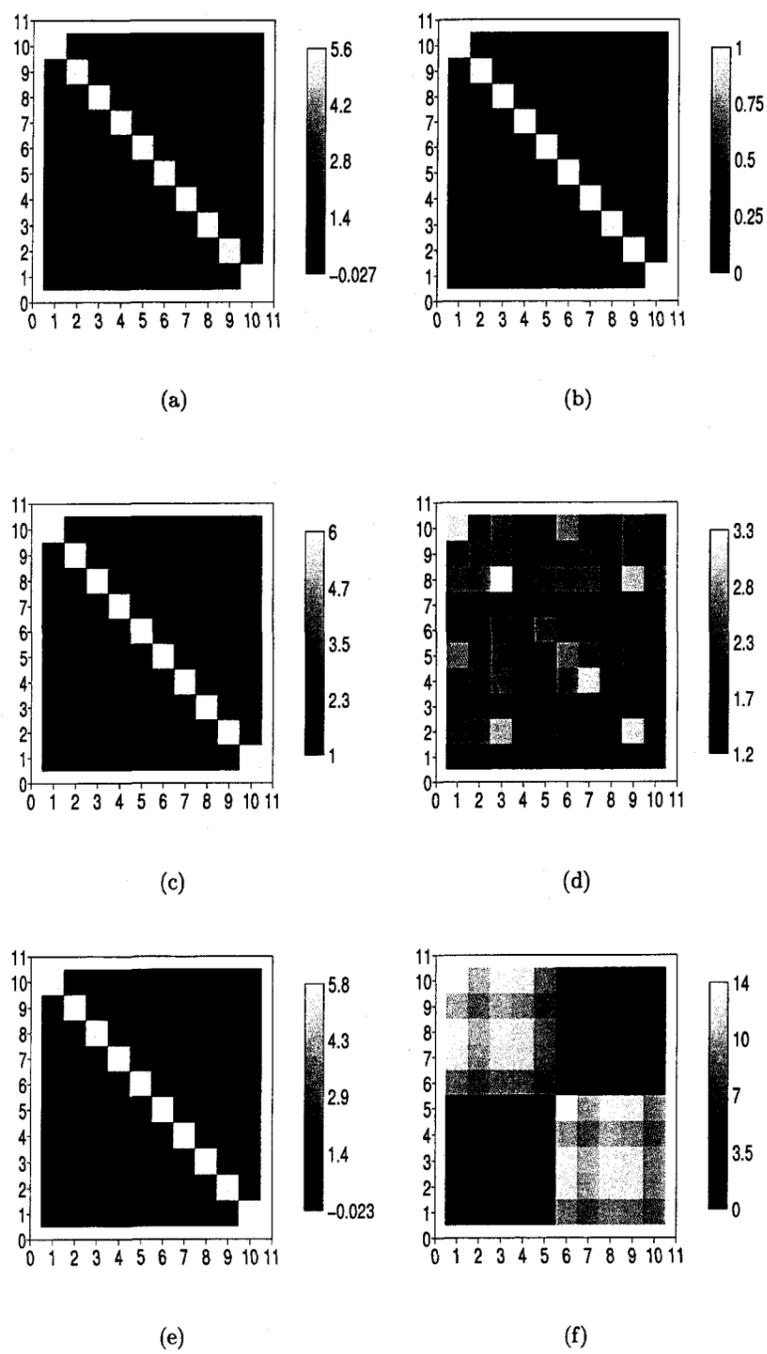


FIG. 3.13 – Information mutuelle (à gauche) et matrices de covariances (à droite) pour différentes distributions Gaussienne multivariées.

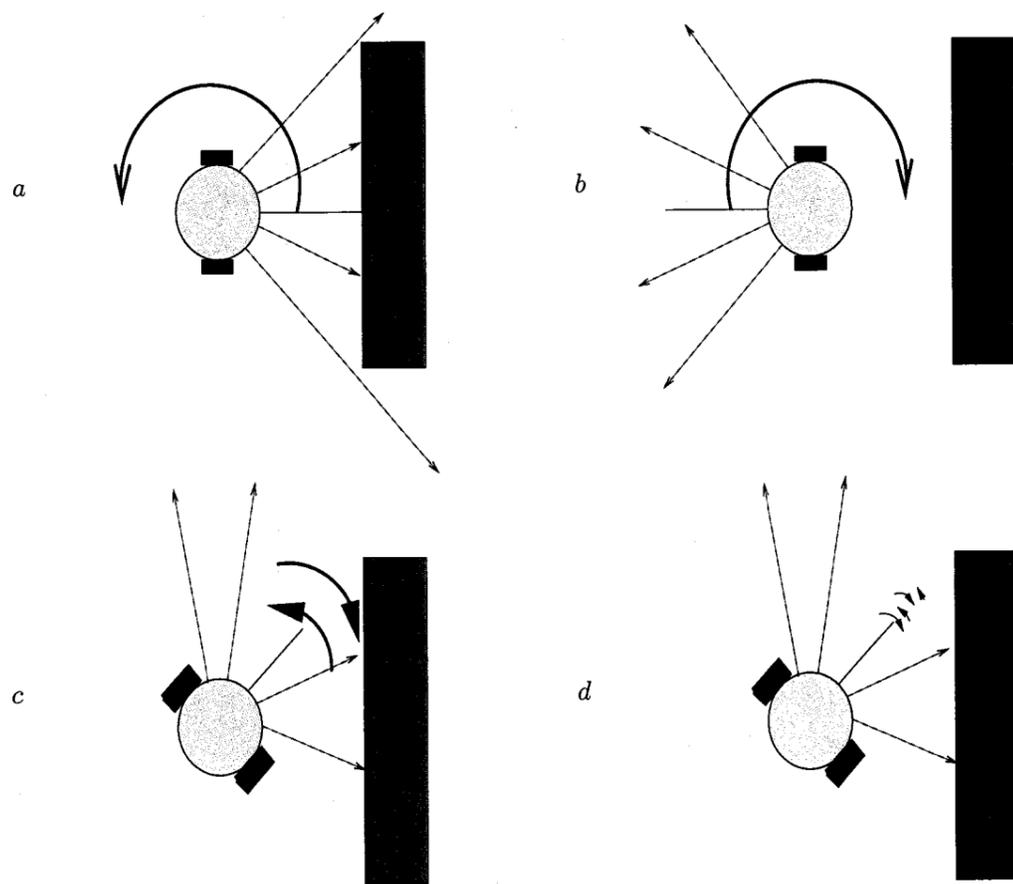


FIG. 3.14 – Robot mobile accomplissant différentes tâches. (a) Évitement de mur (b) Se tourner vers un mur (c) Oscillations autour d'une valeur centrale (d) Oscillations aléatoires de très faible amplitude.

Afin de déterminer les relations de dépendance statistique entre les différents capteurs d'une part, et entre les effecteurs et les capteurs d'autre part, on soumet un grand nombre de réalisations des expériences décrites ci-dessus aux tests de dépendance détaillés dans la section 3.1.2. Pour chaque réalisation d'une expérience complète on enregistre les valeurs mesurées par les capteurs, on réalise le test statistique, puis on itère; à la fin de cette série en compte le nombre de tests statistiques concluant à l'acceptation ou au rejet de l'hypothèse d'indépendance statistique significative entre les variables, sur la base de l'échantillon disponible. La Fig. 3.15 regroupe les pourcentages d'acceptation de l'hypothèse d'indépendance à l'aide du test de Celluci mentionné au cours de la section 3.1.2. On constate que, pour la plupart des couples de capteurs  $(i, j)$  et ce pour un nombre majoritaire d'itérations du test, celui-ci rejette l'hypothèse d'indépendance, sauf dans certains cas particuliers sur lesquels nous reviendrons ci-dessous, tels que les capteurs 19 – 20 de la Fig. 3.15(c).

La Fig. 3.16 (a) donne l'estimation de l'information mutuelle au cours d'une seule réalisation d'une tâche d'évitement de mur, pour tout couple capteur/capteur ou capteur/effecteur. La Fig. 3.16 (b) donne l'estimation de la largeur de l'intervalle de confiance autour de la valeur estimée de l'information mutuelle, par bootstrap. Bien que nous ne soyons pas en mesure d'expliquer l'inhomogénéité de cette valeur en fonction des couples de capteurs, nous constatons qu'elle est faible par rapport aux valeurs estimées.

On constate grâce à Fig. 3.16 que :

- la dépendance entre l'effecteur (colonne 1) et les capteurs est d'autant plus forte que l'indice du capteur décroît; ceci s'explique par le fait que les capteurs d'indice faible restent le plus longtemps en contact avec le mur lors du mouvement d'évitement, alors que les capteurs d'indice élevé se détournent rapidement du mur et renvoient alors une valeur saturée.
- pour chaque capteur, la dépendance est maximale avec lui-même puis décroît à mesure qu'on considère un capteur plus éloigné.
- plus l'indice du capteur augmente, plus sa dépendance moyenne avec les autres capteurs est faible, ce qui se découle de l'asymétrie de la tâche d'évitement.

Puis différents comportements du robot sont illustrés par la Fig. 3.14. La Fig. 3.17 donne l'estimation de l'information mutuelle moyennée sur 100 réalisations pour les différentes tâches du robot.

Interprétons de manière détaillée la matrice d'information mutuelle moyenne de la Fig. 3.17 (c) correspondant à une oscillation du robot autour d'une valeur moyenne de  $\pi/6$ , et d'amplitude  $\pi/12$ . On constate que cette matrice comporte plusieurs zones distinctes à l'oeil nu : des carrés de couleur claire formant des ensembles de capteurs contigus fortement dépendants les uns des autres (capteurs 1 à 6 et 10 à 16); une zone de capteurs faiblement dépendants des précédents mais aussi les uns des autres (capteurs 7 à 9); enfin des capteurs indépendants de tous les autres (capteurs 19-20). Pour un examen attentif, on propose d'isoler des couples représentatifs des différentes combinaisons réalisables entre

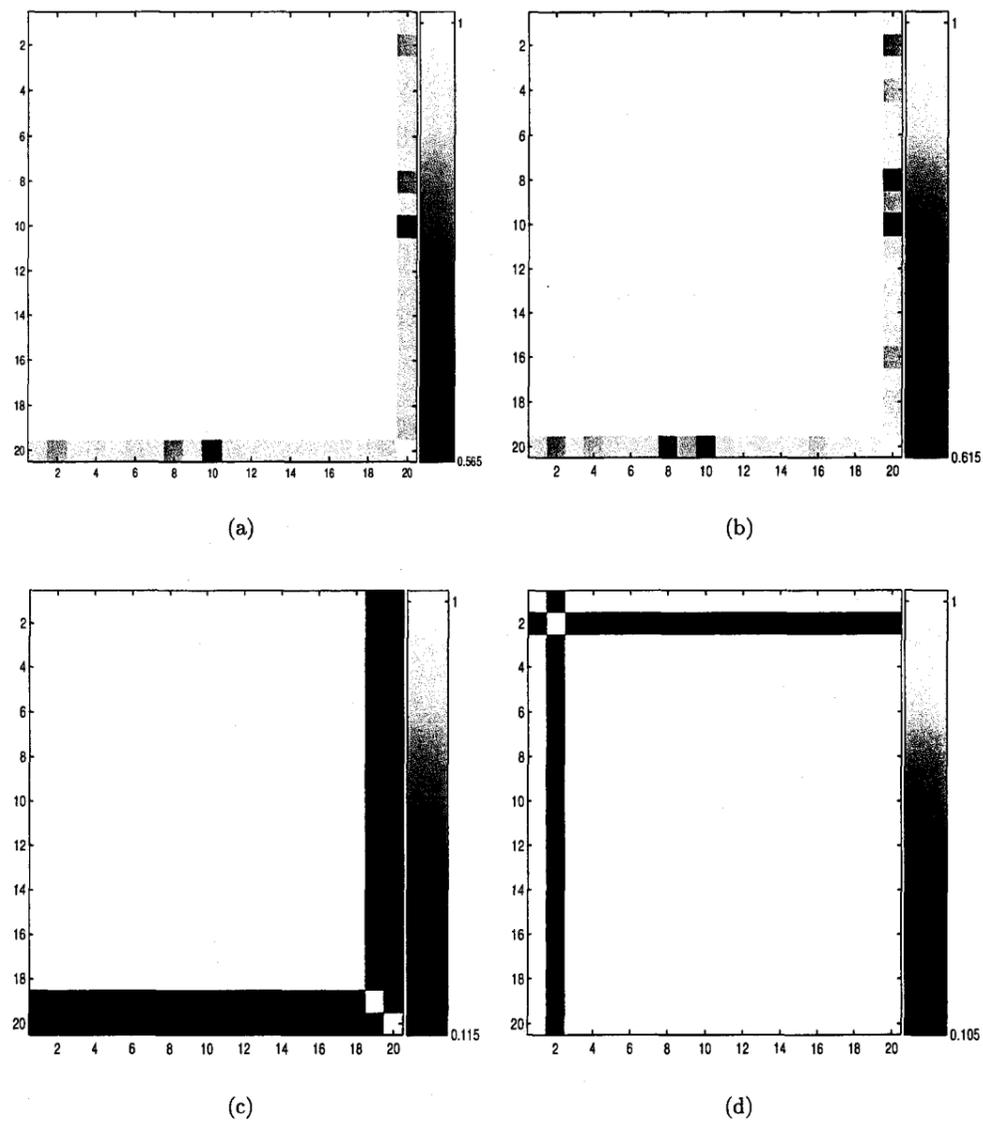


FIG. 3.15 – Pourcentage de tests de Celluci sur 100 réalisations concluant à la dépendance statistique, pour chaque couple effecteur/capteur et capteur/capteur. L'indice 1 est réservé au signal renvoyé par l'effecteur qui contrôle l'angle du robot, les autres indices représentent les signaux renvoyés par le télémètre pour différents angles. (a) Le robot se détourne d'un mur, (b) Le robot d'approche d'un mur (c) Oscillations face à un mur (d) Oscillations de très faible amplitude face à un mur.

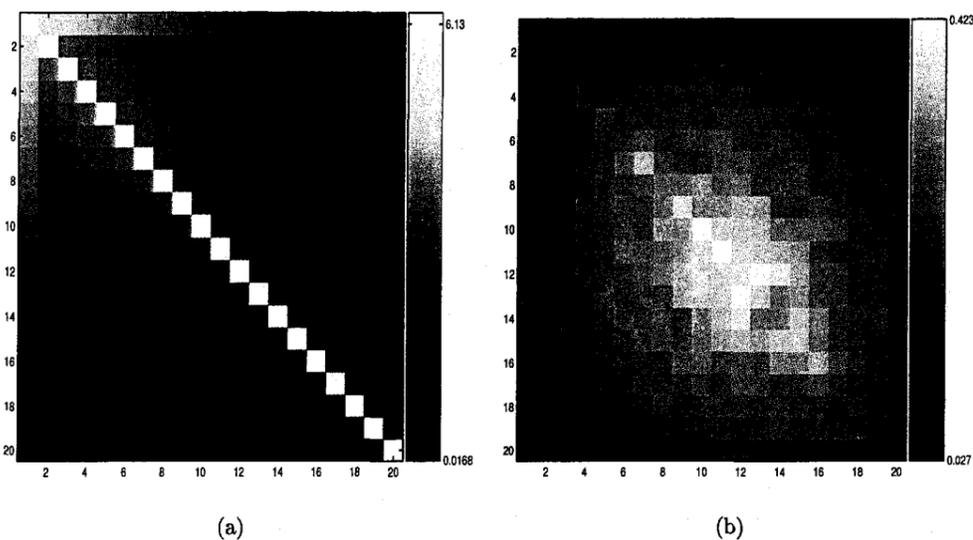


FIG. 3.16 – Information mutuelle entre les capteurs et effecteurs lors d'une tâche d'évitement d'un mur. (a) Estimation de l'information mutuelle (b) Largeur de l'intervalle de confiance estimée par bootstrap.

les 3 zones ci-dessus, afin d'expliquer les niveaux d'information mutuelle observés. Pour cela on s'appuiera sur les données  $X_i = f(t)$  des capteurs en fonction du temps illustrées par la Fig. 3.18. Pour comprendre la valeur de l'information mutuelle, il faudrait disposer de la densité jointe, dont les courbes paramétriques  $X_j = f(X_i)$  peuvent donner une première idée (cf Fig. 3.19).

Les couples de capteurs (4, 5) et (14, 15) sont contigus et ont d'après la Fig. 3.17 une information mutuelle élevée. On constate en effet d'après les Fig. 3.18-(1,2) et 3.19-(1,2) que leurs activités temporelles sont très proches et dépendent l'une de l'autre de manière quasi linéaire.

Les couples de capteurs (1, 2) et (4, 14) appartiennent à des zones non-contiguës (le capteur 1 correspondant à l'effecteur) et sont fortement dépendants d'après 3.17. On constate en effet que leurs activités sont synchronisées, mais en opposition de phase au lieu d'être en phase comme les précédentes comme le montrent les Fig. 3.18-(3,4). Leur dépendance mutuelle semble être cependant moins linéaire que dans le cas des couples (4, 5) et (14, 15), comme le montre la Fig. 3.19-(3,4).

Examinons maintenant vers les représentations matricielles de la Fig. 3.17 et comparons son activité avec celle du capteur 4. On constate d'après l'examen de la Fig. 3.18-(5) que les mesures du capteur 8 sont quasiment constantes, ce qui explique le niveau plus faible d'activité.

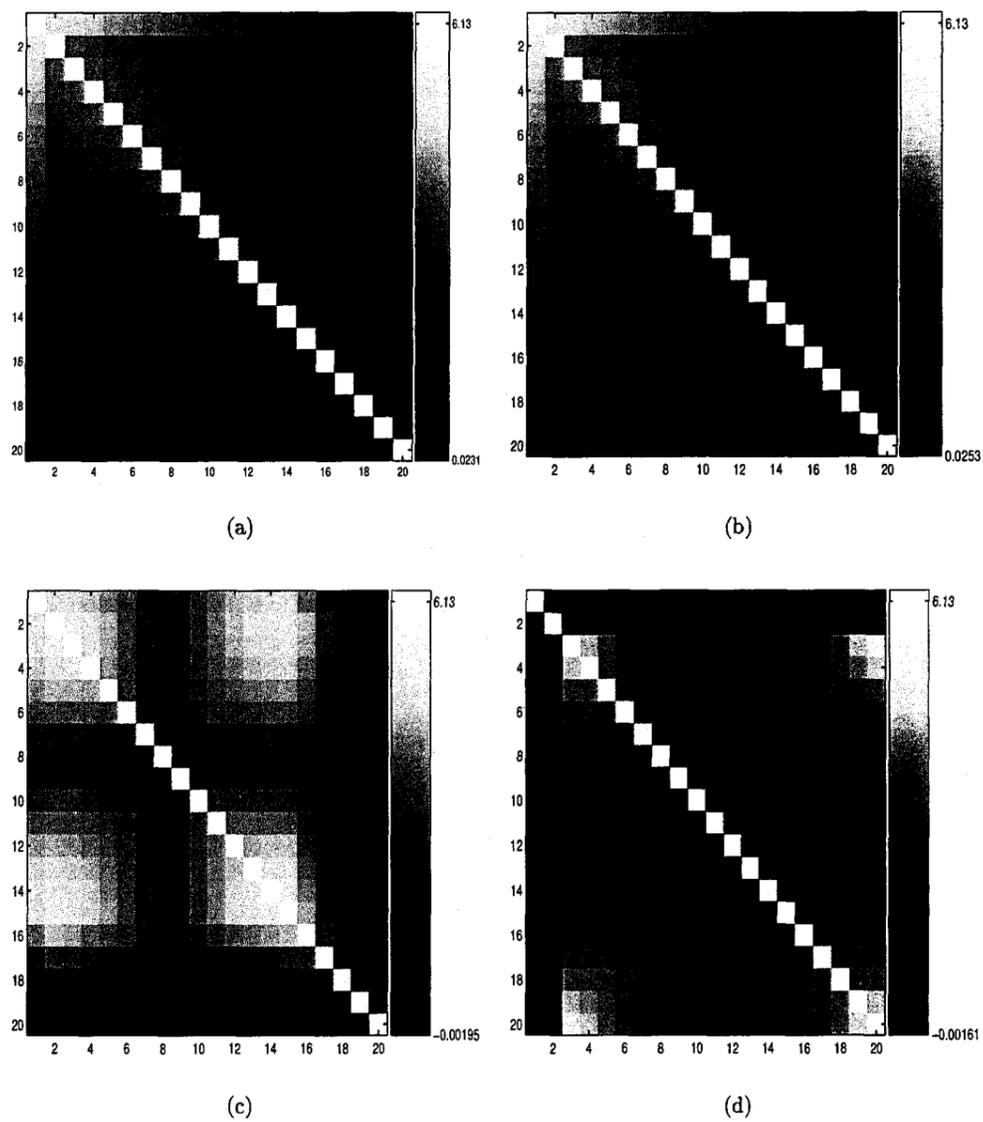


FIG. 3.17 – Information mutuelle entre effecteurs et capteurs moyennés sur 100 réalisations. L'indice 1 est réservé au signal renvoyé par l'effecteur qui contrôle l'angle du robot, les autres indices représentent les signaux renvoyés par le télémètre pour différents angles. (a) Le robot se détourne d'un mur, (b) Le robot d'approche d'un mur (c) Oscillations face à un mur (d) Oscillations de très faible amplitude face à un mur.

Enfin, l'analyse conjointe des données temporelles des capteurs (4, 20) d'après la Fig. 3.18-(6) montre que le capteur 20 renvoie une valeur quasiment constante au bruit près, l'indépendance entre les deux sources apparaissant clairement dans la Fig. 3.19-(6), similaire à la Fig. 3.11 pour les distributions courantes.

Les Fig. 3.15 (a) et (b) sont peu informatives et laissent entendre que toutes les variables sont dépendantes les unes des autres, au sens du test vu de Celluci et au seuil  $\alpha$  considéré. De plus elles ne permettent pas d'évaluer l'apport de l'information mutuelle avec les Fig. 3.17 (a) et (b) car les valeurs de l'information mutuelle sont supérieures au seuil de coupure. Une telle comparaison est en revanche possible pour les cas (c) et (d). Recherchons pour cela les zones les plus sombres de ces deux figures de 3.17 : il s'agit des lignes d'index 19 et 20 pour le (c) et de la ligne d'indice 2 pour la (d), ainsi que leurs symétriques. On constate bien que ces mêmes lignes apparaissent en noir dans les Fig. 3.15 (c) et (d). Comme on s'y attendait, le test de Celluci ne permet pas de conclure à la dépendance qu'au delà d'un certain seuil, et confond des niveaux de dépendance que l'information mutuelle permet de distinguer.

### 3.4 Propriétés des matrices et graphes aléatoires

Quelques caractéristiques numériques de matrices et graphes aléatoires ont été introduites en 3.2. Le spectre d'une matrice aléatoire et la distribution du degré des sommets d'un graphe aléatoire ont également retenu notre attention. Dans cette section on s'attache donc à donner des exemples concrets des caractéristiques numériques associées aux matrices aléatoires que nous sommes susceptibles de rencontrer.

Dans [21] nous avons examiné le cas des graphes aléatoires produits pour une relation élémentaire de dépendance linéaire qui se déclinent en plusieurs instances, notamment celle des matrices d'adjacence de graphe non-orienté obtenues à la suite d'un seuillage et dont les propriétés peuvent différer. En effet, bien qu'elles soient toutes deux symétriques réelles, les éléments de ces matrices prennent leurs termes dans  $\{0, 1\}$ .

On a également rappelé quelques problèmes pratiques rencontrés en robotique, tels que la classification de senseurs ou de comportements. Pour la classification de capteurs il suffit de considérer la matrice d'information mutuelle comme une matrice d'interdistances entre les capteurs, et de mettre en oeuvre une technique de classification métrique, reposant par exemple sur l'agglomération hiérarchique (cf §3.2.4). Pour la classification de comportements, on assimile les caractéristiques numériques associées aux différents contextes expérimentaux (e.g. robot évitant un mur, sources Gaussienne multivariées) à des signatures et on met en oeuvre une classification non supervisée.

Pour comparer ces propriétés nous formons un premier jeu de données se composant de trois types d'expériences :  $n$  sources constituées de variables aléatoires normales indépendantes,  $n$  sources Gaussienne dépendantes entre elles, puis  $n$  sources Gaussiennes dépendantes par blocs. Dans un second temps nous conduisons des expériences similaires

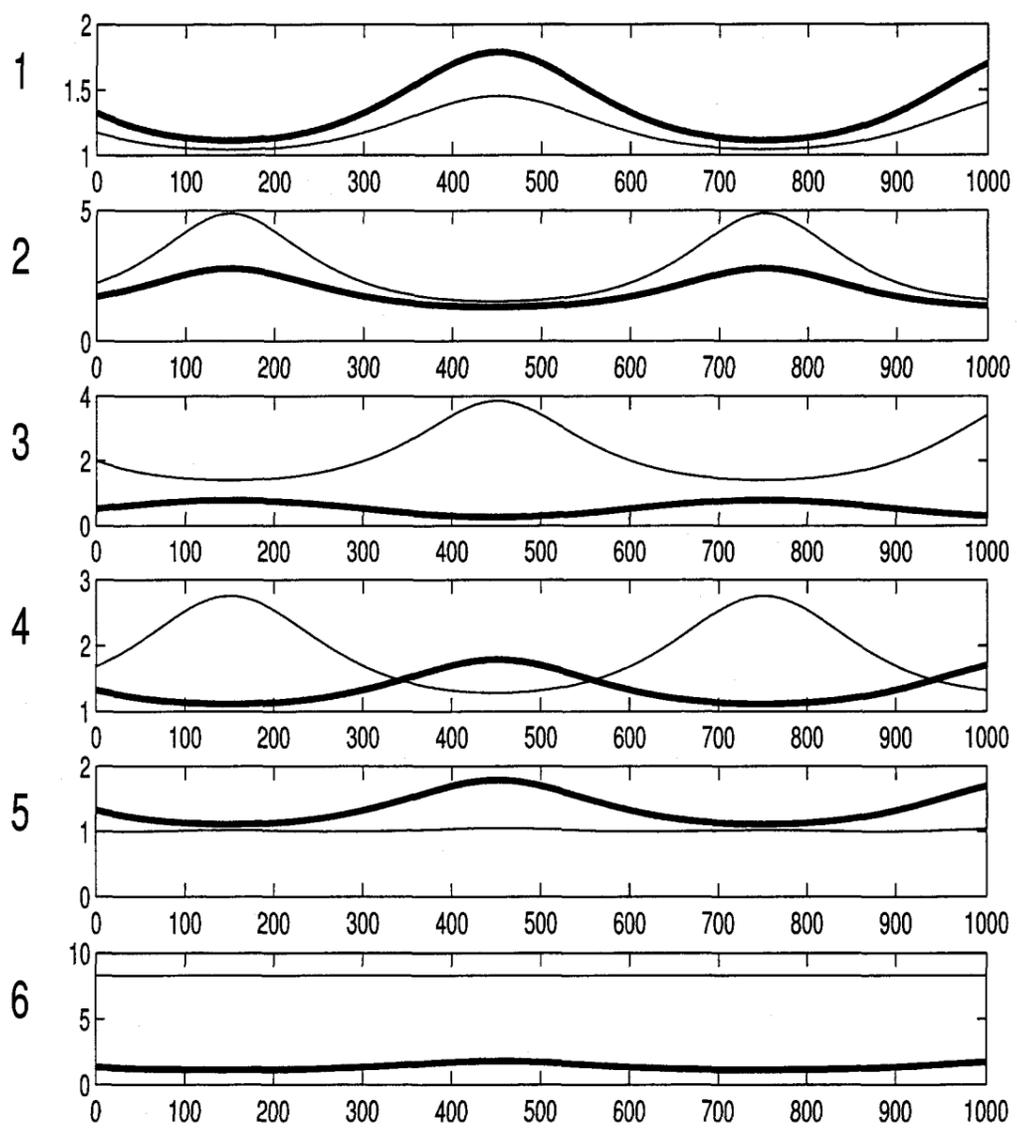


FIG. 3.18 - Courbes  $X = f(t)$  des mesures renvoyées par les capteurs en fonction du temps. Sur chaque diagramme on trace deux courbes en même temps (1) capteurs 4/5 (2) capteurs 14/15 (3) capteurs 1/2 (4) capteurs 4/14 (5) capteurs 4/8 (6) capteurs 4/20

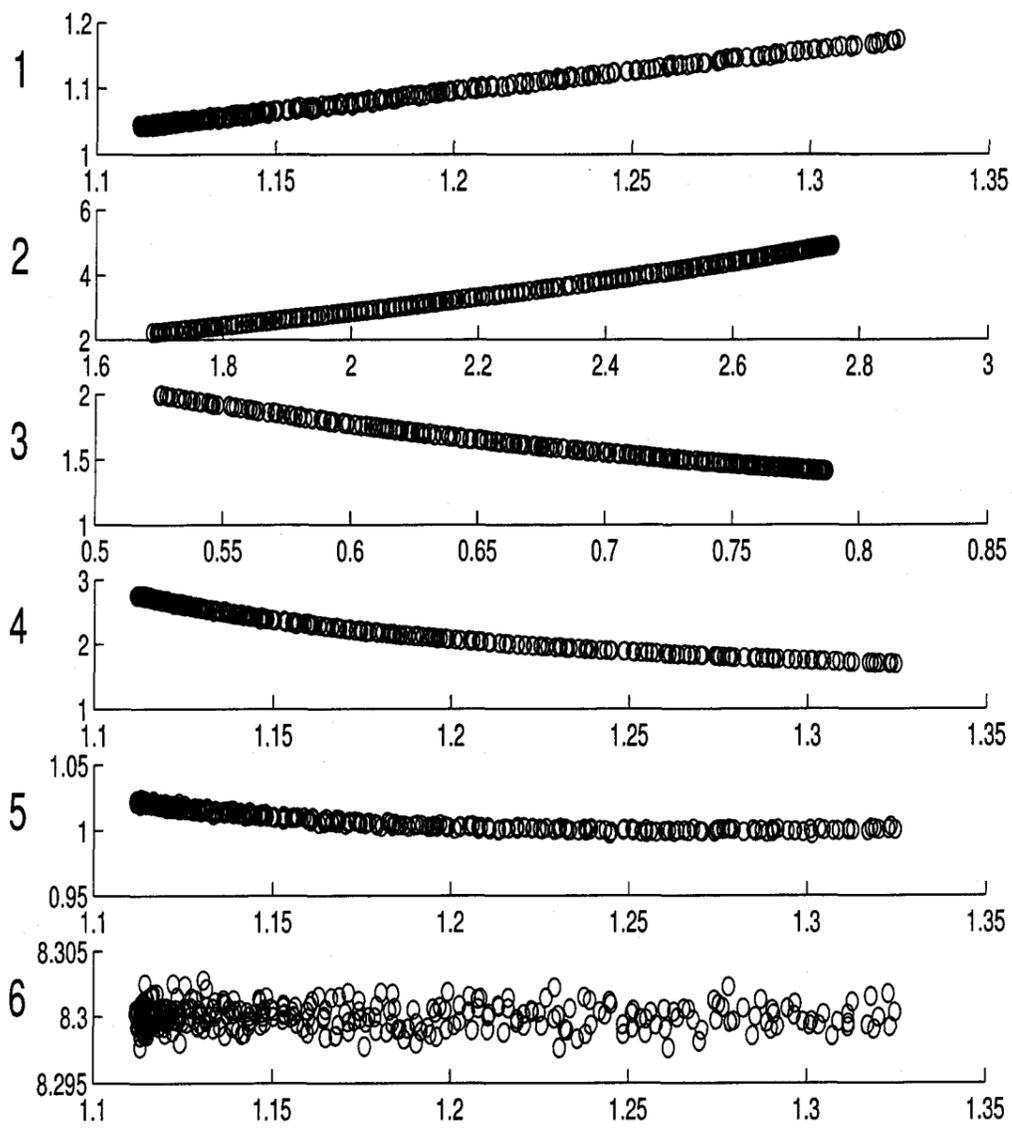


FIG. 3.19 - Courbes  $X_j = f(X_i)$  des données du capteurs  $X_j$  en fonction des mesures du capteur  $X_i$  (1)  $X_5 = f(X_4)$  (2)  $X_{15} = f(X_{14})$  (3)  $X_2 = f(X_1)$  (4)  $X_{14} = f(X_4)$  (5)  $X_8 = f(X_4)$  (6)  $X_{20} = f(X_4)$

avec des données mesurées à l'aide d'un simulateur de robot mobile. Dans ces deux cas, nous estimons ensuite les caractéristiques numériques évoquées plus haut et les comparons.

### 3.4.1 Classification de sources

En §3.2.4 on a rappelé l'intérêt de la représentation des données sous formes d'individus et de caractères, et les possibilités qu'elle offre autant pour la classification de capteurs ou caractères, que pour la classification des individus. On a également évoqué quelques techniques de mise en oeuvre, dont celle classique de l'agglomération hiérarchique (cf Fig. 3.10)x.

Comme on l'a soutenu dans l'introduction de la section §3.3, plusieurs alternatives se présentent en effet : tout d'abord on peut considérer une seule expérience, i.e. l'ensemble des valeurs échantillonnées par  $n$  capteurs à  $p$  instants de temps différents. A cet ensemble d'échantillons on peut associer une matrice estimant les dépendances statistiques entre les couples de capteurs,  $M_{n,n}$ . Elle s'interprète comme une matrice de similarité entre les capteurs (cf §3.2.4) et permet de classer les capteurs. La seconde alternative est de considérer non pas une mais  $k$  expériences, et d'assimiler chaque expérience à un individu. Le problème consiste alors identifier des catégories "naturelles" permettant de partitionner l'ensemble des expériences réalisées. Pour cela, il est nécessaire d'associer à chaque matrice de dépendance statistique un descripteur plus compact, ce que nous ferons dans la suite de ce chapitre.

Dans cette section on se préoccupe de classification de sources, et donnons des exemples de classification de sources à l'aide de cette technique, pour les mêmes conditions expérimentales que celles décrites en §3.4, dont les matrices d'information mutuelle sont représentées en Fig.3.13(a,c,e) et Fig.3.17(a-d).

Les dendrogrammes Fig.3.20(a,c) ont des allures similaires et montrent d'abord que les distances (de la matrices d'interdistances calculée d'après les informations mutuelles) ont des valeurs très concentrées ; de plus on ne voit pas apparaître d'espace entre deux niveaux hiérarchiques qui justifierait un regroupement naturel en classes distinctes. En revanche un tel regroupement naturel est observable en Fig.3.20(e) dans le cas des variables Gaussiennes dépendantes par blocs, où un espace vide indique qu'une distance important est nécessaire pour agglomérer les deux groupes de droite et de gauche.

Les dendrogrammes Fig.3.20(b,d,f) présentent une structure étagée, où les distances entre classes de niveau hiérarchique croissant sont réparties de manière uniforme, ce qui permet pas de choisir une partition naturelle plutôt qu'une autre. Une exception subsiste toutefois, Fig. 3.20(d) où les capteurs 18-20 apparaissent isolés du reste, comme la Fig.3.17(c) permettait déjà de le constater.

Dans la suite on examine des propriétés plus fines de matrices d'information mutuelle, notamment leurs valeurs propres. Ceci permettra de caractériser chaque situation expérimentale, en transposant la méthode mise en oeuvre ici pour classifier les sources.

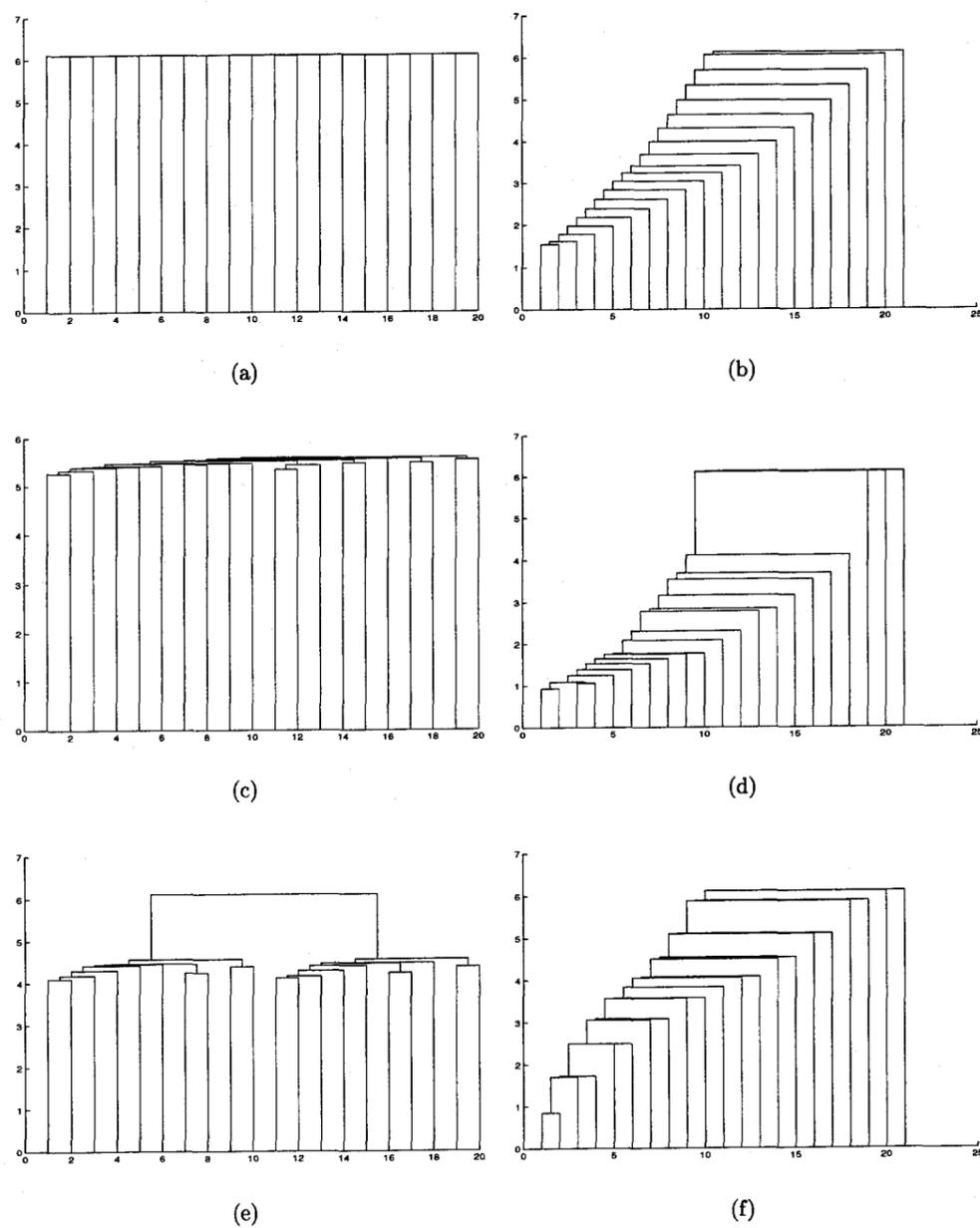


FIG. 3.20 – Dendrogrammes (gauche) sources Gaussiennes multivariées (droite) robot simplifié. (a) sources indépendantes, (c) dépendantes, (e) dépendantes par blocs; robot (b) évitant un obstacle, (d) oscillations, (f) fluctuations microscopiques.

### 3.4.2 Propriétés spectrales des matrices d'information mutuelle

Nous nous intéressons ici au spectre des matrices d'information mutuelle déjà visualisées, par exemple Fig. 3.13. En toute rigueur, rien ne garantit que l'estimateur du spectre de la matrice d'information mutuelle ayant les meilleures propriétés soit le spectre de l'estimateur de la matrice d'information ayant les meilleures propriétés, comme on l'a déjà vu en §3.1.2.2. Néanmoins on se contentera de cette approximation, en renvoyant à une étude ultérieure l'examen d'autres estimateurs et de leurs propriétés.

#### 3.4.2.1 Valeur propre maximale

En 3.2.1 on a rappelé que le spectre se prêtait à plusieurs types de caractérisation, dont celui de l'histogramme du spectre et les valeurs propres maximales en valeur absolue [17]. Nous commençons par mobiliser les résultats disponibles concernant les valeurs propres  $\lambda_{max}$  d'une matrice aléatoire. Les théorèmes dont on dispose ne sont pas vérifiées dans toutes les situations qui constituent nos trois premières séries d'expériences, notamment l'hypothèse d'indépendance. De plus les bornes de minoration fournies en (3.25), (3.26) :

- contiennent, pour l'une d'entre elles, un terme dont on connaît seulement l'ordre de grandeur ( $O(n^{1/3} \log n)$ ).
- portent sur l'espérance  $E[\lambda_1]$  dans le cas  $p > 0$ , et pas sur  $\lambda_1$ .

Malgré ces limites on compare ci-dessous les valeurs propres maximales empiriques  $\lambda_e^k$  aux valeurs théoriques  $\lambda_{th}^k$  fournies par (3.25 et (3.26) pour chacune des expériences décrites en §3.3.2.1. On note que l'une des conditions pour ces bornes soient valides est que toutes les variables aléatoires vérifient  $|a_{ij}| < 1$ . On décompose donc, ci-dessous, les matrices d'informations mutuelle en profitant de la linéarité du spectre afin de vérifier cette hypothèse.

Pour la première série d'expérience décrites en §3.3.2.1 dans le cas multivarié, les sources sont Gaussiennes indépendantes les unes des autres. Les éléments de la matrice d'information mutuelle  $M$  estimée a une valeur élevée sur la diagonale, et fluctue autour de zéro en dehors de la diagonale comme l'illustre la Fig. 3.13(a).

$$M = mi_{max} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1 n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

où  $mi_{max}$  est le niveau d'information mutuelle maximum, atteint entre une variable et elle-même. Sous cette forme la matrice résiduelle dans le membre de droite dans (3.46) est une matrice aléatoire vérifiant  $|a_{ij}| < 1$ . Comme de plus les variables aléatoires hors diagonale ont une espérance  $E[a_{ij}]$  nulle, on applique (3.26) et on obtient la minoration théorique suivante pour l'expérience  $k = 1$  :

$$\lambda^1 > mi_{max} + 2\sigma\sqrt{n} + O(n^{1/3} \log n) \quad (3.47)$$

où  $\lambda^1$  est la plus grande valeur propre en valeur absolue. Les termes  $mi_{max}$  et  $\sigma$  sont remplacés par les valeurs estimées empiriquement d'après de multiples réalisations des termes non-diagonaux de la matrice résiduelle. Posons alors :

$$\lambda_{th}^1 = mi_{max} + 2\sigma\sqrt{n} + n^{1/3} \log n \quad (3.48)$$

La Fig. 3.21(a-b) permet de comparer l'histogramme de  $\lambda^1$  et celui de  $\lambda_{th}^1$ , calculés à partir de la matrice d'information mutuelle, et de constater un accord satisfaisant.

Pour la seconde série d'expérience décrites en §3.3.2.1 dans le cas multivarié, les sources sont Gaussiennes et mutuellement dépendantes, ce qui est réalisé en tirant les coefficients de la matrice de variance-covariance au hasard. La matrice d'information mutuelle estimée  $M$  a une valeur élevée sur la diagonale, et fluctue autour d'une valeur cette fois supérieure à zéro hors de la diagonale comme l'illustre la Fig. 3.13(c). Comme précédemment, on décompose  $M$  sous la forme :

$$M = mi_{max} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \ n \\ a_{n1} & \dots & a_{n \ n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

On retrouve une forme similaire à la forme précédente, mais les variables aléatoires hors diagonales ont une espérance non nulle  $E[a_{ij}] > 0$ . On applique donc (3.25) et on obtient la minoration théorique suivante pour l'expérience 2 :

$$E[\lambda_{th}^2] > mi_{max} + (n-1)E[a_{ij}] + E[a_{ii}] + \frac{\sigma^2}{E[a_{ij}]} + o(1) \quad (3.50)$$

où  $E[a_{ii}]$  est nulle par construction. Comme précédemment, les termes  $E[a_{ij}]$  et  $\sigma$  sont estimés empiriquement. La Fig. 3.21(c-d) permet de constater un bon accord entre la borne et les valeurs expérimentales.

Dans le cas de la troisième série d'expériences, où les sources sont dépendantes par blocs. La matrice  $M$  d'information mutuelle peut s'écrire comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

comme l'illustre la Fig. 3.13(e).  $A$  et  $D$  sont de même type que la matrice  $M$  vue en (3.49), i.e. possédant des termes diagonaux de valeur élevée et constante, et des termes non-diagonaux aléatoires fluctuant autour de 0 avec une variance faible  $\sigma_{lo}$ . De leur côté,  $B$  et  $C$  sont des matrices aléatoires qui fluctuent autour d'une valeur moyenne non nulle  $\mu$ , avec une variance  $\sigma_{hi}$  plus élevée que la précédente. On propose la décomposition suivante :

$$M = \begin{pmatrix} mi_{max} & a_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \ n \\ a_{n1} & \dots & a_{n \ n-1} & mi_{max} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_{m-1} \ m \\ d_{m1} & \dots & d_{m \ m-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

où  $m = n/2$ , et  $A'$  suit une loi de même type que celle de  $D$ . Comme les termes non-diagonaux  $a_{ij}$  fluctuent autour de 0 avec un écart-type  $\sigma_{lo}$  et que les termes  $d_{ij}$  fluctuent autour d'une moyenne non nulle  $\mu = E[d_{ij}] > 0$  et un écart-type  $\sigma_{hi}$ , on applique respectivement les Eq. (3.26) et Eq. (3.25) et on obtient, en confondant  $E[\lambda]$  et  $\lambda$  :

$$\lambda_{th}^3 > mi_{max} + 2\sigma_{lo}\sqrt{n} + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\mu + \frac{\sigma_{hi}^2}{\mu} + 0(n^{1/3} \log n) \quad (3.53)$$

Malgré les approximations réalisées, on peut constater un bon accord entre les valeurs prédites et mesurées comme le montre la Fig.3.21(e-f).

Enfin nous évaluons les possibilités de classification offertes par les valeurs propres maximales de la matrice de dépendance statistique (estimation de l'information mutuelle ici), comme annoncé en 3.2.4. Cependant, à l'inverse de ce que nous avons entrepris en 3.4.1 on rappelle qu'il ne s'agit pas ici de catégoriser les sources, mais chacune des  $k$  matrices correspondant à une expérience particulière. On retient comme ci-dessus les 6 modalités associées d'une part aux sources Gaussiennes, d'autre part au robot simulé simplifié. La Fig. 3.22(a) présente le dendrogramme de l'agglomération de  $k = 150$  expériences indépendantes réalisées avec les sources Gaussiennes, réparties selon les 3 modalités déjà décrites. On constate que les 3 types d'expériences sont parfaitement regroupées en classes homogènes. Les deux dernières modalités, associées aux plages d'index 50 – 100 et 100 – 150, sont qualitativement plus proches l'une de l'autre que de la première modalité, ce qui se vérifie dans le dendrogramme. Les expériences associées au 3 comportements du robot simulé simplifié sont encore plus nettement séparées, comme le montre la Fig. 3.22(b). On vérifie donc que la caractéristique d'ensemble fournie par la valeur propre maximale du spectre de la matrice de dépendance statistique permet de représenter de manière compacte puis catégoriser des comportements distincts d'un robot simple.

Ici nous n'avons considéré que la valeur propre de plus grande valeur absolue, et dans des conditions idéales, pour profiter de théorèmes existants. Dans la section suivante on s'intéresse au spectre entier, et à des conditions plus proches de la réalité, en perdant alors le bénéfice des résultats théoriques.

### 3.4.2.2 Spectre complet

En suivant la première intuition validée par les expériences précédentes, de constater de manière empirique la discriminabilité dans différents contextes expérimentaux du

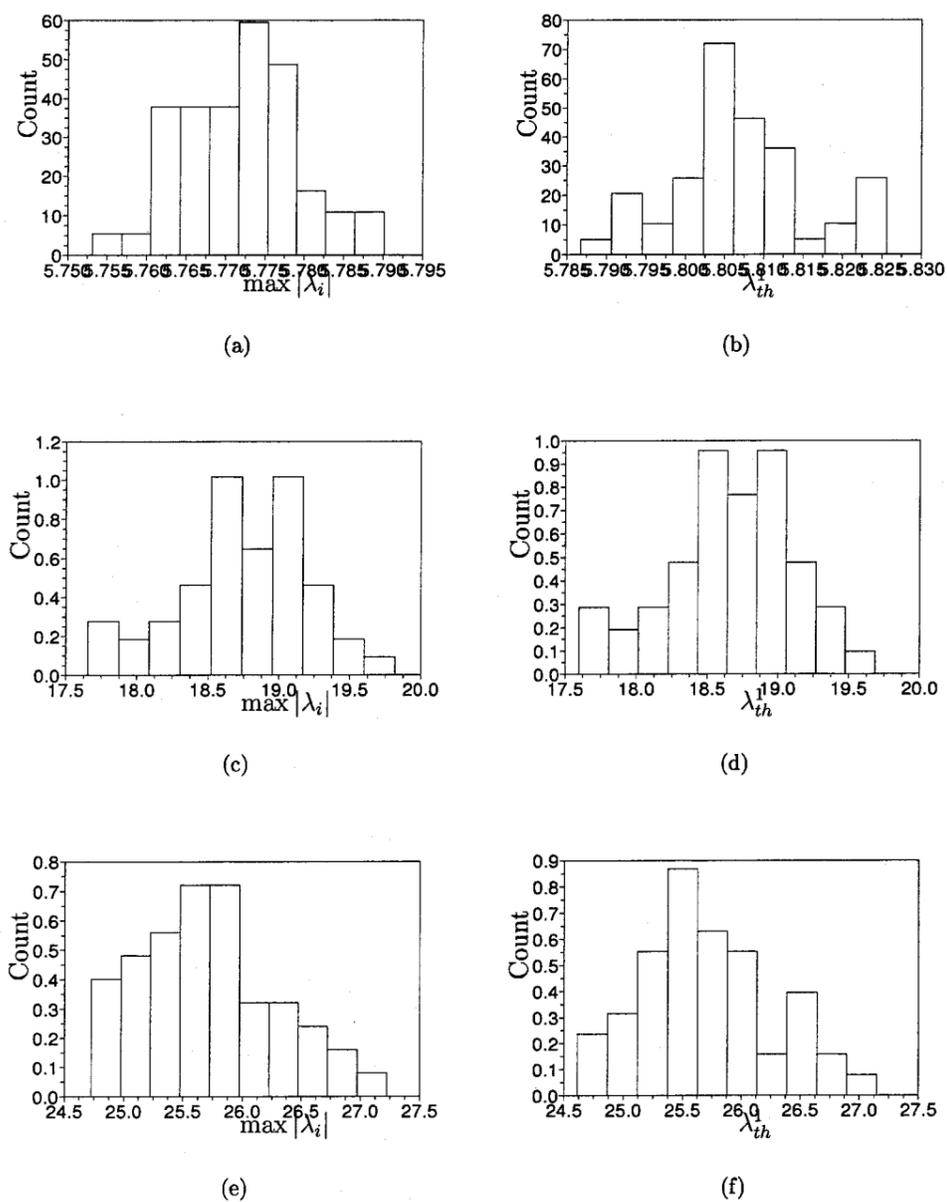


FIG. 3.21 – Histogramme de (*gauche*) la plus grande valeur propre empirique en valeur absolue  $\max |\lambda_i|$ , et (*droite*) la valeur théorique  $\lambda_{th}^1$  prédite. Les trois conditions expérimentales sont (a-b) sources Gaussiennes indépendantes (c-d) sources Gaussiennes dépendantes (e-f) sources Gaussiennes dépendantes par blocs.  $N = 100$  réalisations.

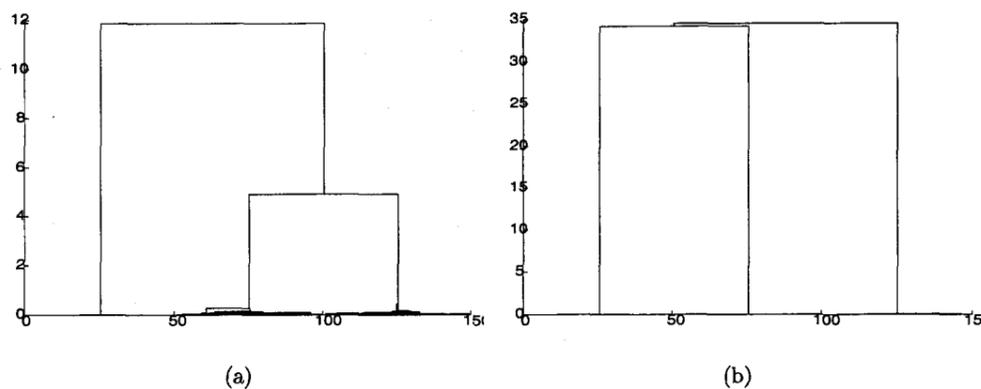


FIG. 3.22 – Dendrogramme de l'agglomération hiérarchique des valeurs propres maximales pour la distance Euclidienne (a) 150 réalisations réparties en trois classes : sources Gaussiennes indépendantes pour les index 0 – 50, dépendantes pour les index 50 – 100 et dépendantes par blocs pour les index 100 – 150 (b) 150 réalisations réparties en trois classes : robot évitant un obstacle pour les index 0 – 50, oscillant autour d'une valeur fixe pour les index 50 – 100, agité de fluctuations microscopiques pour les index 100 – 150.

spectre et de l'histogramme du spectre. Soit  $M$  la matrice d'information mutuelle symétrique réelle et soit  $Sp(M) = \{\lambda_i\}_{i \leq n}$  son spectre. On trace dix spectres obtenus dans des conditions expérimentales idéales comme dans la section §3.4.2.1, qu'on compare Fig.3.23 par simulations de robot s'acquittant de plusieurs tâches. On vérifie qu'ils sont aisément discriminables.

Les valeurs propres de  $M$  sont réelles selon le théorème spectral [35], on peut donc les ranger par ordre croissant. La Fig.3.23(a) superpose les spectres ordonnés pour chacune des trois situations idéales vues plus haut : Gaussiennes multivariées indépendantes, dépendantes de matrice de variance-covariance aléatoire, ou dépendantes par blocs. On constate que non seulement les valeurs propres les plus élevées mais aussi l'allure générale des spectres sont facilement distinguables. Puis, comme illustré par la Fig.3.23(b), on compare les spectres correspondant à trois tâches du robot simplifié (évitement, oscillation, fluctuation microscopiques) et on constate cette fois une très faible variation entre les spectres correspondant à chaque réalisation, mais aussi une allure d'ensemble différente dans les trois cas.

Enfin on examine les possibilités de catégorisation de plusieurs situations expérimentales (cf §3.4.2.1) mais cette fois avec le spectre complet. La Fig. 3.24 permet de constater que, comme dans le cas de la valeur propre maximale, les modalités expérimentales sont parfaitement distinguées par l'algorithme de classification.

On a donc montré dans cette section que le spectre des matrices d'information mutuelle constituait un instrument de choix plus compact que la matrice d'adjacence, (mais

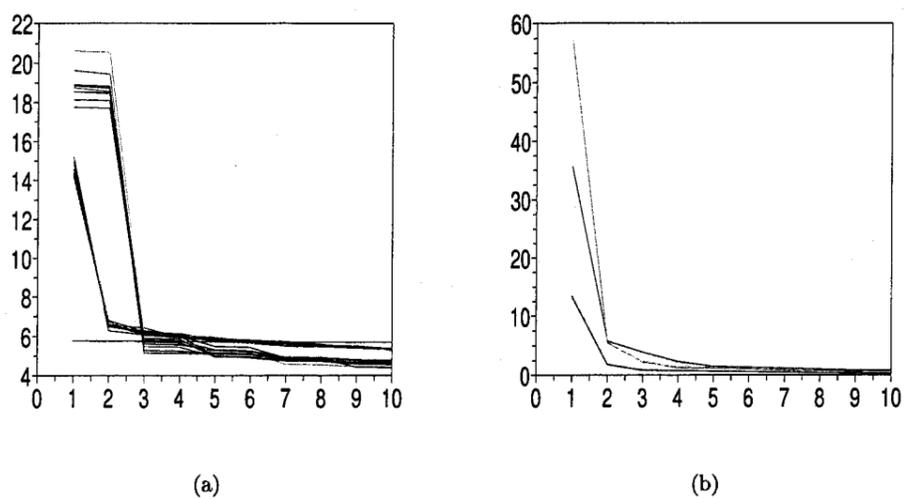


FIG. 3.23 – Valeurs propres classées par ordre croissant de valeur absolue  $|\lambda_i|$ . (a) trois conditions superposées : sources indépendantes, sources dépendantes avec matrice de covariance tirée au hasard, sources dépendantes par bloc. (b) robot simplifié, pour trois tâches : fuite, oscillations autour d'un angle donné, fluctuations microscopiques. Pour toutes les expériences  $n = 20$  sources sont considérées simultanément, pour  $i = 10$  itérations.

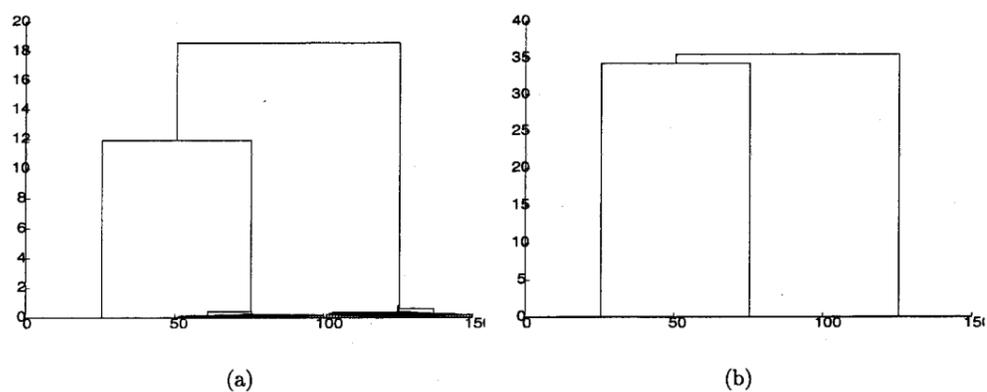


FIG. 3.24 – Dendrogramme de l'agglomération hiérarchique du spectre complet de la matrice de dépendance statistique, pour la distance euclidienne (a) index 0 – 50 : indépendantes, index 50 – 100 : dépendantes, index 100 – 150 : dépendantes par blocs (b) index 0 – 50 : robot évitant un obstacle, index 50 – 100 : robot oscillant autour d'une valeur fixe, index 100 – 150 : robot agité de fluctuations microscopiques.

moins que la valeur propre maximale), pour représenter et catégoriser des situations expérimentales distinctes.

### 3.4.3 Propriétés des graphes

Cette partie répond à la section §3.2.2 au cours de laquelle nous avons rapproché notre problème de caractérisation de l'activité d'ensemble d'un groupe de celui de l'étude des graphes aléatoires et plus particulièrement la distribution empirique de leur degré. On donne ici un éclairage pratique sur cette suggestion, en reprenant les conditions expérimentales retenues jusqu'ici. Pour chacune des six conditions, et pour différentes valeurs de seuil on pose les questions suivantes :

- comment expliquer l'allure des caractéristiques observées ?
- les graphes obtenus pour chacune des 6 expériences sont-ils discriminables ?
- correspondent-ils à des graphes classiques (Erdős-Rényi, Small-world, ...)

Tout d'abord précisons le mode de construction des graphes. Au cours de nos expériences nous négligerons la corrélation linéaire et nous nous attacherons essentiellement à l'information mutuelle qui quantifie la dépendance statistique entre  $X$  et  $Y$ . Ne connaissant pas les lois des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , nous ignorons également l'expression de leur information mutuelle, que nous estimons comme nous l'avons fait jusqu'ici. Soit donc  $\widehat{MI}$  un estimateur de l'information mutuelle parmi ceux décrits en §3.1.2, et  $\chi_i, \chi_j$  deux échantillons de même taille finie des variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$ . Les variables  $X_i$  et  $X_j$  sont reliées à l'échantillonnage près, ce qu'on note  $\hat{R}_\varepsilon(X_i, X_j)$ , sous la condition suivante :

$$\hat{R}_\varepsilon(X_i, X_j) \iff \widehat{MI}(\chi_i, \chi_j) > \varepsilon \quad (3.54)$$

On associe chaque source à une variable aléatoire  $X_i$ , et on calcule alors  $\widehat{MI}$  pour tous les couples  $(X_i, X_j)$  d'après les échantillons  $(\chi_i, \chi_j)$ . Quand la condition  $\hat{R}_\varepsilon(X, Y)$  est vérifiée, on trace un arc entre les sommets  $(u_i, u_j)$  associés aux variables aléatoires  $(X_i, X_j)$ .

Comme on l'a évoqué en §3.2.2.3, il existe plusieurs manières de fixer le seuil  $\varepsilon$ . Une première préoccupation, d'ordre statistique, conduit à le choisir afin qu'il corresponde au seuil de significativité de la dépendance statistique entre  $X_i$  et  $X_j$ , au besoin en ayant recours à des données de substitution (*surrogate data*). Mais, afin de comparer des graphes dans des conditions normalisées, on peut fixer le seuil  $\varepsilon$  afin que les graphes manipulés possèdent tous le même nombre d'arcs.

On applique cette seconde démarche aux données déjà rencontrées jusqu'ici, en fixant  $\varepsilon$  de sorte que chaque graphe possède la moitié du nombre maximal d'arêtes soit  $n(n+1)/2$  si les sommets peuvent être reliés à eux-mêmes.

La Fig. 3.25 donne l'exemple de graphes construits de cette manière pour les sources artificielles déjà rencontrées. La première série  $(a, c, d)$  figure respectivement des sources indépendantes, dépendantes et dépendantes par blocs tandis que la série  $(b, d, f)$  représente les graphes associées aux données renvoyées par les capteurs d'un robot simulé, dans trois situations (évitement, oscillations, fluctuations). Les graphes  $(a)$  et  $(c)$  correspondent à

des situations distinctes, mais sont en apparence également désordonnés; on verra toutefois dans la suite que leurs propriétés statistiques les différencient. Visuellement il est cependant aisé d'identifier le cas (e) comme celui de la dépendance par blocs entre les variables.

Le spectre du graphe facilite-t-il la catégorisation? Des illustrations et une première interprétation ont été proposées en §3.2.2.2. Comme dans les cas précédents, on calcule les spectres associées aux sources Gaussiennes et au robot simplifié, puis on les classe par agglomération hiérarchique (cf Fig. 3.26). On constate que la dernière modalité des sources Gaussiennes en Fig. 3.26(a) est bien distincte des deux précédentes, mais que celles-ci sont agrégées précocement. En revanche, les spectres des graphes associés aux expériences de la Fig. 3.26(b) conservent une bonne ségrégation des classes jusqu'à un niveau élevé. Toutefois, l'écart caractéristique observé par exemple en Fig.3.24 pour le spectre complet des matrices de dépendance statistique n'est pas observé ici. Le pouvoir discriminant du spectre des graphes est donc inférieur à celui du spectre des matrices d'information mutuelle, ce qui est cohérent avec la perte d'information occasionnée par la discrétisation.

La caractéristique de degré permet-elle une catégorisation plus fine? En §3.2.2.2 on a proposé des illustrations et une interprétation, dans le cas de graphes aléatoires classiques. Ici on présente les distributions empiriques des degrés des graphes correspondant aux sources Gaussiennes et au robot simulé, comme le montre la Fig. 3.27.

Les distributions 3.27(a,e) sont centrées sur la valeur  $K = 15$ . On a vu en 3.2.2.2 que pour le graphe d'Erdős-Rényi, l'espérance du degré vaut  $E[K] = \lambda = 2e/n$ , où  $e$  est le nombre d'arêtes et  $n$  le nombre de sommets. Compte-tenu du fait que nous avons imposé  $e = e_{max}/2$  (cf ci-dessus) et que  $n = 30$ , on en déduit dans ce particulier, si ces graphes avaient été aléatoire, que  $E[K]$  vaudrait approximativement 15. Du seul point de vue de l'espérance, on ne peut pas rejeter cette l'hypothèse d'identification avec une graphe de type Erdős-Rényi. Néanmoins, des test plus poussés pour éprouver la normalité de l'échantillons restent à mener, ou encore pour comparer ces caractéristiques à celle d'autres graphes classiques tels que les graphes small-world ou invariants d'échelle (*scale-free*). Nous n'expliquons pas la variabilité forte de la Fig. 3.27(c). Concernant les Fig. 3.27(b,d,f) l'écart de l'espérance par rapport à la valeur trouvée ci-dessus exclut l'identification à un graphe aléatoire de type Erdős-Rényi. Les pics latéraux en  $K = 0$  et sont dus aux capteurs isolés qui renvoient des valeurs constantes.

Bien qu'il ne nous soit pas possible d'expliquer précisément l'allure des distributions empiriques des degrés, nous pouvons néanmoins éprouver le pouvoir discriminant du degré pour catégoriser les différentes situations comme précédemment. On renvoie pour cela à la Fig. 3.28 où sont présentés les dendrogrammes des agglomérations hiérarchiques des histogrammes des degrés des graphes. On constate que les deux premiers types de sources Gaussiennes en Fig. 3.28(a) sont difficiles à distinguer, alors que le dernier lot d'expériences se détache nettement. On explique ceci par la procédure de construction des graphes :

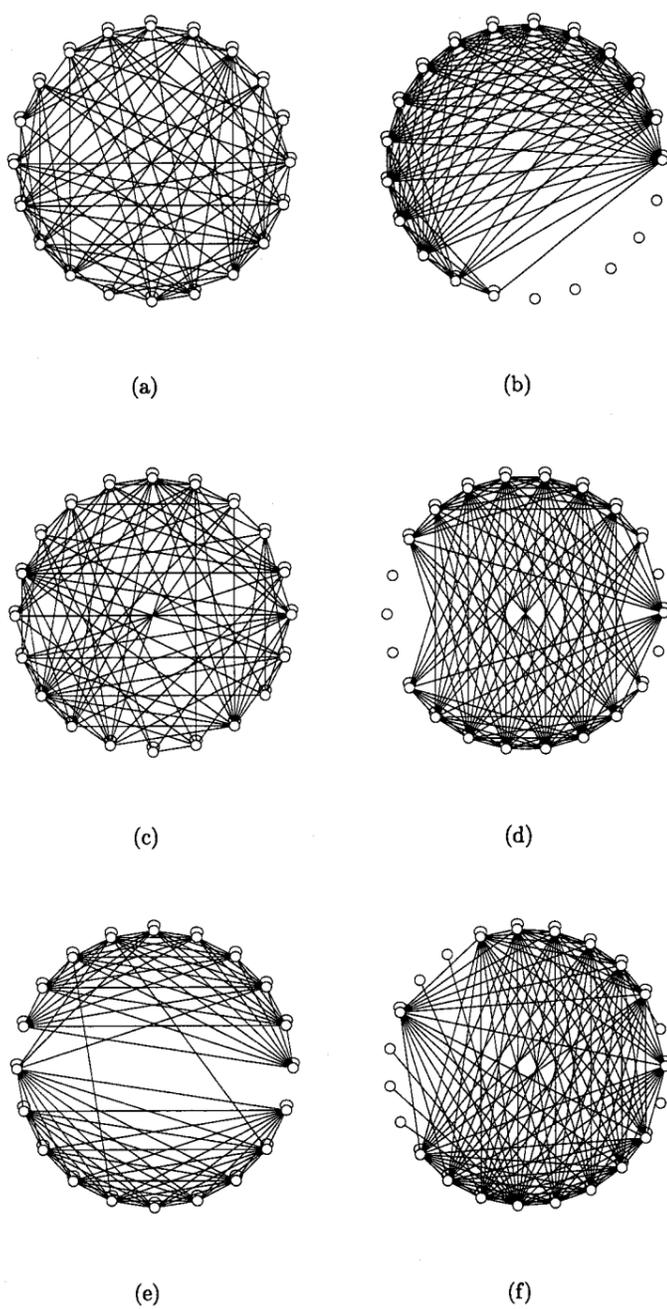


FIG. 3.25 – Graphes correspondant à des sources Gaussiennes indépendantes (a), dépendantes (c), dépendantes par blocs(e). Robot simplifié évitant un obstacle (b), oscillations (d), fluctuations microscopiques (f).

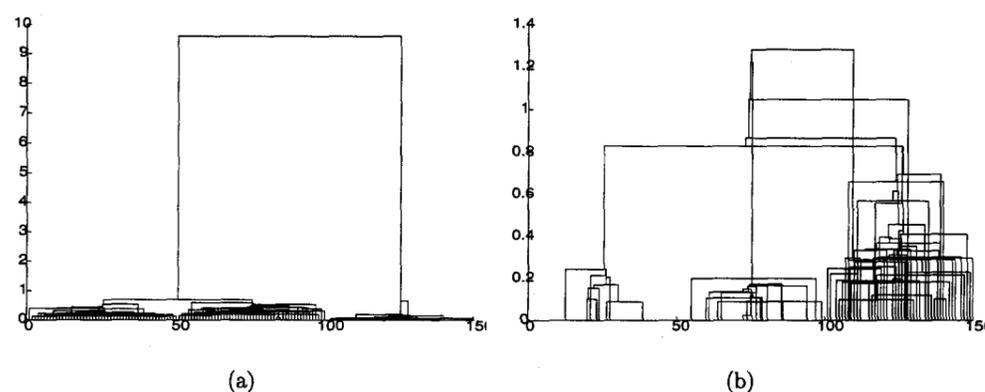


FIG. 3.26 – Dendrogramme de l'agglomération hiérarchique des spectres des matrices d'adjacence des graphes, pour la distance euclidienne (a) index 0 – 50 : indépendantes, index 50 – 100 : dépendantes, index 100 – 150 : dépendantes par blocs (b) index 0 – 50 : robot évitant un obstacle, index 50 – 100 : robot oscillant autour d'une valeur fixe, index 100 – 150 : robot agité de fluctuations microscopiques.

pour les sources Gaussiennes indépendantes et dépendantes, une fois retirée la diagonale centrale au moment de la normalisation du nombre de degrés, il ne reste que des unités dont les valeurs de dépendance sont réparties uniformément autour de valeurs moyennes distincts, mais qui deviennent indifférentes précisément à cause de la normalisation du nombre d'arcs. Un phénomène identique se produit d'ailleurs avec les spectres, en §3.26. Dans le cas du robot, on parvient néanmoins à bien distinguer les trois catégories, bien que la troisième modalité ne soit agglomérée que très tardivement, ce qui empêcherait une classification automatique.

En conclusion, nous constatons que les classifications obtenues à l'aide des valeurs propres maximales et du spectre complet des matrices d'information mutuelle distinguent nettement les trois classes, et que ces performances déclinent quand les caractéristiques sont cette fois les histogrammes du degré des graphes ou le spectre des graphes, ce qui s'explique par la perte d'information occasionnée par la discrétisation. Néanmoins, l'influence du choix du seuil, bien que déterminante, n'est pas étudiée ici. De même, bien que nous ne proposons pas encore de quantification de la "perte d'information" occasionnée par la discrétisation, il nous apparaît essentiel de définir une telle notion, et nous attacherons à avancer des propositions en conclusion de ce chapitre.

Dans l'immédiat nous envisageons d'étendre nos investigations depuis les relations binaires jusqu'au cas des relations  $n$ -aires.

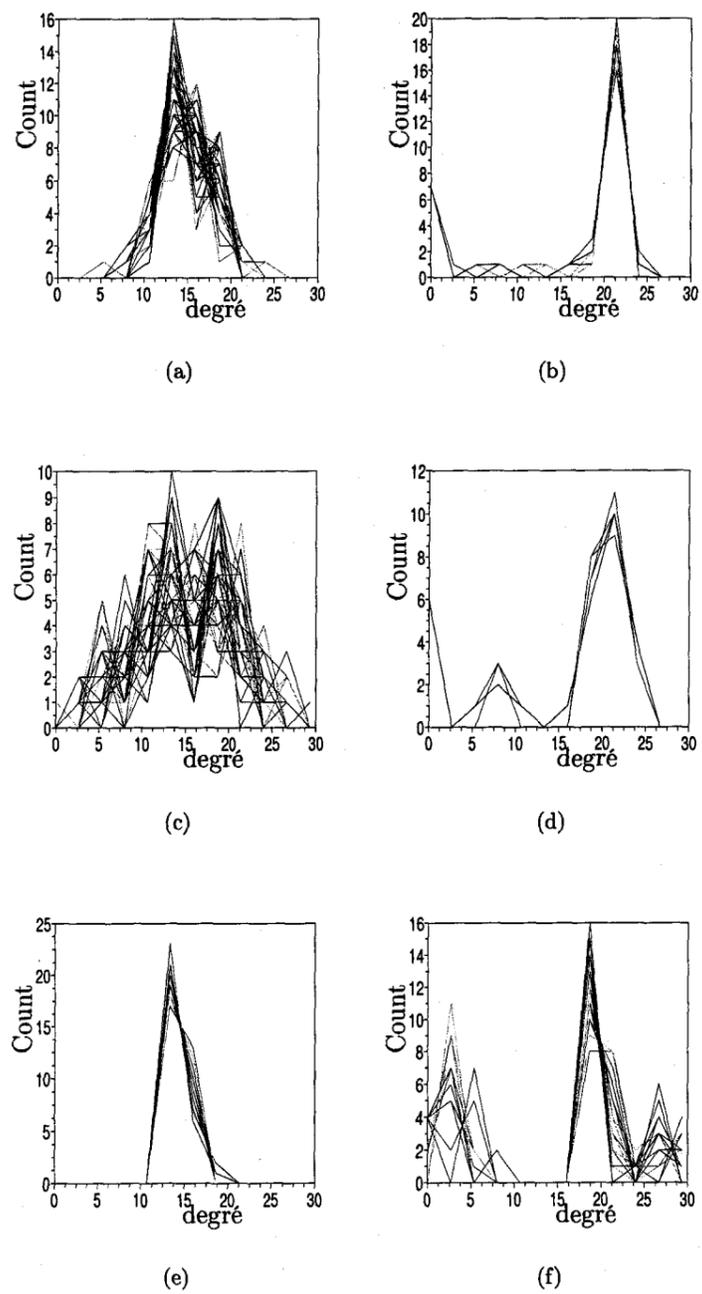


FIG. 3.27 – Distribution empirique des degrés correspondant à des sources Gaussiennes (gauche), et au robot simplifié (droite). (a) sources indépendantes, (c) dépendantes, (e) dépendantes par blocs; robot (b) évitant un obstacle, (d) oscillations, (f) fluctuations microscopiques.

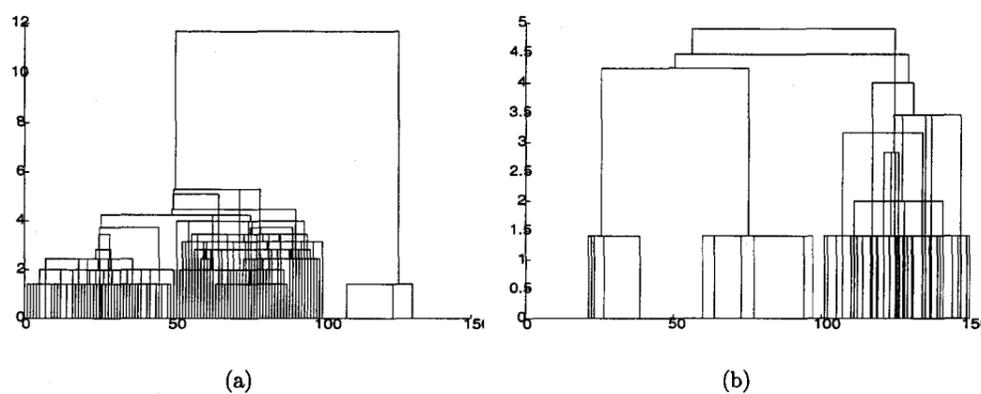


FIG. 3.28 – Dendrogramme de l'agglomération hiérarchique des histogrammes des degrés des graphes, pour la distance euclidienne (a) index 0 – 50 : indépendantes, index 50 – 100 : dépendantes, index 100 – 150 : dépendantes par blocs (b) index 0 – 50 : robot évitant un obstacle, index 50 – 100 : robot oscillant autour d'une valeur fixe, index 100 – 150 : robot agité de fluctuations microscopiques.

### 3.5 Relations d'ordre supérieur et homologie simpliciale

En §3.2.3 on a rappelé que notre démarche de caractérisation s'appuyait sur la transition entre relations locales et propriétés globales d'un espace topologique. On a alors proposé d'étendre les relations élémentaires du cas binaire examiné en §3.2 à celui des relations d'ordre supérieur. On justifie cette extension en revenant au sens statistique que nous avons donné aux relations, et en remarquant que les seules relations de dépendance entre deux variables ne suffisent pas à rendre compte de la richesse des relations statistiques dans un ensemble de  $n$  variables aléatoires. Une fois assurés de la nécessité statistique de prendre en compte ces relations, il reste encore le problème de l'encodage d'un ensemble de relations d'ordre supérieur, ainsi que de sa caractérisation.

On a suggéré que, sous réserve de vérification de la propriété (3.37), les ensembles de relations obtenus pouvaient s'interpréter comme des complexes simpliciaux dont on a rappelé les propriétés en §3.2.3. Comme par ailleurs ces relations  $n$ -aires  $R_\varepsilon$  sont paramétrées, à chacune des valeurs du réel  $\varepsilon$  correspond un complexe simplicial. La famille croissante de complexes simpliciaux paramétrée par  $\varepsilon$  porte le nom de *filtration* et fait l'objet de la caractérisation par les nombres de Betti persistants.

Pour construire la filtration, nous posons un ensemble de sources  $(X_1, \dots, X_n)$  et estimons les informations mutuelles jusqu'à l'ordre 3 uniquement : tout d'abord nous approximations les  $I(X_i, X_j)_{i \neq j}$  entre tous les couples possibles, avant d'estimer les redondances  $r(X_i, X_j, X_k)$ . Pour chacune de ces combinaisons possibles, nous encodons la valeur ob-

tenue dans la filtration, qui constitue la date de naissance du simplexe de dimension 1 ou 2. Alors, pour chaque valeur  $\varepsilon$ , le complexe simplicial extrait de la filtration est constitué de tous les simplexes dont la "date de naissance", i.e. l'information mutuelle associée, est inférieure à  $\varepsilon$ .

On illustre les étapes de cette construction en choisissant un type de signaux, ici les sources Gaussiennes corrélées par blocs déjà amplement étudiées. On représente respectivement les histogrammes des informations mutuelles et redondances à l'aide des Fig. 3.29(a) et (b), et on constate d'abord que les informations mutuelles sont dans l'ensemble plus petites que les redondances, ce qui n'empêche pas les recouvrements car l'information mutuelle de deux variables aléatoires dépendantes peut être supérieure à la redondance de trois variables aléatoires mutuellement indépendantes. Ensuite on observe deux pics, dans chaque cas :

- dans le premier cas, deux possibilités se présentent : soit  $X$  et  $Y$  appartiennent au même bloc de sources, auquel cas leur information mutuelle est élevée ; soit  $X$  et  $Y$  appartiennent à deux blocs distincts, et leur information mutuelle est très basse.
- dans le second cas, soit trois sources appartiennent au même bloc, soit deux sources appartiennent au même bloc tandis que la troisième appartient au bloc opposé.

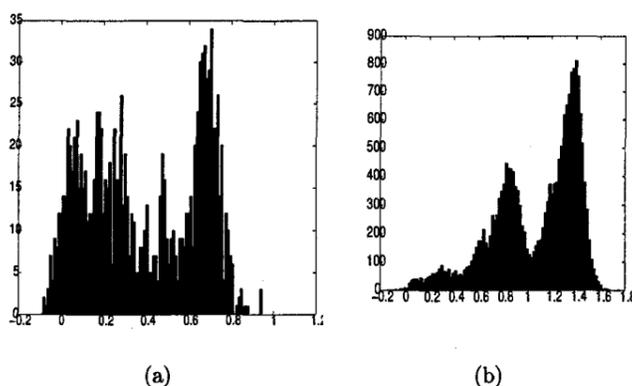


FIG. 3.29 – Histogramme de l'information mutuelle, Gaussiennes corrélées par blocs (a)  $I(X, Y)$  (b)  $I(X, Y, Z)$ .

Le complexe simplicial extrait de la filtration obtenue est représenté Fig. 3.30(a,b) en superposant les simplexes (ce qui n'est pas permis normalement) pour des valeurs choisies du seuil  $\varepsilon$ . On constate d'abord que pour des valeurs faibles du seuil, un grand nombre de connections est déjà présent, ce qui s'explique par le grand nombre de couples de variables indépendantes (la moitié au moins de l'ensemble des couples). De plus, on constate qu'initialement peu de simplexes de dimension 2 (i.e. possédant trois sommets) sont présents, ce qui s'explique d'après les propos tenus ci-dessus au sujet des histogrammes des distances.

A la différence des graphes construits en §3.4.3, la structure de donnée mise en avant

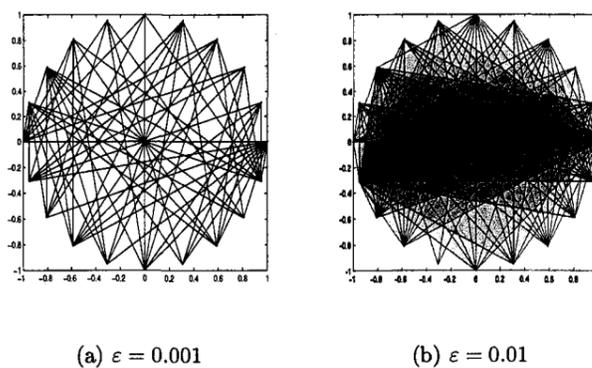


FIG. 3.30 – Exemple de filtration pour un niveau croissant de seuil, de gauche à droite.

ici permet donc de stocker simultanément toutes les valeurs des seuils et s'apparente à un encodage "sans perte".

Enfin on calcule les nombre de Betti persistants, cf Fig. 3.31, cette fois en reproduisant les 6 conditions expérimentales déjà vues plus haut (sources Gaussiennes et robot mobile).

Nous rappelons que les trois premiers nombres de Betti s'interprètent respectivement comme le nombre de composantes connexes, le nombre de tunnels passant au travers du complexe et le nombre de vides inclus dans l'objet. On constate d'abord que dans tous les cas, le premier nombre de Betti  $\beta_0$  est constant et vaut 1. Ceci s'explique par le fait qu'une seule composante connexe existe pour toutes les valeurs sur seuil même les plus basses. En effet on a remarqué grâce à la Fig. 3.29 que de nombreux couples avaient une information mutuelle proche de 0, ce qui se traduit par l'existence de très nombreux arcs dès la valeur  $\varepsilon = 0.001$  du seuil représentée par la Fig. 3.30(a).

$\beta_1$  et  $\beta_2$  correspondent respectivement aux triplets de sources reliés deux à deux, et aux 4-uplets de sources reliés 3 à 3, mais rien ne nous permet de prédire la valeur que devraient avoir ces quantités pour une valeur de seuil donnée, et encore moins comment elle devraient varier.

A cela s'ajoute le problème de la visualisation du complexe : pour l'instant nous avons réparti les sommets selon un cercle dans l'espace, mais on constate alors un grand nombre d'intersections entre les faces du complexe, ce qui n'est pas cohérent avec les définitions. Il serait souhaitable de disposer d'une représentation telle que pour toute valeur de  $\varepsilon$  aucune intersection ne se produise. Une solution pourrait être d'avoir recours à des algorithmes de projection par relaxation déjà employés pour l'établissement de la topologie induite par une métrique sur un ensemble de capteurs [36], ou encore des outils plus classiques telles que les cartes auto-organisatrices (*self-organizing maps*) de Kohonen [27].

Reprenons les résultats des 6 expériences élémentaires précédentes et associons à chaque expérience un vecteur extrait du nombre de Betti  $\beta_2$  pour les trois premières

3.5. Relations d'ordre supérieur et homologie simpliciale

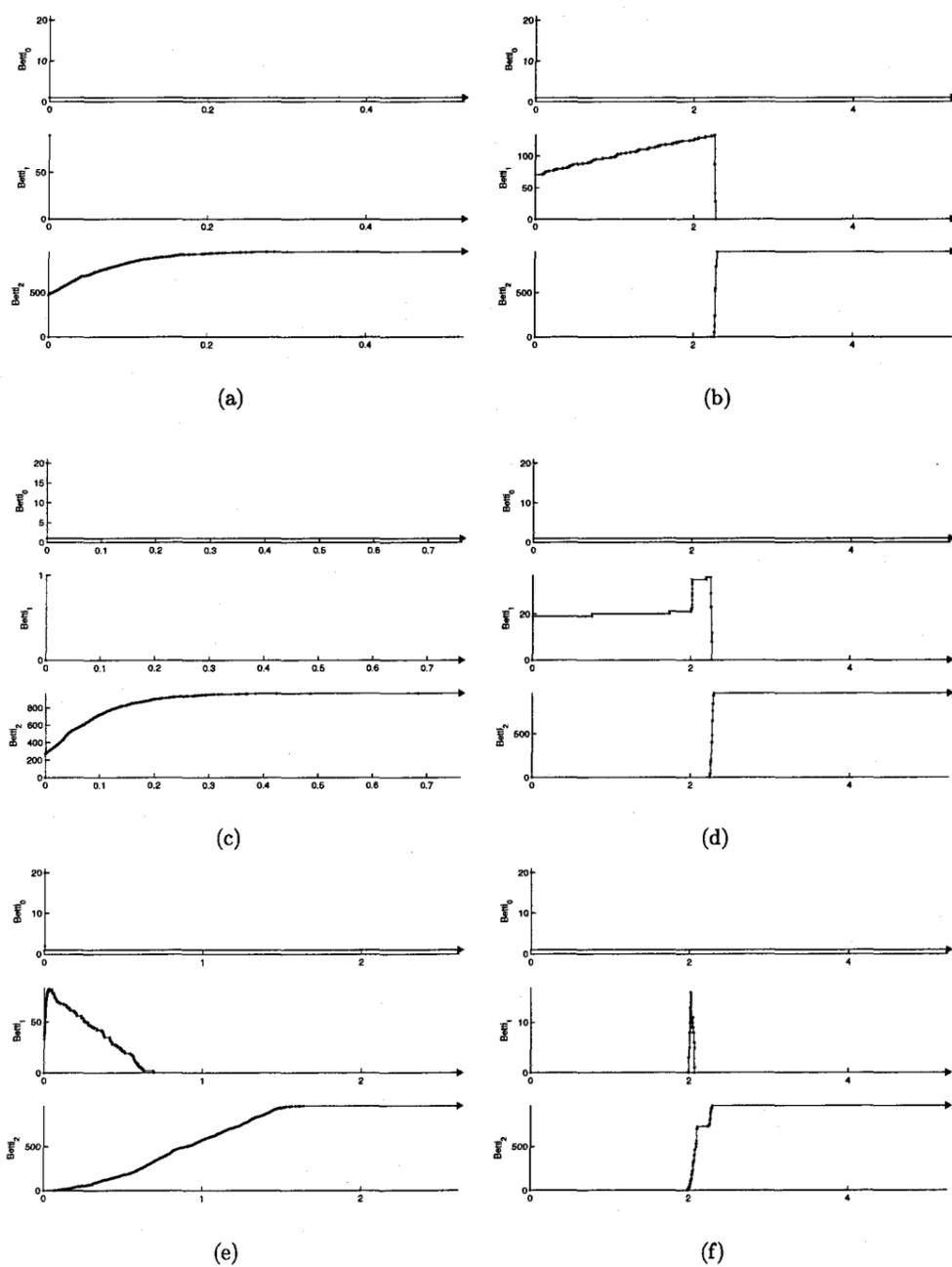


FIG. 3.31 – Nombre de Betti persistants en fonction du seuil variable, pour des réalisations uniques de (gauche) sources Gaussiennes, (droite) robot simplifié. (a) sources indépendantes, (c) dépendantes, (e) dépendantes par blocs ; robot (b) évitant un obstacle, (d) oscillations, (f) fluctuations microscopiques

expériences, et  $\beta_1$  pour les trois dernières. Les trois premières expériences (sources Gaussiennes) sont mélangées, de même que les trois dernières (robot simplifié), on représente Fig. 3.32 le dendrogramme de l'agglomération hiérarchique. On constate en Fig. 3.32(b) que les expériences réalisées grâce au robot donnent lieu à une agglomération en classes qui respectent parfaitement les différences présentes initialement entre les conditions expérimentales. En revanche en Fig. 3.32(a), la seconde série d'expériences (indices 50-100) est agglomérée de manière précoce avec la première série ce qui s'explique par la similitude du graphe des nombres  $\beta_2$ .

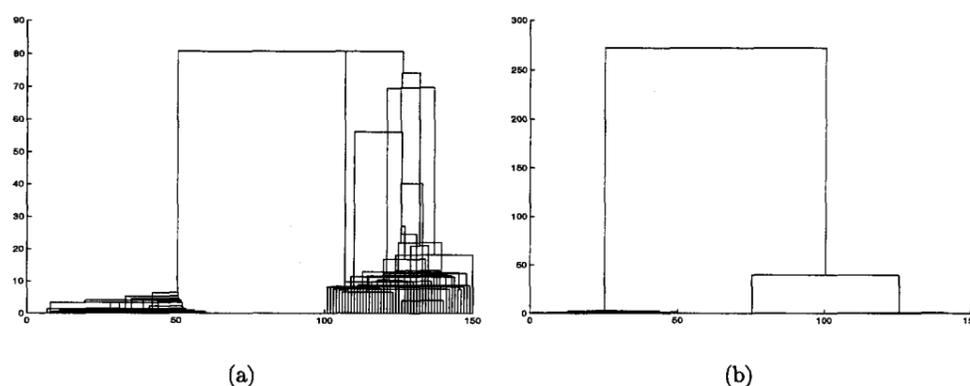


FIG. 3.32 – Dendrogramme de l'agglomération hiérarchique des nombres de Betti persistants, pour la distance euclidienne (a) index 0 – 50 : indépendantes, index 50 – 100 : dépendantes, index 100 – 150 : dépendantes par blocs (b) index 0 – 50 : robot évitant un obstacle, index 50 – 100 : robot oscillant autour d'une valeur fixe, index 100 – 150 : robot agité de fluctuations microscopiques.

## 3.6 Conclusions, perspectives

### 3.6.1 Bilan

Dans ce chapitre nous avons traduit le besoin de représentation de l'activité sensori-motrice d'un agent pour l'étude des affordances en termes de caractérisation globale d'un réseau de dépendances probabilistes nouées à un niveau local entre des  $n$ -uplet constitués de capteurs et d'effecteurs.

La notion de dépendance a été explicitée pour des variables discrètes et continues, pour des couples de variables ou des  $n$ -uplets, depuis des points de vue probabilistes et statistiques. Plusieurs types de dépendance non orientée furent passés en revue d'abord de manière théorique puis en s'appuyant sur des exemples numériques abstraits ou tirés de cas particuliers en robotique mobile. Notamment, les corrélations linéaires et corrélations

partielles furent examinées et comparées à des mesures de dépendance issues de la théorie de l'information, par exemple l'information mutuelle qui rend compte de dépendances non nécessairement linéaires. D'un point de vue statistique, plusieurs tests de dépendance ainsi que plusieurs estimateurs de l'information mutuelle ont été comparés, compte tenu des contraintes imposées par les conditions expérimentales usuelles en robotique (e.g. faible nombre d'échantillons).

Nous avons suggéré de considérer non pas la juxtaposition des relations de dépendances mais l'ensemble ainsi constitué. Ce *réseau* de dépendances prend différentes formes, telles qu'une matrice d'information mutuelle entre couples de capteurs. Plus que l'ensemble des relations individuelles, c'est la structure de ce réseau qui nous importe et nous est par exemple accessible, dans le cas d'une matrice, par l'intermédiaire de son spectre. Quelques propriétés spectrales de matrices aléatoires simples ont été dérivées, ce qui a permis de constater un bon accord entre les résultats théoriques et les estimations statistiques, mais dans des conditions éloignées de celles rencontrées par un robot mobile.

Dans un second temps on a proposé un compromis afin d'étendre la gamme des invariants disponibles, au prix d'une discrétisation des mesures de dépendance. En effet, un vaste corpus s'est constitué au cours des dernières décennies à propos des réseaux aléatoires présents dans la nature, et offre des fondations mathématiques solides permettant leur caractérisation topologique. Ces études demeurent peu utilisées en robotique, pourtant les réseaux de dépendances dans les grands systèmes sensorimoteurs peuvent leur être assimilés, et ainsi bénéficier des concepts et techniques déjà développés. En conséquence nous avons d'abord posé les questions suivantes :

1. comment construire un graphe à partir des mesures de l'activité d'un grand nombre de sources ?
2. comment caractériser de tels graphes ?
3. les graphes obtenus dans des situations usuelles en robotique sont-ils aisément discriminables ?
4. comment expliquer l'allure des caractéristiques observées ? correspondent-ils à des graphes classiques (Erdős-Rényi, Small-world, ...)

La première question a reçu plusieurs réponses, en fonction de la méthode de choix du seuil ; elle donne même lieu à des développements possibles à partir de la théorie de l'information (cf §3.6.2.2).

Pour répondre à la seconde question le degré d'un graphe ainsi que le spectre de sa matrice d'adjacence, deux invariants classiques des graphes aléatoires ont été mis en avant. Ceci nous a permis de répondre à la troisième question en montrant empiriquement que :

- le spectre de la matrice d'information mutuelle permet de distinguer finement toutes les situations expérimentales présentées (de plus on dispose de résultats prédictifs pour les valeurs propres maximales).
- le degré distingue les grandes catégories de situations expérimentales, mais certains phénomènes (variance prononcée) demeurent inexpliqués.
- le spectre de la matrice d'adjacence permet de discriminer les catégories d'expériences mais en agglomère certaines de manière précoce.

De manière générale on note que d'une part la pouvoir discriminant du spectre des graphes est inférieur à celui du spectre des matrices d'information mutuelle, ce qui est cohérent avec la perte d'information occasionnée par la discrétisation.

La dernière question, quant à elle, n'a pas trouvé de réponse satisfaisante, mais fera l'objet de plus amples développements (cf §3.6.2.2).

Une fois posé le principe du compromis entre discrétisation de la mesure de dépendance et disponibilité de nouveaux invariants topologiques, nous avons remarqué qu'en théorie des probabilités les dépendances ne se limitaient pas à l'ordre deux, et avons d'abord proposé des mesures de dépendance probabilistes et statistiques d'ordre supérieur. Il est apparu nécessaire d'encoder de manière appropriée un grand nombre d'entre elles ; nous avons donc mis en avant la correspondance entre les propriétés de l'indépendance probabiliste et les propriétés topologiques d'un type particulier d'espace topologique, le complexe simplicial. Il s'en est ensuivi une exploitation de ce rapprochement guidée par des travaux en topologie computationnelle, en particulier l'homologie simpliciale qui offre l'avantage d'être calculable. Afin de respecter les contraintes des algorithmes de calcul, nous avons proposé une méthode d'encodage des données de dépendances statistique sous forme d'une filtration, avant le calcul du nombre de Betti du complexe simplicial. Pour finir, cette méthode a donné lieu à une évaluation numérique comme précédemment au cours de laquelle la capacité de discrimination a été prouvée, et donne des résultats satisfaisants pour le groupe d'expériences réalisées à l'aide d'un robot simulé simple.

Finalement, quel apport constituent les résultats présentés au cours de ce chapitre, notamment pour la représentation des relation sensorimotrices dans le cadre par exemple de l'étude des affordances ? Du point de vue formel, comment nous situons-nous par rapport aux travaux de plusieurs chercheurs, et plus spécifiquement par rapport à la restriction de leurs travaux qui touche la représentation des relations sensorimotrices ?

Olsson et collègues [36] induisent une topologie sur l'ensemble des capteurs par projection d'un ensemble de distances, fondées sur la métrique d'information empruntée à Crutchfield. La structure de l'ensemble des dépendances transparait surtout dans la "carte sensoritopique", qui constitue en fait une projection de la matrice des distances d'informations. Elle permet de visualiser aisément les regroupements de capteurs par proximité au sens de la distance de l'information, mais ne fournit pas de compréhension plus fine de la structure des relations de dépendance, notamment concernant les dépendances d'ordre supérieur. En revanche, les situations expérimentales prises en compte sont plus riches que celles sur lesquelles nous nous appuyons.

Seth [43] propose une représentation topologique sous forme de graphe, et fonde la dépendance sur la causalité de Granger qui prend en compte des dépendances entre plus de deux variables. Les nombreux outils d'analyse des graphes ne se limitent pas au degré et permettent de comprendre de manière fine quels sous-ensembles jouent un rôle déterminant lors de l'interaction entre le robot et son environnement pour des tâches simples de fixation. Les aspects de causalité sont absent de nos travaux, toutefois nous rappelons

que ce type de mesure de dépendance repose sur un modèle linéaire.

Sporns et al. [31] confrontent de nombreuses mesures causales et non causales de dépendance tirées de la théorie de l'information, telles que l'entropie et l'information mutuelle dans le cas non causal, et l'entropie de transfert dans le cas causal. Bien que les expériences soient menées à l'aide de robots réels dans des conditions beaucoup plus réalistes que celles que nous proposons ici, nous remarquons que peu d'outils d'examen de la structure fine de l'ensemble des dépendances sont mis en oeuvre, et que les dépendances d'ordre supérieur sont négligées, au bénéfice de la prise en compte des rapports causaux absents de notre étude.

Pour conclure il apparaît que notre étude complète les travaux ci-dessus en prenant en compte les dépendances d'ordre supérieur, et en proposant un cadre d'analyse fin grâce d'une part aux outils de caractérisation des graphes supporté pas des résultats analytique pour certains cas particuliers ; d'autre part grâce à la formalisation des dépendances d'ordre supérieur et à leur analyse homologique. Après avoir dressé ce bilan circonstancié de notre étude et l'avoir située par rapport aux travaux d'autres chercheurs, nous esquissons quelques pistes de recherche.

### 3.6.2 Perspectives

Nous distinguons ici deux types de perspectives : d'une part l'élargissement des types de dépendances probabilistes déjà prises en compte et des méthodes de caractérisation, l'amélioration de la significativité statistique des estimateurs, etc... que nous assimilons à des développements (§3.6.2.1). D'autre part nous renouvelons la problématique scientifique, orientée au long de ce chapitre vers la caractérisation d'un réseau de dépendance plus que vers son explication (§3.6.2.2).

#### 3.6.2.1 Développements techniques

**Apport de la reconstruction de réseau** La modélisation des réseaux biologiques tient une place prépondérante dans la génétique moderne. Bien que des réseaux de différentes taille concourent à l'organisation des être vivants (e.g. au niveau individuel, intraspécifique ou entre espèce), cette discipline concentre ses efforts sur la compréhension des réseaux moléculaires, plus particulièrement au niveau intracellulaire [11]. La régulation de la transcription et les réseaux métaboliques constituent des sujets de prédilection, et donnent lieu à une intense activité modélisatrice.

Deux activités principales coexistent en fait : d'une part la modélisation de réseau, d'autre part l'identification de modèle d'après des données mesurées, laquelle s'apparente à l'estimation paramétrique déjà rencontrée en §3.1.2.2. On peut en donner de nombreux exemples, depuis les *relevance networks* et assimilés [7, 32] jusqu'aux réseaux bayésiens qui représentent les niveaux d'expression des gènes par des variables aléatoires, le but étant alors d'identifier la densités jointes en les décomposant à l'aide des densités conditionnelles.

On constate donc une proximité certaine entre les méthodes disponibles dans cette discipline et celles mises en oeuvre au long de ce chapitre. Notre intérêt se portera essentiellement sur les techniques de validation telles que la recherche de dépendances cachées chez [32], le test sur des réseaux de référence mentionnés dans [32], la *sensibilité* et la *spécificité* qui quantifient respectivement la proportion d'arcs reconstruits à juste titre ou de manière erronée à partir d'un réseau de référence (cf références citées dans [11]).

**Types de dépendances à examiner** On a examiné au cours de ce chapitre des dépendances probabilistes et leur traduction statistique bivariée et multivariée, et ce de manière non orientée. On peut imaginer de nombreuses extensions, notamment en considérant des interactions entre deux ou plusieurs groupes de variables ; et en introduisant des dépendances causales.

Pour traiter le cas de dépendances entre groupes de variables, on peut se tourner vers l'*analyse canonique*, dont l'objet d'étude est le lien entre deux ensembles de variables décrivant  $n$  individus. Pour confronter les "pouvoirs de description"<sup>49</sup> de chacun des groupes de variables, les espaces engendrés par chacun de ces groupes sont formés, et l'angle entre ces deux espaces est calculé. Si les deux sous-espaces sont confondus, les groupes de variables fournissent des descriptions équivalentes, alors que si les deux sous-espaces sont orthogonaux, ils ne concernent pas le même phénomène. Cette technique repose toutefois sur un modèle linéaire des dépendances, dont on s'est affranchi ici en ayant recours à l'*information mutuelle*.

Une autre extension concerne la prise en compte de dépendances orientées, à l'inverse des dépendances considérées jusqu'ici qui ne permettent pas de révéler une orientation de l'interaction, ou un rapport de causalité, bien que cette notion pose de nombreux problèmes dans un cadre statistique<sup>50</sup>. Moultes définitions de la causalité sont débattues dans la littérature, et donnent lieu à autant de mesures de causalité statistique en économie, physique, climatologie, physiologie, etc. . . dont on pourra trouver une revue complète dans [22]. On citera notamment l'*information mutuelle conditionnelle*, l'*entropie de transfert* ou la causalité de Granger.

**Caractérisations topologiques** En §3.2 quelques caractéristiques élémentaires de la connectivité des graphes ont été introduites, telles que le degré d'un graphe ou le spectre de sa matrice d'adjacence. La littérature offre toutefois une gamme bien plus vaste d'invariants parmi lesquels on pourra citer le coefficient de clustering, le nombre de chemins et de cycles, les longueurs moyennes de chemin ou encore les indices de vulnérabilité ([38],[45] pour des exemples en neuroscience). Il est important de noter que les lois de ces mesures dans le cas de graphes aléatoires de différents types sont souvent disponibles.

Dans le cas des dépendances  $n$ -aires aboutissant à des représentations sous formes

<sup>49</sup> cf [42, chap. 8].

<sup>50</sup> Nous renvoyons par exemple à [20, chap.12.6] pour une discussion de ce point particulier.

de complexes simpliciaux, on s'est tournés vers des caractérisations homologiques, mais n'avons pas réalisé d'état de l'art des autres types de caractérisation.

### 3.6.2.2 Perspectives scientifiques

**Distribution a priori dans la nature et en robotique mobile** Au cours de ce chapitre, deux séries d'expériences ont été menées dans des conditions où les distributions de probabilités des valeurs renvoyés par les capteurs n'étaient connues que pour la première série. Nous n'avons pas élucidé la nature des graphes et complexes simpliciaux aléatoires obtenus après discrétisation, pour plusieurs raisons énumérées ci-dessous :

- hormis dans le cas simple, les lois de probabilité des matrices d'information mutuelle ne sont pas disponibles.
- en conséquence, leurs équivalents discret après discrétisation ne le sont pas non plus, ce qui empêche le calcul des distributions des caractéristiques topologiques, et leur comparaison aux graphes aléatoires présents dans la nature.
- de la même manière les lois des informations mutuelles généralisées à l'ordre supérieur ne sont pas connues, pas plus que les lois de présence des faces des simplexes après discrétisation, puis de leur caractérisation homologique.

**Discrétisation des relations et distorsion** Le problème de la discrétisation des mesures se pose dans la littérature pour les mesures de dépendance statistiques, comme [1] en donne l'exemple. Il existe également une vaste littérature sur le sujet dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques et des différentes caractéristiques des régimes associés, en particulier pour évaluer le degré de chaoticité d'un système.

Au cours de ce chapitre, nous avons proposé de discrétiser les mesures de dépendance afin de bénéficier de caractéristiques topologiques de graphes ou de complexes simpliciaux. Plusieurs méthodes de discrétisation ont été mises en oeuvre, et rassemblées en §3.2.2.3. Cette section a donné lieu à une discussion au sujet de la théorie de la distorsion. D'une part celle-ci propose des résultats d'existence d'un alphabet étant donné un niveau arbitraire de distorsion  $D$  ; d'autre part elle tient à disposition des outils permettant d'approximer le codage optimal dont l'existence a été préalablement garantie.

L'un des problèmes centraux est celui de la définition de la fonction de distorsion élémentaire  $d$ , qui pose par exemple de nombreux problèmes dans des contextes où des facteurs perceptifs interviennent, tels que l'encodage/décodage d'image ou de musique.

Il est possible de ne pas tenir compte de la spécificité du contexte, et de rechercher une partition de  $\mathbb{R}$  grâce à un seuil  $\varepsilon$  de sorte que soit minimisée  $E[d(X^n, g_n(f_n(X^n)))]$  pour  $d = (x - \hat{x})^2$  par exemple.

En reconnaissant à l'inverse que la raison d'être de la caractérisation n'est pas tant l'encodage/décodage de la matrice de l'information mutuelle qui quantifie les relations locales, mais plutôt le type global d'interaction, on pourra rechercher des mesures de distorsion qui font intervenir les caractéristiques topologiques obtenues après discrétisation.

Une autre piste consiste à interroger le choix du type de mesure de dépendance : par exemple, on a examiné dans [21] des réseaux de dépendances linéaires à l'aide de la corrélation ; à l'inverse au cours de ce chapitre on s'est préoccupés de mesures de dépendances non nécessairement linéaires. Il est alors légitime de se demander quel est l'ordre de grandeur de la distorsion provoquée par le choix de l'un plutôt que l'autre compte tenu de la nature des distributions considérées.

## Compléments : calculs d'information mutuelle

### Écriture de la redondance avec $H$

En 3.2.3.1 on pose l'identité entre  $D(p(X, Y, Z) || p(X)p(Y)p(Z))$  et l'écriture de la redondance à partir de l'entropie de Shannon  $r(X, Y, Z) = H(X) + H(Y) + H(Z) - H(X, Y, Z)$ . Il suffit de remarquer que, dans le cas discret :

$$D(p(X, Y, Z) || p(X)p(Y)p(Z)) = \sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log \frac{p(x_i, y_j, z_k)}{p(x_i)p(y_j)p(z_k)} \quad (3.55)$$

$$= - \sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log p(x_i)p(y_j)p(z_k) \quad (3.56)$$

$$-H(X, Y, Z) \quad (3.57)$$

On décompose le log en somme, et en s'intéressant au premier terme de cette somme, on note que :

$$- \sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log p(x_i) = - \sum_i \log p(x_i) \sum_{j,k} p(x_i, y_j, z_k) \quad (3.58)$$

$$= - \sum_i p(x_i) \log p(x_i) \quad (3.59)$$

$$= H(X) \quad (3.60)$$

On trouve donc le résultat attendu en recommençant avec  $Y$  et  $Z$ .

### Relation du simplexe pour la redondance

Plus loin en 3.2.3.1 on affirme que  $D(p(X, Y, Z) || p(X)p(Y)p(Z)) > D(p(X, Y) || p(X)p(Y))$ , ce qui permet de vérifier la condition de construction des simplexe. On vérifie cette assertion de deux manières, via la distance de Kullback-Leibler ou via la redondance.

### En partant de la distance de Kullback-Leibler

Ici on doit prouver les assertions de l'Eq.(3.37) en passant de l'indépendance à son approximation par Eq.(3.36).

Nous employons une preuve par récurrence en traitant d'abord le cas  $R_\epsilon(x, y, z) \Rightarrow R_\epsilon(x, y)$ , avant de passer de  $n$  à  $n + 1$ .

A l'ordre 3 On veut vérifier que  $R_\epsilon(X, Y, Z) \Rightarrow R_\epsilon(X, Y)$ . Pour cela on montre que :

$$\begin{aligned} D_{KL}(p(X, Y, Z) || p(X)p(Y)p(Z)) < \epsilon &\Rightarrow \\ D_{KL}(p(X, Y) || p(X, Y)) < \epsilon &\end{aligned} \quad (3.61)$$

Pour que Eq.(3.61) soit valide il suffit que :

$$\begin{aligned} D_{KL}(p(X, Y) || p(X, Y)) < \\ D_{KL}(p(X, Y, Z) || p(X)p(Y)p(Z)) &\end{aligned} \quad (3.62)$$

Puis :

$$\begin{aligned} \Delta &= D_{KL}(p(X, Y, Z) || p(X)p(Y)p(Z)) \\ &\quad - D_{KL}(p(X, Y) || p(X, Y)) \\ &= \sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log \frac{p(x_i, y_j, z_k)}{p(x_i)p(y_j)p(z_k)} \\ &\quad - \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \end{aligned}$$

Comme  $p(x_i, y_j) = \sum_k p(x_i, y_j, z_k)$  :

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log \frac{p(x_i, y_j, z_k)}{p(x_i)p(y_j)p(z_k)} \\ &\quad - \sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \\ &= \sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log \frac{p(x_i, y_j, z_k)}{p(x_i, y_j)p(z_k)} \end{aligned}$$

En identifiant  $X, Y$  à une variable aléatoire  $U$  définie sur l'espace produit il vient :

$$\Delta = \sum_{k,l} p(u_l, z_k) \log \frac{p(u_l, z_k)}{p(u_l)p(z_k)} \quad (3.63)$$

Ce terme étant formellement égal à une information mutuelle, il est positif.

**De  $n$  à  $n+1$**  Supposons que la relation soit vérifiée à l'ordre  $n$  : si  $R_\epsilon(X_1, \dots, X_n)$  alors pour toute sous-suite extraite de variables aléatoires  $(X_i, \dots, X_j)$  parmi  $(X_1, \dots, X_n)$ . Puis supposons  $R_\epsilon(X_1, \dots, X_{n+1})$ . En réutilisant le procédé menant à l'Eq.(3.63), on identifie  $(X_n, X_{n+1})$  à une variable aléatoire  $U$  définie sur un espace produit. En repetant cela pour tout  $(X_1, \dots, X_{n+1})$  nous atteignons l'ensemble des sous-suites extraites.

### 3.6.2.3 En passant par la redondance

On peut retrouver ce résultat grâce à la formule 3.40 qu'on reproduit ci-dessous, en se rappelant que la redondance est toujours positive :

$$r(X, Y, Z) = r((X, Y), Z) + r(X, Y)$$

Donc  $r(X, Y, Z) \geq r(X, Y)$ .

## Remerciements

Ce chapitre résulte d'une collaboration avec Jean-Louis Giavitto, Olivier Michel et Antoine Spicher, de l'équipe LIS (IBISC) qui ont porté à ma connaissance les outils de topologie computationnelle..

Merci à Boris Saulnier d'avoir éveillé mon intérêt pour les propriétés des réseaux aléatoires.

## Bibliographie

- [1] A. Agresti. The effect of category choice on some ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, 71(353) :49–55, 1976.
- [2] E. Alhoniemi, J. Himberg, J. Parhankangas, and J. Vesanto. Som toolbox. Laboratory of Information and Computer Science in the Helsinki University of Technology., 2000-2005.
- [3] Almaas, Kovacs, Vicsek, Oltvai, and Barabási. Global organization of metabolic fluxes in the bacterium escherichia coli. *Nature*, 427(1) :839–843, Feb 2004.
- [4] A. L. Barabasi and Z. N. Oltvai. Network biology : Understanding the cell's functional organization. *Nature Rev. Genetics*, 5(2) :101–U15, 2004.
- [5] A. Barrat, M. Barthelemy, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani. The architecture of complex weighted networks. *PNAS*, 101(11) :3747–3752, 2004.
- [6] B. Bollobás. Degree sequences of random graphs. *Discrete Math*, 33(1), 1981.
- [7] A. J. Butte and I. S. Kohane. Mutual information relevance networks : functional genomic clustering using pairwise entropy measurements. *Pac Symp Biocomput*, pages 418–29, 2000. Using Smart Source Parsing.
- [8] C. J. Cellucci, A. M. Albano, and P. E. Rapp. Statistical validation of mutual information calculations : Comparison of alternative numerical algorithms. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 71(6) :066208, 2005.
- [9] W. Cochran. Some methods for strengthening the common chi-2 tests. *Biometrics*, 10(4) :417–451, 1954.

- 
- [10] T.M. Cover and J.A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley, 1991.
- [11] F. d'Alché Buc and V. Schächter. Modeling of biological networks. In *proceedings of XI International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis (AM-SDA)*, pages 167–180, Brest, May 2005. Groupe des écoles de télécommunications de France.
- [12] S.F. Dorogovtsev and J.F.F. Mendes. Evolution of networks. *Advances In Physics*, 51(4), 2002.
- [13] R.O. Duda, P.E. Hart, and D.G. Stork. *Pattern Classification (2nd ed.)*. Wiley Interscience, 2001.
- [14] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete Comput. Geom.*, 28, 2002.
- [15] I.J. Farkas, I. Derényi, A.L. Barabási, and T. Vicsek. Spectra of “real-world” graphs : beyond the semicircle law. *Phys. Rev.*, 64, 2001.
- [16] A. M. Fraser and H. L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. , 33 :1134–1140, February 1986.
- [17] Z. Füredi and J. Komlós. The eigenvalues of random symmetric matrices. *Combinatorica*, 1(3) :233–241, 1981.
- [18] I.N. Goodman. *Analysing statistical dependencies in neural populations*. Master's Thesis, Rice University, Houston, Texas, 2005.
- [19] A.G. Gray and A.W. Moore. Nonparametric density estimation : Toward computational tractability. In *SIAM International Conference on DataMining*, 2003.
- [20] J. Harthong. *Calcul des Probabilités*. 2004.
- [21] A. Hazan, V. Vigneron, J.L. Giavitto, O. Michel, and H. Maaref. A relationist and descriptive approach to stationary time series. In *Proceedings of the European Conference on Complex Systems (ECCS07)*, Dresden, October 2007.
- [22] K. Hlaváčková-Schindler, M. Paluš, M. Vejmelka, and J. Bhattacharya. Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis. *Physics Reports*, 441(1) :1–46, March 2007.
- [23] A. Ihler. Kernel density estimation toolbox for matlab. 2003. <http://ttic.uchicago.edu/~ihler//code/>.
- [24] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. Oltvai, and A.-L. Barabási. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 407(6804) :651–654, 2000.
- [25] H. Joe. Relative entropy measures of multivariate dependence. *Journal of the American Statistical Association*, 84(405) :157–164, March 1989.
- [26] J. Johnson. Hypernetworks for reconstructing the dynamics of multilevel systems. In *ECCS'06*, Oxford, 2006.
- [27] T. Kohonen. *Self-Organizing Maps. Third, extended edition*. Springer, 2001.

## Bibliographie

---

- [28] I. Kojadinovic. On the use of mutual information in data analysis : an overview. In *Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2005)*, Brest, France, 2005.
- [29] A. Kraskov, H. Stogbauer, and P. Grassberger. Estimating mutual information. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 69(6) :066138, 2004.
- [30] A. Lesne. Complex networks : from graph theory to biology. <http://www.lptmc.jussieu.fr/users/lesne>, 2007.
- [31] M. Lungarella and O. Sporns. Mapping information flow in sensorimotor networks. *PLoS Computational Biology*, 2(10), 2006.
- [32] Adam Margolin, Ilya Nemenman, Katia Basso, Chris Wiggins, Gustavo Stolovitzky, Riccardo Favera, and Andrea Califano. Aracne : An algorithm for the reconstruction of gene regulatory networks in a mammalian cellular context. *BMC Bioinformatics*, 7(Suppl 1) :S7, 2006.
- [33] W.J. McGill. Multivariate information transmission. *Psychometrika*, 19(2) :87–116, 1954.
- [34] M.L Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, 1991, New York, San Diego.
- [35] J.-M. Monier. *Algèbre 2*. Dunod, 1997.
- [36] L.A. Olsson, C.L. Nehaniv, and D. Polani. From unknown sensors and actuators to actions grounded in sensorimotor perceptions. *Connection Science*, 18(2) :121–144, 2006.
- [37] M. Paluš, V. Albrecht, and I. Dvořák. Information theoretic test for nonlinearity in time series. *Physics Letters A*, 175 :203–209, April 1993.
- [38] A. Réka and A.L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74(1) :47–97, Jan 2002.
- [39] M.S. Roulston. Significance testing of information theoretic functionals. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 110(1-2) :62–66, 1997.
- [40] A. Rényi. On measures of dependence. *Acta Mathematica Hungarica*, 10(3) :441–451, 1959.
- [41] T. Geisel S. Dodel, J.M. Herrmann. Functional connectivity by cross-correlation clustering. *Neurocomputing*, 44-46, 2002.
- [42] G. Saporta. *Probabilités, Analyse de Données et Statistiques*. Technip, 2<sup>nd</sup> edition, 2006.
- [43] A.K. Seth. Causal connectivity analysis of evolved neural networks during behavior. *Network : Computation in Neural Systems*, 16(1) :35–55, 2005.
- [44] C.E. Shannon. A mathematical theory of information. *Bell System Technical Journal*, 27 :-, 1948.

- 
- [45] O. Sporns. Graph theory methods for the analysis of neural connectivity patterns. In R. Kötter, editor, *Neuroscience Databases. A Practical Guide*. Klüwer.
  - [46] O. Sporns, D.R. Chialvo, M. Kaiser, and C.C. Hilgetag. Organization, development and function of complex brain networks. *Trends in Cognitive Sciences*, 8(9), 2004.
  - [47] A. Stuart, K. Ord, and S. Arnold. *Kendall's advanced theory of statistics*, volume 2A. Oxford University Press, London, 6 edition, 1994.
  - [48] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. Doyne Farmer. Testing for nonlinearity in time series : the method of surrogate data. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 58 :77–94, September 1992.
  - [49] G. Carlsson V. de Silva. Topological estimation using witness complexes. In *Proc. Sympos. Point-Based Graphics*, 2004.
  - [50] H. Ventsel. *Théorie des Probabilités*. Mir, Moscou, 1973.
  - [51] W. Wienholt and B. Sendhoff. How to determine the redundancy of noisy chaotic time series. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 6(1) :101–117, 1996.
  - [52] Eugene P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *The Annals of Mathematics*, 62(3) :548–564, Nov. 1955.
  - [53] S.H. Yook, H. Jeong, A.-L. Barabási, and Y. Tu. Weighted evolving networks. *Physical Review Letters*, 86 :5835–5838, 2001.
  - [54] A.J. Zomorodian. *Topology for Computing*. Cambridge University Press, 2005.

## Sources en libre accès

### Articles :

- de nombreux preprints sur le site de Milan Paluš <http://www.cs.cas.cz/~mp/epr/epr0.html>
- articles de Zomorodian, <http://www.cs.dartmouth.edu/~afra/>.
- ouvrage de topologie algébrique en libre accès sur le site de Allen Hatcher, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>

### Code source :

- Stixbox de Anders Holtsberg <http://www.maths.lth.se/matstat/stixbox/> pour Matlab.
- amélioration et adpatation de Stixbox pour Scilab, par l'équipe Probabilité et Statistiques d'Orsay, <http://www.math.u-psud.fr/~agreg/AgregSoft/WEB/logiciels.html>, ainsi que sur le site de Scilab.
- connectivity toolbox [http://www.indiana.edu/~7Ecortex/connectivity\\_toolbox.html](http://www.indiana.edu/~7Ecortex/connectivity_toolbox.html)
- l'estimateur de l'information mutuelle KSG est disponible parmi les sources de l'algorithme de clustering MILCA [www.klab.caltech.edu/~kraskov/MILCA/](http://www.klab.caltech.edu/~kraskov/MILCA/). Ces

### *Bibliographie*

---

sources ont du être adaptées en tant que fonctions compilées pour Matlab et Scilab, car les m-files fournis par Kraskov appellent directement les fonctions C en passant les argument par lecture/écriture successives sur le disque, ce qui nuit à la rapidité de calcul en cas d'appel répétés comme par exemple lors du bootstrap.

- Plex 2.5 <http://comptop.stanford.edu/programs/>
- la SOM Toolbox [2] est disponible à <http://www.cis.hut.fi/projects/somtoolbox>, utilisés par exemple pour dessiner les dendrogrammes correspondants à l'agglomération hiérarchique rencontrés en §3.2.4.

# Chapitre 4

## Applications en robotique mobile

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Protocoles</b>	<b>132</b>
4.1.1	Simulateurs	132
4.1.2	Robot, capteurs et effecteurs	133
4.1.3	Classification supervisée	133
4.1.4	Classification non supervisée	136
<b>4.2</b>	<b>Résultats</b>	<b>136</b>
4.2.1	Classification supervisée	141
4.2.2	Classification non supervisée	143
<b>4.3</b>	<b>Discussion et perspectives</b>	<b>144</b>
4.3.1	Discussion	144
4.3.2	Perspectives	144
	<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>

---

Dans les chapitres précédents nous avons souligné l'intérêt des concepts issus de la psychologie écologique pour l'autonomie en robotique. La mobilité des robots, par exemple, est liée à la traversabilité des obstacles. Si plusieurs types de capteurs avec et sans contact sont disponibles, il est possible d'associer, par apprentissage statistique, les caractéristiques de contact d'un objet avec ses caractéristiques visibles à distance. Ceci permet de prédire à distance si une zone est traversable ou pas, même si cette zone n'a jamais été observée avant [6, 12].

Cette classification en deux catégories (traversables et non traversable) est mise à profit dans certains travaux pour réaliser un objectif fixé à l'avance (*'goal-oriented task'*), telle que la navigation jusqu'à un objectif donné [6], ou la poussée d'un objet dans une direction prédéfinie [5].

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la capacité pour un robot de pousser un objet présent dans son environnement, et plus particulièrement à la capacité de catégoriser les objets selon qu'ils sont poussables ou non par le robot. Cette capacité dépend de nombreux

paramètres mécaniques tels que le couple exercé par les moteurs du robot, les coefficients de friction des roues, de la surface sur laquelle évolue le robot, mais aussi de la géométrie de l'objet poussé ainsi que de sa masse et de ses coefficients de friction.

A la différence des travaux mentionnés ci-dessus, nous laissons donc de côté l'apprentissage statistique d'une relation entre les données des capteurs de contact et les données des capteurs à distance, destiné à éviter le contact pour prédire plus rapidement la traversabilité. De même nous ne dirigeons pas l'action du robot vers un but (e.g. navigation). Nous nous concentrons sur la possibilité de catégoriser les objets en deux classes (poussable et non poussables), à partir de plusieurs sources d'information données par des capteurs de contact et des télémètres à propos de l'interaction mécanique entre le robot et l'objet, ce afin de valider l'utilité des outils introduits dans les chapitres précédents.

En effet nous avons remarqué (cf chap. 2) que la plupart des travaux de robotique qui transposent les *affordances* s'appuient sur l'inférence statistique, mais sans rendre compte de la structure des dépendances entre les différents constituants du robot. Dans ce chapitre nous nous proposons donc de répondre au problème de classification d'objet poussables et non poussables grâce aux techniques de théorie de l'information et de théorie des matrices et graphes aléatoires introduits au chapitre 3, pour représenter l'ensemble des interactions sensorimotrices qui concourent à la poussée d'un objet.

Pour cela nous simulons (§4.1.1) l'interaction mécanique entre un robot mobile Pioneer2AT (§4.1.2) muni de bumpers et les objets de son environnement. Puis nous réalisons un apprentissage supervisé (§4.1.3) et non supervisé (§4.1.4) afin de catégoriser les objets selon qu'ils sont poussables ou non, et comparons nos résultats avec ceux de la littérature (§4.2).

## 4.1 Protocoles

Notre objet d'étude est un robot mobile simulé. Dans cette section nous commençons par présenter le simulateur d'interaction mécanique, le type de robot employé ainsi que les objets de l'environnement. Puis nous détaillons les procédures de classification supervisée et non supervisée.

### 4.1.1 Simulateurs

L'interaction d'un robot sur un plan parsemé d'objets est simulée à l'aide de Gazebo [9], qui reproduit les mouvements, collisions et frictions d'une population de robots munis de capteurs et d'effecteurs, dans un espace 3D. Gazebo a été développé en parallèle avec le logiciel de commande de robot Player [13] autour d'une architecture client/serveur qui lui permet de se substituer à un robot réel afin de concevoir et tester les algorithmes de commande avant implantation. Ici nous pilotons directement le robot simulé à l'aide de la librairie `libgazebo`, sans passer par Player.

Pour la modélisation et la simulation des interactions mécaniques entre objets de l'environnement, Gazebo repose sur ODE [8] qui simule la mécanique de corps rigides articulés, les frictions et les collisions. Les équations du mouvement sont tirées d'un modèle fondé sur les multiplicateurs de Lagrange [1, 11]. Leur intégration numérique est effectuée à l'aide d'un intégrateur de premier ordre pour des raisons de vitesse de calcul [2].

#### 4.1.2 Robot, capteurs et effecteurs

Notre système d'étude est l'ensemble formé par un robot Pioneer 2AT et par des objets, situés sur une surface plane, représenté par la Fig.4.1(a). Le robot est muni d'un télémètre laser tournant SICK (cf Fig.4.1(b)) qui émet  $n$  rayons lumineux répartis en arc de cercle dans le demi-plan avant du robot. Le robot est pourvu de 10 bumpers avant montés sur ressort, dont l'élongation est mesurée par autant de télémètres laser, comme l'illustre Fig.4.1(c,d). Enfin, des capteurs mesurent la vitesse de rotation des 4 roues du robot. Les *variables mesurées* en fonction du temps  $t$  sont notées comme suit :

- élongations  $d_i$  de chacun des éléments du bumper, où  $i \in [1, 10]$ .
- vitesses de rotation de chacune des roues  $\omega_j$ ,  $j \in [1, 4]$ .
- distances  $D_k(t)$  entre le télémètre et le mur, où  $j \in [1, 20]$ .

Gazebo ne simule pas le bruit qui affecte les capteurs du robot, il est donc nécessaire de corriger les mesures produites *a posteriori*. Pour cela nous suivons le modèle de bruit Gaussien additif établi dans [14] pour simuler le bruit affectant les télémètres laser et les bumpers.

Les objets de l'environnement sont des sphères, des cylindres et des cubes de taille et de coefficient de friction fixés, mais de masse variable selon qu'ils sont poussables ou non.

#### 4.1.3 Classification supervisée

L'expérience proposée s'inspire des travaux de Şahin, Ugur et al. [3, 4] à propos de la capacité pour un robot de traverser des objets (*traversability affordance*), qui désigne la possibilité de traverser un lieu dans une direction donnée. Ici nous nous restreignons à la capacité de pousser un objet rencontré. Nous pensons que l'étude des dépendances statistiques entre senseurs et effecteurs lors de l'interaction d'un agent avec son environnement est nécessaire pour traduire de manière opérationnelle les *affordances*.

On simule la rencontre entre un robot Pioneer2AT doté d'une vitesse initiale  $\vec{v}$  et des objets de forme cubique, de coefficient de friction fixé, mais de masse variable. La Fig.4.2 illustre ce dispositif expérimental.

Afin de comparer nos résultats avec ceux publiés dans la littérature [3, 4], nous optons pour une tâche de classification supervisée, à partir des matrices d'information mutuelle associées aux valeurs mesurées par les capteurs au cours du temps. Cette classification se déroule en deux temps : d'abord on présente au classifieur un ensemble de matrices d'information mutuelle auxquelles sont associés des labels ('poussable' ou 'non poussable')

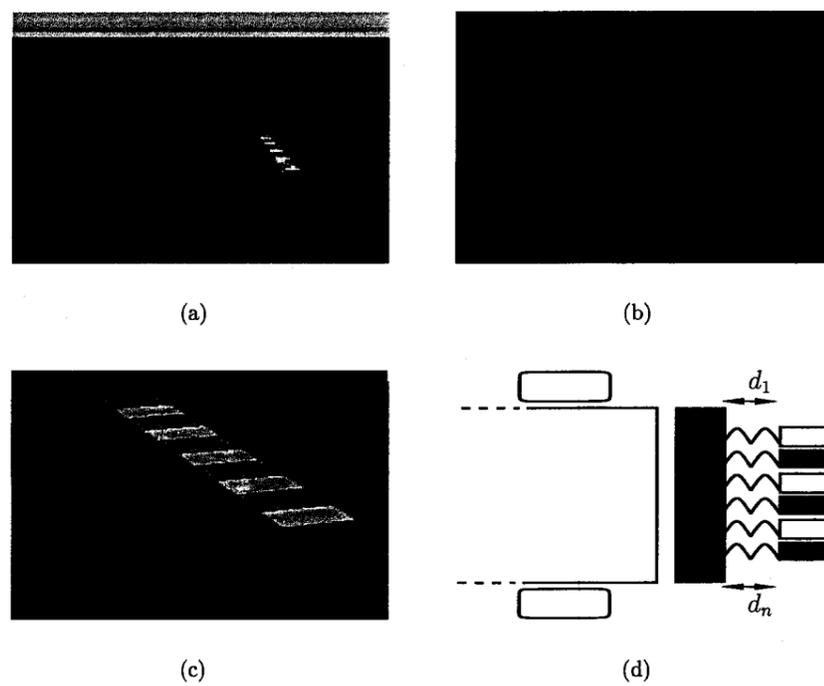


FIG. 4.1 – Robot Pioneer 2AT (a) et ses capteurs : (b) télémètre laser Sick (c,d) bumper en 3D et en vue schématique de haut.

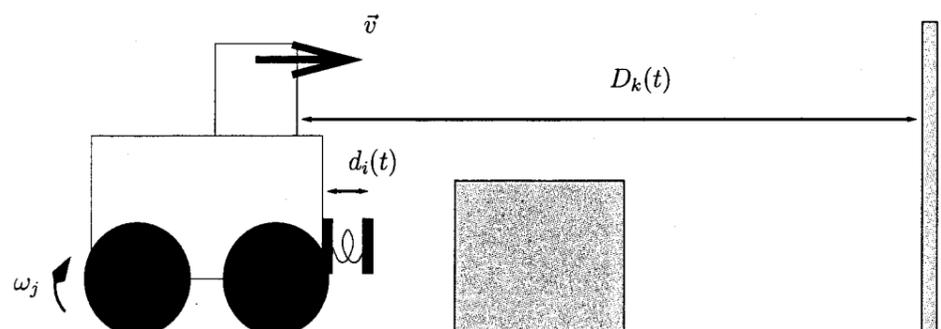


FIG. 4.2 – Schéma de l'expérience de poussée d'objet. Les grandeurs mesurées en fonction du temps sont  $d_i(t)$  l'élongation des éléments du bumper ;  $\omega_j(t)$  les vitesses de rotations des roues,  $D_k(t)$  les distances entre le télémètre laser monté sur le robot et un mur.

déterminés avant l'expérience. Ensuite, on présente un nouvel ensemble de matrices au classifieur, qu'il doit labelliser.

Le classifieur est composé d'une carte auto-organisée (SOM, cf [7]) à laquelle sont présentées les tableaux de données correspondants aux expériences. Plus précisément ces tableaux de données de départ sont modifiés en leur ajoutant autant de dimensions que de classes possibles en sortie, et en assignant la valeur 1 à la  $i$ -ème composante si le vecteur appartient à la  $i$ -ème classe. La SOM est ensuite initialisée à l'aide de ce jeu de données d'apprentissage. A chacune des unités de la carte auto-organisée est assignée une classe. Puis, lors de la phase de reconnaissance, on présente de nouveaux tableaux de données ne provenant pas de l'ensemble d'apprentissage. Chacun d'entre eux est associé à une unité de la carte, et donc à la classe de cette unité<sup>51</sup>. En connaissant les labels des nouveaux vecteurs présentés, on peut alors calculer un taux d'erreur de classification, comme nous le ferons dans la suite.

Par ailleurs, nous avons précisé plus haut que nous adoptons la classification supervisée pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux de la littérature. Nous souhaitons également comparer la description statistique choisie (ici les matrices d'information mutuelle) avec une représentation plus classique. Pour cela nous projeterons chacune des séries temporelles multidimensionnelles dans un espace de faible dimension, puis nous échantillonnerons les instants de temps considérés pour ramener la description de chaque tableau de données à un vecteur comportant une cinquantaine de composantes. A cette fin, nous employons une analyse en composantes principales [10, chap.7], munie de la distance euclidienne.

Pour construire les jeux de données nécessaires à l'apprentissage et au test, nous modifions la forme des objets (cylindre, cube, sphère) leur masse ( $m = 15\text{ kg}$ ,  $m = 50\text{ kg}$ ), ainsi que l'angle d'incidence du robot et l'écart entre son vecteur vitesse et le centre de gravité des objets. L'angle d'incidence est tiré au hasard selon une loi uniforme dans  $[0, \pi/2]$ , la distance entre le centre de gravité de l'objet et la direction du robot étant tiré au hasard selon une loi uniforme dans  $[-10, 10]$  cm.  $N = 200$  expériences sont réalisées pour chacun des cas. Les tableaux de données sont alors mélangés au hasard et répartis en deux groupes, l'un pour l'apprentissage et l'autre pour le test. Notons que les paramètres suivants, qui ont une influence déterminante sur le résultat des expériences, restent fixes :

- vitesse initiale  $\vec{v}$  du robot.
- couple maximal développé par les moteurs actionnant les roues.
- coefficient de friction de l'objet poussé, des roues, du sol.
- coefficient d'élasticité des bumpers.

Finalement, les taux d'erreur sont calculés dans chaque cas. Comme l'apprentissage de la carte auto-organisée est "bootstrappé" ( $M = 1000$  tirage aléatoires avec remise) par la partition de l'ensemble des échantillons en la base de test et la base d'apprentis-

<sup>51</sup> ces procédures sont implémentées dans la SOM Toolbox par les algorithmes `som_supervised` et `som_autolabel`

sage, nous itérons la classification et recalculons les taux d'erreur, avant d'en construire l'histogramme.

#### 4.1.4 Classification non supervisée

Nous avons choisi dans la section précédente une tâche de classification supervisée pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux donnés dans la littérature. Pour montrer que rien ne nous impose de labelliser *a priori* les expériences, nous réalisons ici une classification non supervisée par agglomération hiérarchique. Comme seules les matrices d'information mutuelle ont été concernées par la section précédente, et qu'au long du chapitre 3 d'autres caractéristiques ont été proposées, nous les remplacerons ici par les valeurs absolues des spectres.

## 4.2 Résultats

Dans cette section nous commentons d'abord les mesures des capteurs du robot dans deux cas particuliers pour donner un aperçu du comportement du système. Dans le cas d'un cube poussable puis non poussable, nous visualisons ci-dessous l'élongation des bumpers, la vitesse des roues et la distance entre le robot et un mur immobile, en fonction du temps. Dans un second temps nous commenterons l'allure des matrices d'information mutuelle. Comme l'illustre la Fig.4.3, le contact entre le robot et le cube *non poussable* comporte plusieurs phases :

- $0 < t < 70$  : le robot avance à vitesse constante sur le sol sans rencontrer d'obstacle.
- $70 < t < 450$  : les bumpers sont en contact avec le cube. Les roues continuent de tourner, avec une vitesse inférieure à la vitesse nominale. Le châssis du robot se rapproche du mur.
- $450 < t < 500$  : les bumpers se détendent légèrement, la vitesse des roues devient légèrement négative, le châssis s'éloigne lentement du cube

Comme l'illustre la Fig.4.4, le contact entre le robot et le cube *poussable* comporte plusieurs phases :

- $0 < t < 70$  : le robot avance à vitesse constante sur le sol sans rencontrer d'obstacle.
- $70 < t < 300$  : les bumpers sont en contact avec le cube et sont comprimés. Les roues continuent de tourner à vitesse quasiment constante. Le châssis du robot se rapproche du mur.
- $300 < t < 500$  : les bumpers s'étirent et reviennent à leur position initiale, la vitesse des roues se maintient, le châssis s'approche du mur de manière régulière.

Puis on calcule les matrices d'information mutuelle comme au cours du chapitre 3. Auparavant on se rappelle qu'on dispose de trois groupes de mesures :

- $d_i(t)$ ,  $i \in [1, 5]$  l'élongation des éléments du bumper
- $\omega_j(t)$ ,  $j \in [1, 4]$  les vitesses de rotations des roues

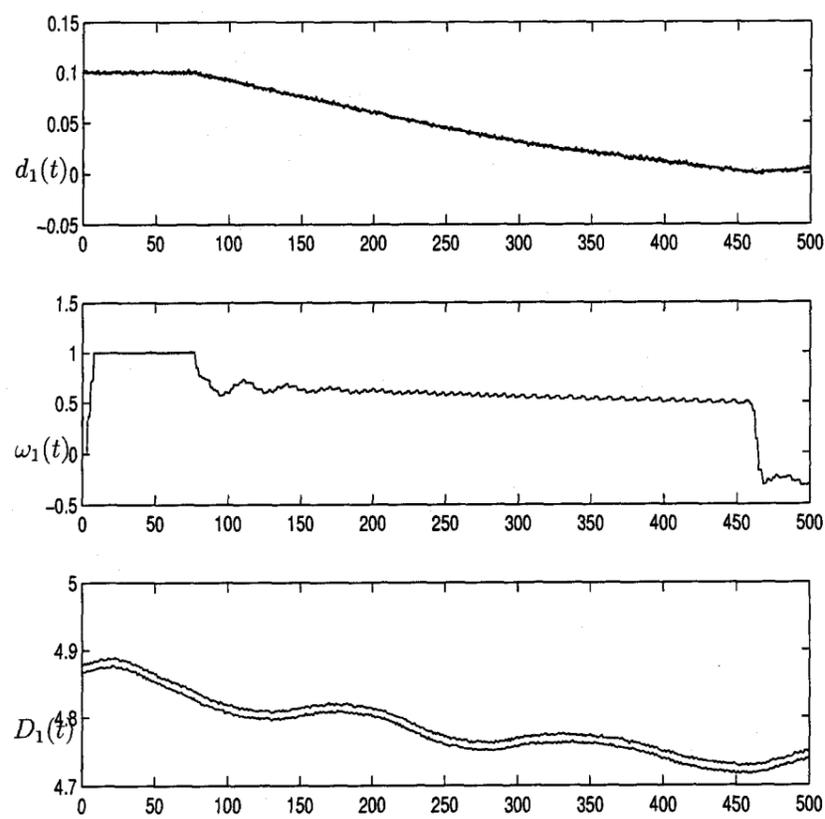


FIG. 4.3 - Données capteurs en fonction du temps. Cas d'un cube non poussable, masse  $m = 15 \text{ kg}$ . (*haut*) élongation  $d_1(t)$  du bumper 1 en fonction de  $t$  (*milieu*) vitesse de rotation  $\omega_1(t)$  de la roue 1 (*bas*) distance  $D_1$  entre le télémètre et le mur.

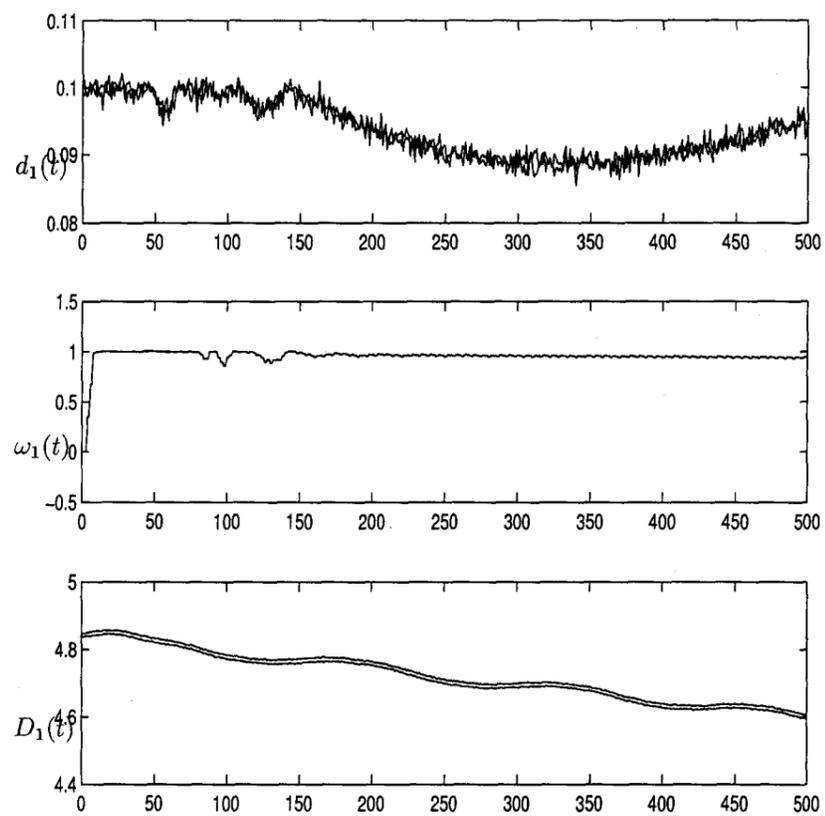


FIG. 4.4 – Données capteurs en fonction du temps. Cas d'un cube poussable, masse  $m = 5 \text{ kg}$ . (haut) élongation  $d_1(t)$  du bumper 1 en fonction de  $t$  (milieu) vitesse de rotation  $\omega_1(t)$  de la roue 1 (bas) distance  $D_1$  entre le télémètre et le mur.

–  $D_k(t)$ ,  $k \in [1, 6]$  les distances entre le télémètre laser monté sur le robot et un mur. Les coefficients  $a_{mn}$  des matrices d'information mutuelle sont donnés par l'information mutuelle  $MI(X_m, X_n)$  où  $X_m$  est remplacé par  $d_i$  si  $m \in [1, 5]$ , par  $\omega_j$  si  $m \in [6, 9]$  et par  $D_k$  si  $m \in [10, 15]$ .

La Fig.4.5 représente alors les matrices d'information mutuelle calculées dans chacune des situations expérimentales (cubes poussables et non poussables). Pour commenter l'allure de ces matrices  $M$  blocs symétriques, nous introduisons la notation suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}$$

où  $A, B, C, D, E, F$  sont des matrices de dimensions différentes. On constate que dans le cas non poussable  $A, C$  et  $F$  ont des composantes de valeurs homogènes et élevées, car deux capteurs d'un même groupe de capteurs fournissent des mesures très dépendantes et car les fluctuations du bruit sont négligeables devant les fluctuations provenant de la dynamique. Cette observation se vérifie uniquement pour  $C$  et  $E$  dans le cas poussable,  $A$  ayant des valeurs faibles. Ceci s'explique d'après la Fig.4.4(haut) qui montre une faible amplitude du mouvement des bumpers, et donc une proportion du bruit plus importante que dans le cas non poussable.

De plus, si on observe les valeurs de  $B$ , on constate qu'elles sont très faibles dans le cas poussable et moyennes dans le cas non poussable. En effet dans le cas poussable, les bumpers sont légèrement comprimés lors de la rencontre avec l'objet, mais sans que la vitesse des roues en soit modifiée (cf Fig.4.4(haut,milieu)). A l'inverse, dans le cas non poussable, la compression des bumpers est associée à un ralentissement par paliers de la vitesse des roues (cf Fig.4.3(haut,milieu)).

En  $D$  on constate que les valeurs sont élevées dans le cas non poussable et faibles dans le cas poussable, car la compression régulière des bumpers est associée à la décroissance de la distance au mur dans le premier cas mais pas dans le second (cf Fig.4.3 et Fig.4.4(haut,bas)).

Notons que les deux expériences ci-dessus sont réalisées pour un cube perpendiculaire à la trajectoire du robot. Dans le cas où les objets ne sont pas des cubes, la matrice a cependant un aspect légèrement différent, comme le montre la comparaison entre les matrices d'information mutuelle obtenues pour un cube et une sphère, Fig. 4.6. Les différences principales concernent ici l'allure des blocs qui ne sont plus homogènes comme dans le cas du cube. Pour la sphère, dont la rencontre avec le robot est représentée en Fig.4.7, les bumpers latéraux sont moins comprimés que les bumpers centraux, ce qui se traduit par une information mutuelle peu élevée entre ces deux types de capteurs, comme on le constate en Fig. 4.6(b).

Dans la suite, on donne les résultats correspondants à la classification supervisée et non supervisée d'objets poussables et non poussables.

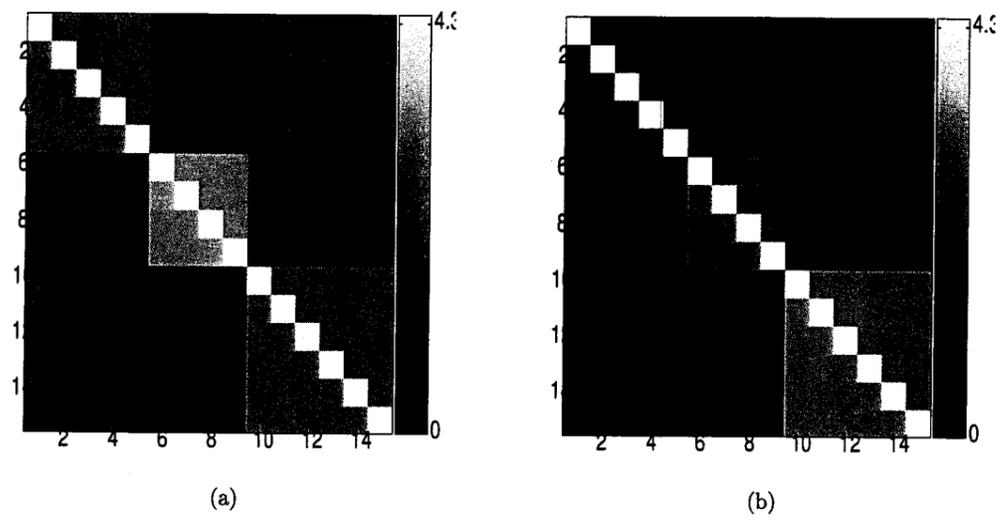


FIG. 4.5 – Matrices d'information mutuelle dans les cas d'un cube (a) non poussable (b) poussable.

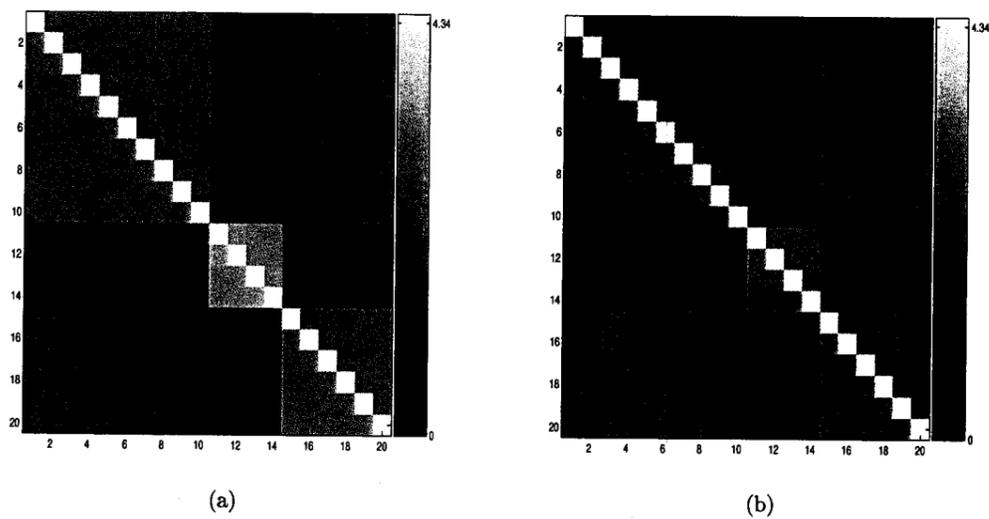


FIG. 4.6 – Matrices d'information mutuelle du robot poussant (a) un cube puis (b) une sphère .

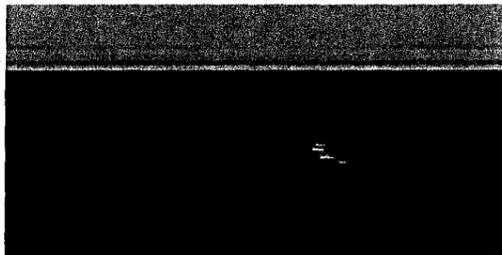


FIG. 4.7 – Robot poussant une sphère.

#### 4.2.1 Classification supervisée

Ici nous comparons d'abord l'erreur lors de la classification supervisée réalisée à partir des matrices d'information mutuelles, et l'erreur obtenue par Ugur et al. dans [12]. Les protocoles ne sont pas similaires mais restent comparables : tout d'abord les travaux précédents concernent la traversabilité, i.e. les objets sont placés dans le demi plan faisant face au robot, à une distance comprise entre 20 et 40 cm. Dans notre cas, les objets sont situés face au robot, avec une distance entre le centre de gravité de l'objet et la direction du robot tirée au hasard selon une loi uniforme dans  $[-10, 10]$  cm, tandis que leur rotation est tirée au hasard dans  $[0, \pi/2]$ .

De plus Ugur et al. étudient l'apprentissage de la relation entre les données d'un télémètre laser 3D et la possibilité de traverser le lieu actuel dans une direction donnée<sup>52</sup>. De notre côté, nous prenons en compte simultanément les mesures de télémètres, de bumpers et de capteurs de vitesse et étudions leur dépendances statistiques.

Pour Ugur et al. le succès et l'échec sont déterminés en comparant la distance effectivement parcourue par le robot et celle qu'il aurait dû parcourir si le lieu était traversable (cf [4, §5.3, p.49-50]). Dans notre cas la poussabilité est vérifiée empiriquement pour chaque type d'objet avant l'apprentissage.

Finalement, Ugur et al. annoncent (cf [12, §V.A]) un taux de succès lors de la prédiction compris entre 93 et 95.1%, soit un taux d'erreur compris entre 4.9 et 7%. De notre côté, comme le montre la figure Fig.4.8(haut), le taux d'erreur que nous obtenons se situe entre 1.5 et 6%, avec une moyenne de 3.3%.

Nous souhaitons également calculer le taux d'erreur obtenu en remplaçant les matrices d'information mutuelle par les vecteurs obtenus après projection des tableaux de données mesurées (cf Fig.4.9). Nous notons, d'après la Fig.4.8(bas), que ce taux est significativement plus bas que le précédent.

<sup>52</sup> "in the learning phase the robot learns a mapping between environmental situations and the results of its actions" [12, §IV.B]

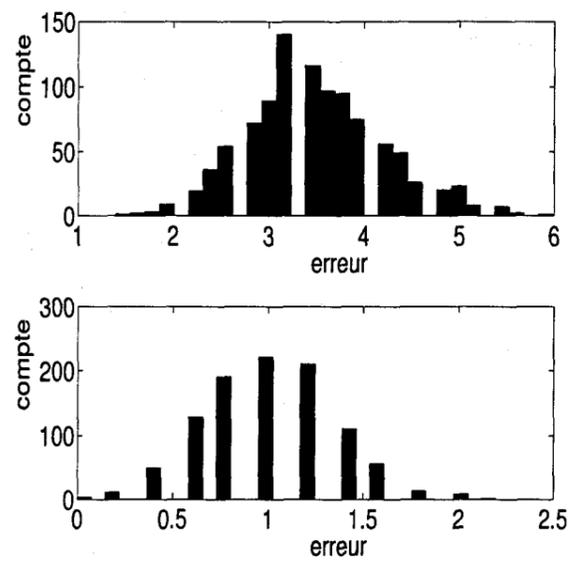


FIG. 4.8 – Histogramme du taux d'erreur exprimé en %. Les vecteurs représentatifs de chaque expérience sont construits d'après (haut) la matrice d'information mutuelle (bas) la projection des tableaux de données mesurées par ACP.

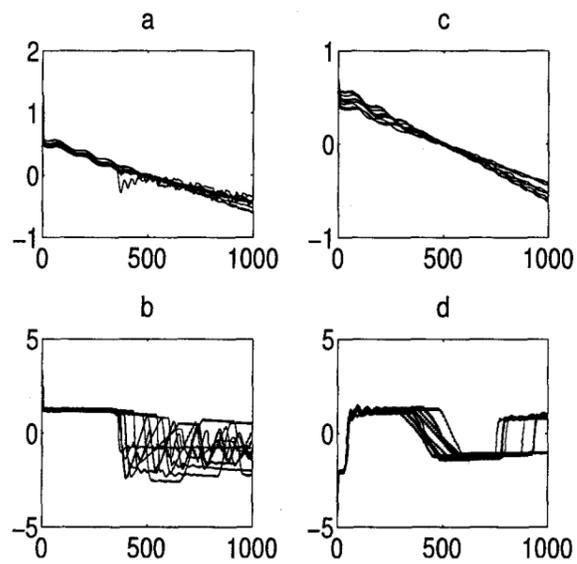


FIG. 4.9 – Projection par ACP en dimension 1 de séries temporelles mesurées brutes. (a) cubes poussables (b) cubes non poussables (c) cylindres poussables (d) cylindres non poussables.

### 4.2.2 Classification non supervisée

La classification supervisée réalisée ci-dessus nous permet de comparer nos résultats à ceux de la littérature. Cependant, la labellisation *a priori* n'est pas nécessaire, ce que nous montrons ici en menant une classification non supervisée par agglomération hiérarchique.

Pour tirer parti des outils étudiés au chapitre 3, nous estimons les valeurs absolues des valeurs propres des matrices d'information mutuelle. La Fig.4.10 représente les valeurs absolues des valeurs propres de rang 5 à 12 du spectre, choisies car elles permettent de distinguer aisément les cas poussable et non poussable, alors que les premières valeurs propres sont trop proches. A l'inverse du travail accompli au cours du chapitre 3, nous ne

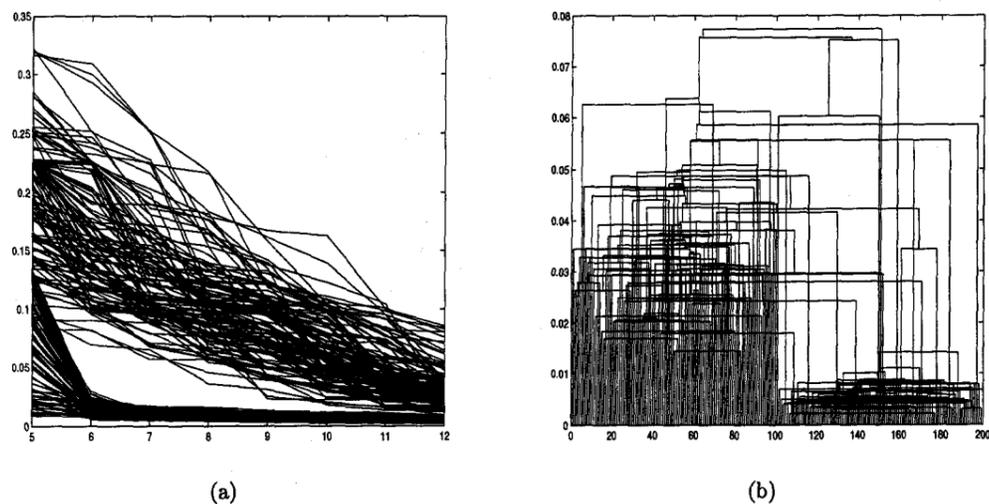


FIG. 4.10 – Spectre partiel (a) et agglomération hiérarchique des spectre (b) pour les deux types d'expériences, sur 100 réalisation de chaque modalité (cubes poussables et non poussables).

sommes pas en mesure ici de modéliser les matrices aléatoires obtenues. Par conséquent, nous ne proposons pas de valeurs théoriques pour la valeur propre de plus grande valeur absolue. L'explication de l'allure du spectre dans son ensemble est également mise de côté ici.

On réalise ensuite une classification par agglomération hiérarchique des vecteurs  $v_i = (\lambda_5^{(i)}, \dots, \lambda_{12}^{(i)})^T$ , comme l'illustre la Fig.4.10(b). Le groupe des individus 100 – 200 est aggloméré rapidement et constitue un groupe homogène du point de vue des distances entre points. Le groupe des individus 0 – 100 est aggloméré pour des distances supérieures aux précédentes, et appartenant à un intervalle de distances plus étalé. Nous constatons que les deux groupes correspondant aux conditions expérimentales (cubes poussables et non poussables) apparaissent clairement.

## 4.3 Discussion et perspectives

### 4.3.1 Discussion

Rappelons que la mobilité d'un robot constitue une condition nécessaire de son autonomie. L'étude de cette mobilité en robotique en s'appuyant sur la psychologie écologique et plus spécifiquement les *affordances* fait actuellement l'objet de recherches actives.

Les formalismes de transposition existants ont été présentés au cours du chapitre 1. Il apparaît que l'inférence statistique joue un rôle important, mais que les mesures de dépendances et les structures de représentation de ces dépendances peuvent être améliorées.

Nous avons proposé dans ce chapitre de mettre à profit les outils tirés de la théorie de l'information, de la théorie des matrices aléatoires et des graphes aléatoires -déjà utilisés en robotique- pour enrichir les descriptions statistiques employées jusqu'ici pour encoder les *affordances* accessibles à un robot.

Nous avons montré l'efficacité de ces outils -notamment les matrices d'information mutuelle et les spectres de ces matrices en valeur absolue- à l'aide de plusieurs tâches. La première consiste en la classification supervisée de plusieurs types d'objets poussables et non poussables, pour laquelle nous avons trouvé des taux d'erreur moyens de 3.3%. Nous avons confronté ce résultat avec ceux disponibles dans la littérature pour des protocoles comparables, et avec le cas où les tableaux de mesures sont caractérisés numériquement par une projection linéaire. La seconde tâche est une classification non supervisée, qui permet de séparer efficacement des conditions expérimentales distinctes.

Les limites qui apparaissent sont notamment l'absence de résultats sur un robot réel. De plus, le nombre restreint de capteurs et d'effecteurs pour ces expériences ne permet pas d'exploiter tous les outils évoqués au chapitre 3 qui nécessitent des réseaux de grande taille pour prendre leur sens.

### 4.3.2 Perspectives

Du point de vue applicatif, en se tournant vers la littérature on constate que l'apprentissage des *affordances* permet de réaliser des tâches telles que la planification de trajectoire [6], ou la navigation au hasard dans un environnement [12]. En mettant de côté l'objection selon laquelle l'imposition d'un but va à l'encontre de l'autonomie réelle du robot, il nous semble plus cohérent avec les principes de psychologie écologiste de se passer d'une représentation interne des propriétés géométriques du monde extérieur. En nous appuyant sur les résultats vus ici, nous implémenterons dans un second temps un algorithme de déplacement selon une direction fixe dans un environnement encombré de nombreux obstacles. Nous privilégierons des algorithmes semi-supervisés munis d'un retour pauvre, tels que l'apprentissage par renforcement. La question de la construction des états internes pour un tel algorithme sera réexaminée à l'aide des outils de description des dépendances statistiques entre capteurs et effecteurs illustrés ici, et nous paraît une

piste de recherche prometteuse.

## Bibliographie

- [1] M. Anitescu and F. Potra. Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problems. *Nonlinear Dynamics*, 14 :231-247, 1997.
- [2] D. Baraff. Physically based modeling : Principles and practice. lectures notes slides from the siggraph '97 course, 1997. <http://www.cs.cmu.edu/~baraff/sigcourse/index.html>.
- [3] E. Şahin, M. Cakmak, M.R. Dogar, E. Ugur, and G. Ucoluk. To afford or not to afford : A new formalization of affordances towards affordance-based robot control. *Adaptive Behavior*, in press, pages –, 2007.
- [4] Ugur E. Direct perception of traversability affordance on range images through learning on a mobile robot. Master's thesis, Middle East Technical University, Sept. 2006.
- [5] P. Fitzpatrick, G. Metta, L. Natale, S. Rao, and G. Sandini. Learning about objects through action : Initial steps towards artificial cognition. In *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'03)*, 2003.
- [6] D. Kim, J. Sun, S.M. Oh, J.M. Rehg, and A.F. Bobick. Traversability classification using unsupervised on-line visual learning for outdoor navigation. In *Proceedings of IEEE 2006 International Conference on Robotics and Automation*, Orlando, Florida, 2006.
- [7] T. Kohonen. *Self-Organizing Maps. Third, extended edition*. Springer, 2001.
- [8] Open Dynamics Engine Project. Ode 0.5 user manual, 2006. <http://www.ode.org/ode-latest-userguide.html>.
- [9] Player/Stage/Gazebo Project. Gazebo 0.7 user manual, 2007. <http://playerstage.sourceforge.net>.
- [10] G. Saporta. *Probabilités, Analyse de Données et Statistiques*. Technip, 2<sup>nd</sup> edition, 2006.
- [11] D.E. Stewart and J. Trinkle. An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and coulomb friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :2673-2691, 1996.
- [12] Emre Ugur, Mehmet R. Dogar, Maya Cakmak, and Erol Sahin. The learning and use of traversability affordance using range images on a mobile robot. In *Proceedings of IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation (ICRA 07)*, April 2007.
- [13] R.T. Vaughan, B. Gerkey, and A. Howard. On device abstractions for portable, reusable robot code. In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on*

### *Bibliographie*

---

*Intelligent Robot Systems (IROS 2003)*, pages 2121–2427, Las Vegas, USA, October 2003.

- [14] C. Ye and J. Borenstein. Characterization of a 2-d laser scanner for mobile robot obstacle negotiation. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2512–2518, Washington DC, USA, May 2002.

### **Sources en libre accès**

- projet Player/Stage/Gazebo <http://playerstage.sourceforge.net>
- simulateur d'interactions mécaniques ODE <http://www.ode.org>
- SOM Toolbox <http://www.cis.hut.fi/projects/somtoolbox>

## Chapitre 5

# Approches multiéchelles pour l'autonomie en robotique

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Défaut d'adaptativité : propositions d'explications</b>	<b>149</b>
5.1.1	Schémas et adaptativité	150
5.1.2	Extrémalité	152
5.1.3	Discussion	154
<b>5.2</b>	<b>Le cas du coeur en Biologie Systémique</b>	<b>154</b>
<b>5.3</b>	<b>Méthodes mathématiques multiéchelles</b>	<b>157</b>
5.3.1	Agrégation	158
5.3.2	Méthode des échelles multiples	159
5.3.3	Discussion	159
<b>5.4</b>	<b>Discussion et perspectives</b>	<b>160</b>
5.4.1	Perspectives	161
	<b>Bibliographie</b>	<b>162</b>

---

Du point de vue des concepteur de robots<sup>53</sup> aussi bien que des instances de pilotage de la recherche, les capacités d'adaptation des robots modernes sont limitées<sup>54</sup>. Ces capacités sont parfois désignées par le terme *autonomie*, comme nous l'avons mentionné en introduction et le rappelons ici :

- « Autonomy : How can robotic systems achieve goals in a largely unsupervised way? How general can these goals be? How should they be set? How proactive can or should robotic systems be? Are there "degrees of autonomy"? What are the limits of autonomy? »

---

<sup>53</sup> cf E.Rome, déjà cité en §2.3

<sup>54</sup> « Established engineering approaches to solving common problems in robotics (for example motion planning, navigation, obstacle avoidance), while undoubtedly yielding improvements, may only converge to solutions that are for instance not as amenable to adaptation or generalization as one might wish » [12, p.3]

- Rich sensory-motor skills : How can a robot acquire the sensory-motor skills needed to move and operate safely and robustly in difficult outdoor terrains or domestic and other indoor environments? What can be learned from solutions implemented in animals? »[12, p.4]

Cette définition n'est pas exempte d'ambiguïté comme on le constate dans le même document :

« Here, autonomy is to be understood in its technical sense as "independence of external control". Clearly, the ultimate responsibility for technical systems such as robots, is with their designers and/or users »[12, p.4]

Cette *autonomie* serait donc constituée à la fois par l'indépendance d'un contrôle externe, et par la soumission au concepteur, en dernier recours.

Une autre définition des capacités d'adaptation nous est proposée dans le cadre de la *morphogenèse*, comprise -en paraphrasant Bourguin et Lesne [9]- comme « l'ensemble des mécanismes expliquant l'apparition reproductible de structures et contrôlant leur forme ». Pour ces chercheurs, la *robustesse* des formes vivantes se comprend comme une résistance aux perturbations du milieu, et ceci de trois manières :

- « une modification de la forme due à l'influence des nouvelles conditions extérieures sur les mécanismes morphogénétiques endogènes (supposés inchangés) (...)
- une modification des mécanismes (en particulier leur composante génétique) en réponse aux changements extérieurs pour préserver les caractéristiques fonctionnelles de la forme (...)
- dans les systèmes physiques complexes (par exemple les dunes) ou les systèmes vivants, on observe enfin un troisième type de réponse, multi-échelles et impliquant les propriétés émergentes du système, en leur donnant une puissance causale : la réponse est ici une modification *conjointe* des mécanismes et de la forme qui en résulte (...) on parlera d'*adaptabilité* »[9, p.24-25]

Le dernier cas nous inspire plusieurs commentaires : tout d'abord l'adaptation se comprend ici à différents niveaux simultanément, à différentes échelles de temps et d'espace. Ceci diffère des conceptions plus classiques de l'adaptation, empruntées par exemple à la cybernétique, telles que l'homéostat d'Ashby destiné à illustrer l'ultrastabilité [4]. Par ailleurs, nous remarquons que cette définition place les systèmes complexes inertes sur le même plan que les systèmes vivants, ce qui justifie l'emploi des méthodes de la Physique pour leur étude. Enfin, du point de vue logique, la dernière définition ne constitue pas une condition nécessaire d'adaptation, mais spécifie un cas particulier rencontré dans une classe de systèmes.

Bien entendu, le sujet d'étude de la morphogenèse et les problèmes d'autonomie pour un robot ne se superposent pas, car à l'échelle de temps caractéristique de la "vie" d'un robot, sa forme globale varie très peu dans le cas général. Bien que l'adaptativité au sens de la morphogenèse soit incompatible avec le contexte de l'adaptation sensorimotrice, nous nous demandons si cette dernière ne devrait pas mettre en jeu des mécanismes multiéchelles similaires.

Nous souhaitons éprouver l'hypothèse selon laquelle les propriétés des animaux retenues par les concepteurs de robots n'incluent pas les propriétés particulières qui fondent réellement leurs capacités d'adaptation, notamment les relations de dépendance entre les différentes échelles.

Nous considérons ce chapitre comme un travail préliminaire d'élaboration du corpus et de l'argumentaire nécessaire pour mener à bien ce projet de recherche au delà du travail de thèse. Pour cela au cours de ce chapitre nous examinerons dans un premier temps deux champs de recherche consacrés à la prise en compte des dépendances multiéchelles en robotique (§5.1). Puis nous discuterons de l'apport éventuel d'autres disciplines telles que la biologie systémique à travers l'exemple du coeur (§5.2). Enfin nous esquisserons un rapide panorama de méthodes et concepts tirés des mathématiques multiéchelles (§5.3).

## 5.1 Défaut d'adaptativité : propositions d'explications

Dans cette partie nous proposons plusieurs explications au défaut d'adaptativité évoqué en introduction. En guise d'introduction nous comparons les échelles pertinentes de description des phénomènes biologiques d'une part, et des robots autonomes conventionnels d'autre part. Ensuite nous décrivons brièvement les méthodes de recherche dans deux champs, le premier dédié à la théorie des schémas déjà rencontré plus haut, et le second voué aux principes d'extrémalité.

Dans la plupart des sciences exactes, plusieurs niveaux de description des phénomènes du monde extérieur sont disponibles en fonction d'une échelle caractéristique de temps et d'espace que se donne l'expérimentateur. Par exemple, en biologie, les échelles associées sont par taille croissante celles des molécules (1 nm) et protéines, des réseaux de signalisation, des organites (1  $\mu\text{m}$ ), puis des cellules (10-100  $\mu\text{m}$ ) et des tissus et organes (quelques cms) composés par ces cellules. Viennent ensuite les organismes (m) qui forment des populations dont sont composées les espèces qui peuplent des écosystèmes.

Webb recense plusieurs niveaux en modélisation biorobotique (cf [37, §3.2]) : la transduction entre signaux hétérogènes opérée par les capteurs, les parties rigides et effecteurs, et le système de contrôle central. Cette première distinction, d'ordre plutôt fonctionnel, ne laisse pas apparaître les grandeurs caractéristiques de ces différentes classes que nous détaillons ci-dessous, en nous permettant de vérifier l'idée écologique de compatibilité entre les grandeurs caractéristiques de l'environnement et celles du corps et des organes sensoriels :

- l'échelle des signaux physiques soumis à une transduction par les capteurs. La dimension caractéristique d'un capteur est proche de celle de la longueur d'onde de la vibration à laquelle il est sensible. Ainsi les capteurs sensibles à la lumière visible ( $\lambda$  entre 400 et 700 nm) sont composés de matrices de photosites de quelques  $\mu\text{m}$  de large chacun. De même les microphones ont une taille de l'ordre du cm, alors que les ondes sonores audibles par l'être humain ont une longueur d'onde comprise

entre quelques centimètres à quelques dizaines de mètres.

- le niveau des circuits électriques constituant le système de commande (de quelques centimètres pour les circuits imprimés jusqu'à la taille de gravure sur waffer de  $0.25 \mu\text{m}$  pour un processeur pentium P2.
- les effecteurs et éléments rigides du corps des robots usuels ont une taille comprise entre quelques centimètres et un mètre. Un robot, qui occupe généralement un espace clos de quelques mètres de large, parsemé d'obstacles de quelques dizaines de centimètres de large

Clarifions au passage un point spécifique de l'argumentation de Webb, qui distingue plusieurs "niveaux" possibles pour le système de commande [37] :

- modèles de haut niveau des fonctions du cerveau.
- circuit neuronal, connectivité inter-neurones, [38].
- structure de l'arbre dendritique des neurones individuels [8].

Il ne s'agit néanmoins pas des niveaux d'implémentation physique du robot, mais des niveaux de détail du modèle tiré de l'étude de l'animal. A partir de ce modèle, les chercheurs conçoivent un algorithme à implémenter sur un robot conventionnel, par exemple de type Khepera (aussi bien dans [38] que dans [8]), dont les échelles caractéristiques sont celles évoquées plus haut. Les niveaux significatifs sont moins nombreux en robotique qu'en biologie. De manière notable, ils ne forment pas un continuum recouvrant l'ensemble des échelles impliquées mais échantillonnent irrégulièrement cet intervalle<sup>55</sup>.

Cette introduction éclaire la position des systèmes robotiques par rapport aux systèmes biologiques, et prépare l'examen de deux champs de recherche illustrant les rapports entre ces différentes échelles. La partie §5.1.1 concerne la théorie des schémas qui occupe une position intermédiaire entre études comportementales, analyses neuroanatomiques et neurophysiologiques d'un côté et robotique de l'autre. La partie §5.1.2 critique l'emploi des principes d'extrémalité en robotique et neuromécanique.

### 5.1.1 Schémas et adaptativité

Dans la lignée des travaux mentionnés au chapitre 2, Corbacho et al. [13] étudient les synergies motrices multiples chez le crapaud et proposent un modèle de sélection de commande motrice et de coordination. Pour cela, ils prennent la cellule neuronale comme élément de base et admettent que tous les niveaux d'organisation d'un neurone devraient idéalement être considérés, depuis les molécules jusqu'aux synapses, en se référant par exemple aux travaux de Grillner [19]. Dans les faits, ils se plient cependant à un principe d'économie au nom duquel seuls seront retenus pour leur modèle les éléments prédominants. Le fait que les constituants retenus exercent un rôle prédominant n'est cependant pas garanti.

---

<sup>55</sup> Webb fait un constat semblable « levels in biology are relatively close in spatio-temporal scale, as contrasted with macro and micro levels in physics » [37, p.1041]

On retrouve en effet dans la théorie des schémas d'Arbib [2] deux niveaux : celui des comportements et celui des circuits neuronaux, en excluant les autres mécanismes responsables de l'activité d'un organisme. Au niveau éthologique des comportements nous nous rappelons que trois types de schémas permettent de modéliser cette activité :

- i) les schémas moteurs sont des séquences motrices prototypiques spécifiant un type d'interaction avec l'environnement.
- ii) Les schémas perceptifs permettent de reconnaître les possibilités d'interaction.
- iii) les assemblages (*coordinated control programs*) sont des mélanges de schémas perceptifs et moteurs qui, en présence de l'environnement et étant donnée une tâche à accomplir, permettent de produire des comportements plus complexes que les schémas moteurs de base.

Le langage ASL (*Abstract Schema Language*) offre une expression simple à ces objets conceptuels en permettant de les encoder sous forme de processus concurrents. Chaque schéma se décompose récursivement d'un ensemble de schémas munis d'interfaces d'entrée/sortie, et réalisant un calcul.

En posant que les propriétés du système sensorimoteur sont identiques à celles du langage (computationnel, hiérarchique, distribué et concurrent), ce dernier permet d'encoder les observations expérimentales sous forme de programmes et de résoudre certains conflits. Par exemple le postulat d'absence de contrôle central de l'activité sensorimotrice n'est pas contredit par les propriétés du langage qui la modélise.

Arbib et al. ancrent les schémas comportementaux dans des circuits neuronaux sous-jacents via un niveau intermédiaire. En effet, les *schémas neuronaux*, situés entre ces deux niveaux (cf [13, §4]) constituent des unités fonctionnelles et pas structurelles (i.e. décrite en termes neuroanatomiques et neurophysiologiques) qui peuvent être distribuées dans plusieurs zones cérébrales. A l'inverse une même zone cérébrale peut être impliquée dans plusieurs schémas. Les schémas neuronaux relient donc différents groupes de neurones et, comme les schémas comportementaux, ont une structure hiérarchique. Ils peuvent être lus à plusieurs niveaux en fonction du niveau de détail souhaité (e.g. concentrations ioniques dans le neurone ou potentiel membranaire) et du niveau de détail disponible. De manière notable, les chercheurs de ce groupe admettent néanmoins que les modèles produits ne rendent compte que partiellement des mécanismes du comportement, et constituent en fait des modèles minimaux ne contredisant pas les données disponibles<sup>56</sup>.

Comme pour le niveau comportemental, les auteurs développent un langage de programmation (NSL, *Neural Simulation Language*) pour la modélisation puis la simulation d'architectures neurales, fondé sur un type particulier d'automates (*port automaton*),

---

<sup>56</sup> « In anurans, it is clear from behavioral studies that visual information about the target and proprioceptive information about the animal's starting position interact in feedforward control of prey capture. However, it is unclear where and how these sensory modalities interact in the brain (...) our model tries to find the simplest neural architecture in the reticular formation that can explain the interactions between vision and proprioception in control of prey capture » [13, §5]

[40, 28]. Un des enjeux principaux, une fois modélisés les processus comportementaux sous cette forme, est de comprendre comment -sans contrôle centralisé- les agents concurrents peuvent mener des calculs de manière coopérative afin d'obtenir un résultat intégré conforme aux spécifications de la tâche à exécuter (cf [10, p.18]), ce qui constitue en soi un champ de recherche autonome en informatique. Ce langage<sup>57</sup> permet alors de piloter des robots [39, 3].

Nous revenons après ce nécessaire détour à la notion d'*adaptativité* au centre de ce chapitre. L'intérêt de la formalisation à l'aide des schémas, implémentée par les langages ASL et NSL sous forme de processus concurrents et distribués, est de reproduire l'adaptativité du comportement observé dans l'organisme vivant. Ceci pour deux raisons :

- i) l'activité des schémas est d'abord un processus dynamique de compétition et de coopération, sans intervention d'un contrôle central.
- ii) l'ensemble des schémas existants au cours de l'existence d'un agent peut être adapté (Schema-Based Learning<sup>58</sup>) en ajoutant des règles supplémentaires que nous ne détaillons pas ici.

Pour résumer, nous remarquons d'abord en paraphrasant Arbib que la "théorie des schémas" peut s'interpréter comme un langage descriptif et comme une théorie<sup>59</sup>. Ce langage a l'avantage de prendre en compte plusieurs échelles phénoménologiques, et de tenter de les relier. Toutefois, comme nous l'avons vu plus haut, les modèles proposés sont minimaux au sens où ils isolent des circuits neuronaux susceptibles de reproduire -en négligeant le reste du cerveau- les comportements observés chez l'animal dans des conditions expérimentales particulières. Par ailleurs, la modélisation sous forme de processus concurrents substitue à un mécanisme en partie inconnu un autre mécanisme dont le fonctionnement n'est pas connu avec précision et faisant toujours l'objet de recherches intenses.

### 5.1.2 Extrémalité

Les principes d'extrémalité sont présents dans tous les domaines de la Physique, depuis le principe de moindre action en mécanique, le principe du plus court chemin en optique, le principe d'extrémalité de l'entropie en thermodynamique à l'équilibre, jusqu'aux développements de la mécanique quantique et de la relativité au cours du XXème siècle [6].

---

<sup>57</sup> plus précisément il s'agit du langage MissionLab développé par Arkin, fondé également sur la théorie des schémas.

<sup>58</sup> « Our schemas, and their connections within the schema network, change. In a general setting, there is no fixed repertoire of basic schemas. Rather, new schemas may be formed as assemblages of old schemas; but once formed a schema may be tuned by some adaptive mechanism » [2, p.161]; cf aussi [14]

<sup>59</sup> « There are two facets to schema theory, as a language and as a theory of intelligent behavior. In, for example, RS and the VISIONS schema system, we see the beginnings of a language for distributed systems (...) Yet when we discuss brain models and advocate a class of designs for AI systems that is inspired by them, we see the other facet of schema theory, a model of intelligence, which uses schema theory qua language for expressing such models » [1]

De nombreux scientifiques, procédant par analogie, ont recherché dans les organismes vivants qu'ils étudiaient l'expression de principes variationnels. Des résultats de portée aussi générale qu'en Physique restent pourtant hors d'atteinte à l'heure actuelle [35].

Cette tendance se retrouve naturellement en robotique, mêlée par exemple à des problèmes d'apprentissage comme dans le cas de la robotique évolutionnaire. Lorsqu'elle définit la *modélisation biorobotique*, Webb (cf [37, §2.4] ) désigne l'usage de robots non simulés voués à l'explication du comportement d'un organisme vivant dans son environnement. Elle prend alors la précaution d'exclure de la classe des travaux de biorobotique la plupart des articles impliquant un mécanisme apprentissage, exceptés ceux précisément reliés à des mécanismes physiologiques ou à des observations comportementales<sup>60</sup>. Nous prétendons que cette critique est valable lorsque des principes d'extrémalité, quoique chers aux ingénieurs, sont invoqués sans justification biologique. Elle s'applique selon nous à de très nombreux travaux en robotique autonome, tels que ceux de Beer, Nolfi, Floreano et Mondada [7, 33], ou de l'école du Sussex menée par Cliff, Husbands et Harvey [20] qui s'appuient sur les algorithmes évolutionnaires. En effet, à la recherche des mécanismes causaux qui produisent les comportements des animaux lors de leur exploration de l'environnement, ou lors de rencontres entre proies et prédateurs se substitue l'optimisation de la valeur d'une fonction de coût (*cost function*) tenue pour plausible, ou d'un système d'attribution de récompense (*value system*) semblables à ceux trouvés en apprentissage semi-supervisé (cf §2.4.1.3). D'autres travaux font intervenir quant à eux la "motivation" ou la "curiosité" (cf [15, 16]). Le point commun de ces travaux est la substitution d'une contrainte macroscopique permettant de guider le comportement des robots à un ensemble de contraintes provenant de niveaux différents, sans justification rigoureuse. A l'inverse, pour justifier ces contraintes, les travaux de modélisation biorobotique se préoccupent de quantifier des influences des différents niveaux sur le niveau macroscopique, telles que celle des activités des neurones pris individuellement.

Toutefois le fait de prendre en compte plusieurs échelles ne justifie pas pour autant l'imposition de principes d'extrémalité. Pour reprendre l'exemple de la neuromécanique, où les rapports entre différentes échelle fondent en partie l'analyse comme on l'a vu au chapitre 2, Holmes et collègues remarquent que :

« However, we are wary of the optimality framework, commonly employed in engineering as a foundation for the prescription of natural or synthetic motion control, in part because it transfers the locus of parameter tuning from plant loop parameters to the cost function, which largely determines the quality of the resulting solution. Similarly, in biology, cost function details can significantly modify the resulting solutions, potentially shifting the phenomenology of describing the task to that of choosing the right cost function » [22, p.26]

La critique formulée en robotique évolutionnaire prévaut donc également en neuromé-

<sup>60</sup> « Probably the largest set of borderline cases thus excluded is the use of various learning mechanisms for robot behaviour, except those specifically linked to animal behavioural or physiological studies », [37, p.1037]

canique, et l'importation d'un principe d'extrémalité ne saurait dans le cas général se substituer à l'analyse du régime produit par les interactions entre les différents niveaux phénoménologiques.

### 5.1.3 Discussion

Au cours de cette partie nous avons comparé la gamme d'échelles de descriptions nécessaires à la compréhension d'un système biologique et d'un système robotique. Les niveaux pertinents sont moins nombreux en robotique qu'en biologie, d'autre part ils échantillonnaient cet intervalle de manière moins dense qu'en biologie. Les systèmes impliqués sont non seulement situés à des échelles différentes mais aussi hétérogènes (e.g. mécanique et électrique). Nous avons décrit en §5.1.1 les méthodes d'étude regroupées autour de la théorie des schémas. Ce formalisme prend en considération des phénomènes physiques hétérogènes et situés à des échelles de longueur et de temps différentes. D'autre part nous critiquons l'identification des mécanismes neuroanatomiques et neurophysiologiques à un type d'automate (*port automata*) qui ne permet pas d'expliquer l'activité globale du schéma.

En §5.1.2 nous avons souligné la prévalence des principes d'extrémalité en Physique, mais rappelons qu'en Biologie leur utilité fait toujours l'objet de recherches. L'usage de tels principes en robotique pose également de nombreuses questions, aussi bien au niveau macroscopique de la robotique évolutionnaire qu'en neuromécanique.

Dans la partie suivante, nous discutons de l'apport de techniques d'analyse multiéchelles en Biologie Systémique.

## 5.2 Le cas du coeur en Biologie Systémique

Dans le champ de la Biologie Systémique [23], un groupe important de travaux est consacré au coeur. Denis Noble appartient à cette communauté et y dédie ses travaux depuis les années 60, à la suite des travaux de Hodgkin et Huxley qui relièrent au début des années 50 l'activité des canaux ioniques dans les neurones et le potentiel membranaire de ces cellules. Une part significative de ses études concerne l'élaboration d'un modèle des mécanismes du comportement de la cellule cardiaque, en s'inspirant de celui du neurone. Mais ce qui retient notre attention ici est surtout l'objectif à long-terme de "reconstruire" le coeur, depuis les gènes jusqu'à l'organe entier.

Pour cela, Noble rappelle que l'activité d'un organe aussi complexe dépend de nombreuses interactions à plusieurs échelles, comme l'illustre schématiquement la Fig. 5.1. Le principe mis en évidence par Hodgkin et Huxley est l'examen simultané de deux niveaux d'étude, celui des canaux ioniques et celui du potentiel électrique de la membrane, qui a permis de comprendre les mécanismes de propagation des potentiels d'action et d'en tirer une formalisation mathématique. En s'appuyant sur ces exemples, les scientifiques envi-

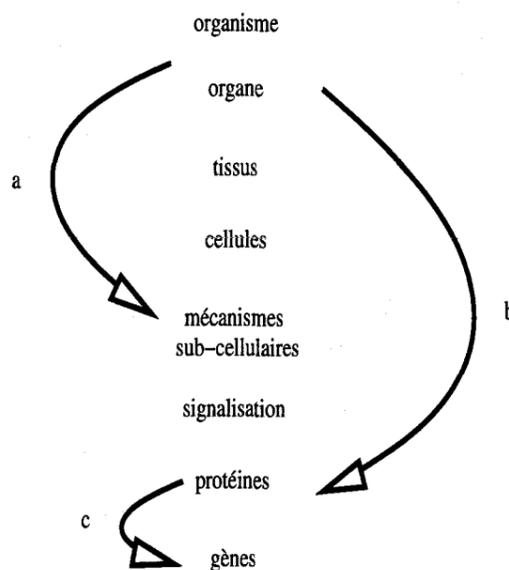


FIG. 5.1 – Schéma de la causalité descendante, d'après [31]. (a) Déclenchement de la signalisation cellulaire (b) contrôle de l'expression des gènes (c) lecture des gènes

sagent plusieurs méthodes pour modéliser l'ensemble des mécanismes ayant une influence quantifiable sur l'activité d'ensemble du coeur.

La première, qualifiée de *bottom-up*, part de la modélisation des gènes à partir desquels sera déduite celle des protéines, et ainsi de suite en remontant d'un niveau à l'autre. Cette approche est mise de côté pour plusieurs raisons : le coût prohibitif en temps de calcul, et la structure organisée des systèmes étudiés, distincte d'une juxtaposition aléatoire de molécules. Il faut donc en tenir compte dans la modélisation, en admettant que cette organisation est le produit d'un processus de croissance et d'évolution de l'espèce, mis de côté a priori.

La seconde, qualifiée de *middle-out*, considère simultanément le point de vue bottom-up et l'influence des niveaux d'organisation supérieurs sur les niveaux inférieurs –nommée causalité descendante (*downward causation*). Pour cela, il est nécessaire de choisir un niveau de départ où de nombreuses mesures expérimentales et modèles sont disponibles, avant de le relier aux autres niveaux. Dans le cas du coeur, Noble et al. [31] prennent pour pivot le niveau de la cellule cardiaque, objet des attentions des chercheurs depuis plus de quarante ans.

S'ajoute à la nécessité de relier les différents niveaux celle du couplage de phénomènes physiques hétérogènes, appartenant à des domaines distincts de la Physique tels que la mécanique et les équations de propagation d'une onde électrique. Sans dépendre ni l'ensemble des modèles disponibles à chaque niveau pris à part (cf [24, 30, 32] pour un

historique des modèles cellulaires), ni l'ensemble des liens entre ces niveaux, nous donnons quelques illustrations de modèles hétérogènes multiéchelles produits par les recherches de cette communauté.

Le premier exemple provient de l'analyse du noeud sino-atrial (*sino-atrial node*), un ensemble de neurones situé dans l'oreillette (*atrium*) qui produit périodiquement une excitation électrique et provoque les contractions des cellules des muscles cardiaques. Le modèle reproduit les mécanismes des protéines-canal qui s'ouvrent en fonction de la polarisation de la membrane, et contribuent ainsi à la polarisation de cette même membrane. Normalement, le potentiel membranaire ainsi que l'ouverture des canaux potassium et calcium oscillent à une fréquence constante. Noble montre (cf [31, §3]) que si le potentiel membranaire est maintenu fixé artificiellement, alors les oscillations des ouvertures des canaux cessent. Ces simulations montrent que le phénomène du niveau le plus élevé rétroagit sur le phénomène de niveau inférieur, ce qui se vérifie expérimentalement.

Le second exemple illustre au contraire une influence causale remontant d'un niveau fin vers un niveau plus élevé. Le cas considéré (cf [29, 31]) est celui d'une mutation au niveau du génome ayant pour conséquence la suppression de trois acides aminés. Les simulations montrent que celle-ci entraîne l'inactivation d'un type de canal ionique qui se traduit par la persistance d'un courant de sodium entrant pendant le déclenchement du potentiel d'action chez la cellule mutante. La repolarisation se prolonge et peut entraîner des arythmies au niveau de l'organe. Ces prédictions du modèle sont compatibles avec l'observation d'épisodes d'arythmies chez les patients porteurs du gène mutant. Par ailleurs elles mettent en évidence comme annoncé l'influence ascendante entre niveaux.

Le dernier exemple illustre un mélange de causalité montante et descendante, avec la modélisation de tissus du coeur à partir des modèles des cellules élémentaires. De très nombreux modèles se sont succédés (cf [24, p.588-594]), prenant en compte d'abord l'excitation électrique des cellules du tissu 2D sans faire intervenir les contraintes mécaniques. Pour cela, sur une grille homogène sont interconnectées des milliers de modèles de cellules de types différents par l'intermédiaire de jonctions communicantes (*gap junction*). Néanmoins, malgré une excitation sino-atriale, les chercheurs ne parviennent pas à reproduire une vague d'excitation des cellules musculaires. Ce type de topologie du réseau ne correspond pas en effet à celle présente dans le coeur vivant. Pour pallier cette inexactitude, les chercheurs proposent alors de modéliser l'interpénétration de tissus de différents types décrite du point de vue anatomique. Dans ces conditions, le voisinage des cellules à la frontière des tissus est modifié et permet désormais la propagation d'une vague d'excitation. Ceci illustre une nouvelle fois l'importance de la causalité descendante, manifestée ici par l'anatomie du tissu.

Le modèle de propagation ci-dessus est étendu par degrés successifs pour prendre en compte d'abord le mélange de phénomènes physiques hétérogènes tels que l'excitation électrique et la contraction mécanique des cellules. Les extensions touchent ensuite la géométrie (passage de 2D à 3D, reproduction de l'anatomie du coeur), mais aussi le choix

d'un modèle ionique pour les cellules. L'influence de la circulation coronaire est introduite, ainsi que celles des autres organes du torse, jusqu'à la reproduction du champ électrique total et la simulation de l'électrocardiogramme.

### 5.3 Méthodes mathématiques multiéchelles

Nous avons déjà évoqué brièvement au chapitre 2 le cas des modèles neuromécaniques qui reposent sur des approches multiéchelles, notamment pour formaliser le comportement des CPG (*central pattern generator*) à partir des équations de Hodgkin-Huxley. La section §5.2 montre un autre exemple biologique de la nécessité d'une telle approche. Nous nous sommes dispensés dans ces deux cas d'accorder trop d'importance aux fondements mathématiques de ces méthodes pour mettre en avant les principes plutôt que leur formalisation, et pour faciliter la lecture.

L'esprit de ce chapitre étant de jeter les bases d'une étude concrète des mécanismes de l'adaptation multiéchelles pour la robotique, il nous semble approprié d'accorder une partie aux principes mathématiques sur lesquels nous nous appuyerons. Notre connaissance des outils d'analyse multiéchelle reste à l'heure actuelle très parcellaire, de plus les corpus mobilisés proviennent de l'analyse, de l'analyse numérique, de la physique et de la programmation. Pour ces raisons nous nous contenterons de donner quelques exemples de raisonnement de base, en puisant dans [26, 25].

Les problèmes multiéchelles sont souvent ramenés à des systèmes du type suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{équation de l'échelle macroscopique} \\ \text{expression d'une ou plusieurs variables macroscopiques} \\ \quad \text{en fonction de variables microscopiques} \\ \text{équation de l'échelle microscopique} \end{array} \right.$$

Les équations obtenues peuvent être de types distincts, et de plus découler de modèles physiques différents. Dans le cas général, on ne connaît pas d'expression analytique de la solution d'un tel système, et l'existence de plusieurs échelles compliquent singulièrement les approches numériques.

La théorie des perturbations est une méthode mathématique destinée à exprimer la solution approchée d'une équation ( $E_\epsilon$ ) dépendant d'un paramètre  $\epsilon$  quand la solution de l'équation ( $E_0$ ) pour  $\epsilon = 0$  est connue. Cette méthode est définie pour des équations de types variés, toutefois c'est ici dans le cas d'équations différentielles qu'elle est requise. Les solutions approchées de ( $E_\epsilon$ ) sont cherchées sous forme de développement en série des puissances de  $\epsilon$  de la forme :

$$x(t) = \sum \epsilon^n x_n(t) \quad (5.1)$$

l'approximation étant d'autant plus proche de la solution exacte qu' $|\epsilon|$  est faible. Pour obtenir une telle forme, il est nécessaire de rendre les équations sans dimensions. Pour

cela on effectue un changement d'échelle (*rescaling*) en faisant apparaître le paramètre de contrôle  $\epsilon \ll 1$ .

Dans (5.1), chaque terme  $x_n(t)$  doit être borné pour que le développement ait un sens, de plus la hiérarchie des différents termes doit être respectée pour tout  $t$  :

$$\epsilon x_{n+1}(t) \ll x_n(t) \quad (5.2)$$

Ces conditions sont parfois violées lorsqu'apparaissent en appliquant la méthode ci-dessus des termes non bornés, nommés termes séculaires (e.g. dépendant du temps) qui empêchent la série de converger. Dans la suite nous exposons deux cas particuliers de méthodes multiéchelles : dans le premier, dénommé cas *régulier* par le mathématicien, l'application directe de la théorie des perturbations aboutit à une série convergente. Ceci justifie l'approximation de champ moyen (*mean field*) et permet par exemple de construire des variables lentes à partir d'un ensemble de variables rapides (§5.3.1). Dans le second cas (§5.3.2), le développement en série diverge, et on doit faire apparaître de multiples niveaux associés à différents régimes, en remarquant que les échelles les plus petites peuvent avoir une influence déterminante sur tous les niveaux.

### 5.3.1 Agrégation

Supposons que le phénomène étudié fasse intervenir un grand nombre d'éléments couplés les uns aux autres. Il est souvent impossible de rendre compte de l'activité de chacun de ces éléments alors qu'en adoptant un point de vue global, des résultats significatifs peuvent être obtenus. Moyennant une construction judicieuse de variables lentes par agrégation de variables rapides, il est possible de parvenir à une équation des variables lentes qui ne dépende plus des précédentes et permet le cas échéant de rechercher des solutions par des méthodes classiques.

Ce cas suppose<sup>61</sup> que les variables lentes ainsi construites et les variables rapides dont on dispose au départ soient découplées, et que converge le développement en puissances de  $\epsilon$ .

Auger et Bravo de la Parra [5] posent par exemple  $n$  éléments obéissant à une dynamique déterministe à deux échelles, de sorte que  $\forall i \leq n$  on puisse écrire :

$$\epsilon \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) + \epsilon g_i(x_i) \quad (5.3)$$

où les  $f_i$  rendent compte d'évolutions rapides couplant toutes les variables, alors que les  $g_i$  sont associés à des évolutions lentes propres à chaque variable.

<sup>61</sup> « asymptotic expansions are ubiquitous in multi-scale approaches : the coexistence of different time scales, superimposed and non trivially coupled to get rise to the observed phenomenon, prevents from obtaining uniformly convergent perturbative expansion ; it is only in this latter regular case that the above-mentioned mean-field approaches and homogenization techniques apply » [26, p.7]

En posant  $\tau = t/\epsilon$  une échelle de temps rapide par rapport à  $t$ , l'équation (5.3) devient :

$$\frac{dx_i}{d\tau} = f_i(x_1, \dots, x_n) + \epsilon g_i(x_i) \quad (5.4)$$

Puis une variable globale  $X(t)$  est définie, par exemple par sommation des  $x_i$  :

$$X(t) = \sum x_i(t) \quad (5.5)$$

Moyennant une condition de stabilité asymptotique, on peut obtenir une équation gouvernant la variable globale  $X$  :

$$\frac{dX(t)}{dt} = \sum g_i(X_i(t)) + O(\epsilon) \quad (5.6)$$

où les  $X_i$  sont les composantes de  $X$ .

### 5.3.2 Méthode des échelles multiples

La méthode des échelles multiples (*multiple scale*) est un cas particulier de méthode multi-échelles (*multiscale methods*) utile lorsque la théorie des perturbations régulières échoue. Elle appartient à la théorie des perturbations singulières et introduit des variables temporelles indépendantes  $t_1, t_2, \dots, t_n$  telles que :

$$\begin{aligned} t_0 &= t \\ t_1 &= \epsilon t \\ t_2 &= \epsilon^2 t \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Comme dans la théorie des perturbations on substitue alors l'expression de (5.7) à l'opérateur  $d/dt$  et on introduit le développement suivant :

$$x(\epsilon, t) = \sum \epsilon^n x_n(t_0, t_1, t_2, \dots) \quad (5.8)$$

Nous renvoyons le lecteur à [11] pour l'exemple de l'oscillateur de Duffing, et à [27, §2.3-4] pour des illustrations concrètes.

### 5.3.3 Discussion

Au cours de cet exposé très parcellaire, nous avons introduit les grandes lignes des méthodes mathématiques multiéchelles permettant par exemple de mettre au jour les différentes échelles significatives, les ordres de grandeurs des termes significatifs à chaque échelle, et les influences entre les différents niveaux. Ces approches permettent également de construire des variables lentes en agrégeant de nombreuses variables rapides.

Le champ des études multiéchelles est immense, et en constant développement. Parmi les aspects déterminants on trouvera par exemple les théorèmes d'analyse mathématique qui fondent ces approches [34], les approches numériques permettant d'approximer les solutions des systèmes d'équations [18], et particulièrement la question du traitement des incertitudes, dues aux approximations analytiques ou numériques [36, 18].

Bien entendu, la question de l'élaboration des modèles, aux échelles microscopiques et macroscopiques dans le cadre de la robotique autonome reste le problème essentiel, qui suppose de tirer parti des nombreuses disciplines dont les travaux ont été évoqués au cours de ce mémoire.

## 5.4 Discussion et perspectives

Comme nous l'avons mentionné en introduction, nous considérons ce chapitre comme un travail préliminaire : il s'agit d'une part de rassembler des éléments d'analyse des modèles multiéchelles robotique afin d'évaluer leurs atouts et faiblesses. D'autre part, nous souhaitons emprunter aux autres disciplines les principes et outils compatibles avec notre objectif de départ : établir ou infirmer le lien entre adaptativité en dépendances multiéchelles en robotique, par analogie avec la morphogenèse. La question de la conception d'un système robotique adaptatif reste subordonnée selon nous à la compréhension de ce rapport.

Pour résumer l'apport des différentes sources passées en revue ci-dessus, nous retiendrons tout d'abord que la morphogenèse nous suggère de recenser les différentes échelles susceptibles de jouer un rôle significatif, et d'accorder une importance particulière au rapport entre ces niveaux, mais aussi entre physiques hétérogènes.

Les travaux d'Arbib et al. fournissent une illustration intéressante de ces principes, mais se concentrent sur le niveau neuronal et le niveau comportemental en négligeant les autres échelles. Par ailleurs nous remarquons que la modélisation sous forme d'automates ne permet pas à notre connaissance de disposer de résultats théoriques sur le comportement d'ensemble du système. D'autres pistes de recherche fondées sur les principes d'optimalité sont également passées en revue sans que leur apport soit jugé déterminant.

Les travaux en Biologie Systémique menés par Noble et collègues sur le cœur fournissent un exemple de traitement multi-échelle quantitatif de phénomènes naturels. La gamme d'échelles prises en compte est très large, depuis les gènes jusqu'aux organes. Le principe de modélisation *middle-out* mis en avant nous semble approprié, et transférable aux systèmes sensorimoteurs.

Enfin en dernière partie nous posons les éléments de base des théories mathématiques d'analyse des systèmes multiéchelles.

### 5.4.1 Perspectives

Plusieurs questions fondamentales se posent :

- quel type de système sensorimoteur doit-on retenir ?
- quel niveau de base (*middle out*) choisir pour une description multiéchelle ?
- comment prendre en compte les niveaux supérieurs tels que les rétroactions exercées par l'environnement, mais aussi la dépendance par rapport aux niveaux microscopiques ?
- peut-on mettre en évidence par la modélisation un niveau semblable à celui des *affordances* ?
- une fois reliés les différents niveaux phénoménologiques comment simuler un comportement global ? Quelles procédures d'estimation des erreurs et incertitudes (introduites par la modélisation elle-mêmes, ou les procédures de calcul numériques) peut-on élaborer ?
- quelle procédure de vérification du modèle mettre en oeuvre ?
- en revenant à la robotique qui nous préoccupe principalement, comment évaluer l'autonomie dont fait preuve un robot et comment comparer l'autonomie de différents robots ?

Pour répondre à ces questions, nous proposons dans de futurs travaux de considérer la locomotion d'un robot muni de pattes sur une surface irrégulière. Nous élaborerons un modèle déterministe multiéchelle semblable à celui de [21], en ajoutant un niveau "métabolique" microscopique, et des perturbations exercées sur le CPG par les capteurs. Ensuite, nous construirons un modèle probabiliste à temps et états macroscopiques discrets et le comparerons avec le modèle déterministe multiéchelle.

Les conséquences immédiates attendues par rapport aux travaux développés dans les chapitres précédents sont les suivantes :

- expliquer l'allure des réseaux de dépendances dans d'autres cas que ceux vus dans le chapitre 4.
- obtenir des expressions analytiques approchées des informations mutuelles entre capteurs et effecteurs.
- être capable de prédire puis d'optimiser le taux d'erreur en agissant sur les paramètres du robot.

A plus long terme on souhaite d'abord étendre ces directions de recherche au cas des mesures probabilistes de causalité. Ensuite, nous chercherons à obtenir des conditions théoriques pour l'apprentissage de suites d'actions complexes, pour un robot et un environnement donnés, pour fonder la définition d'un indicateur d'autonomie en robotique. Nous développons ces idées au cours de la conclusion finale.

### Remerciements

pour avoir attiré mon attention sur les travaux ci-dessous, je tiens à remercier :

- Matteo Mossio (équipe CIM, Département d'Informatique de l'ENS; REHSEIS UMR7596), pour l'article [17] d'Ezequiel Di Paolo qui a inspiré ce chapitre.
- Boris Saulnier (équipe CIM, Département d'Informatique de l'ENS; équipe Systémoscope, CNRS UMR 7091) pour les méthodes multiéchelles.
- Charles Auffray (équipe Systémoscope, CNRS UMR 7091) pour les travaux de Denis Noble.

## Bibliographie

- [1] M.A. Arbib. Schema theory. In *the Encyclopedia of Artificial Intelligence*, Shapiro (ed.), pages 1427–1443. Wiley, 1992.
- [2] M.A. Arbib. Modules, brains and schemas. In *Formal Methods in Software and Systems Modeling*, pages 153–166, Berlin, 2005. Springer.
- [3] R. Arkin, A. Kahled, A. Weitzenfeld, and F. Cervantes-Prez. Behavioral models of the praying mantis as a basis for robotic behavior. *Robotics and Autonomous Systems*, 32(1) :39–60, Jul 2000.
- [4] W.R. Ashby. *Design for a Brain*. Chapman & Hall, 1952.
- [5] P. Auger and R. Bravo de la Parra. Methods of aggregation of variables in population dynamics. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series III - Sciences de la Vie*, 323(8) :665–674, August 2000.
- [6] J.L. Basdevant and C. Kopper. *Principes variationnels et mécanique analytique*. Ecole Polytechnique, 2005.
- [7] R.D. Beer and J.C. Gallagher. Evolving dynamical neural networks for adaptive behavior. *Adapt. Behav.*, 1(1) :91–122, 1992.
- [8] M. Blanchard, F.C. Rind, and P.F.M.J. Verschure. Collision avoidance using a model of the locust lgmd neuron. *Robotics and Autonomous Systems*, 30 :17–38, 2000.
- [9] P. Bourguine and A. Lesne. *Morphogenèse. L'origine des formes*. Belin, Paris, 2006.
- [10] M. Burgin. Mathematical Models in Schema Theory. *ArXiv Computer Science e-prints*, December 2005.
- [11] C.C. Chow. Multiple scale analysis, 2007. [http://www.scholarpedia.org/article/Multiple\\_Scale\\_Analysis](http://www.scholarpedia.org/article/Multiple_Scale_Analysis).
- [12] European Commission. Cognitive systems, interaction, robotics : Technical background notes, 2007.
- [13] F. Corbacho, K.C. Nishikawa, A. Weersaruiya, J.S. Liaw, and M.A. Arbib. Schema-based learning of adaptable and flexible prey-catching in anurans i.the basic architecture. *Biological Cybernetics*, 93 :391–409, 2005.

- 
- [14] Fernando J. Corbacho and Michael A. Arbib. Schema-based learning : towards a theory of organization for biologically-inspired autonomous agents. In *AGENTS '97 : Proceedings of the first international conference on Autonomous agents*, pages 520–521, New York, NY, USA, 1997. ACM Press.
- [15] I. Cos-Aguilera, L. Cañamero, and G.M. Hayes. Motivation-driven learning of object affordances : First experiments using a simulated khepera robot. In *Proceedings of the 9th International Conference in Cognitive Modelling (ICCM'03)*, Bamberg, Germany, 4 2003.
- [16] I. Cos-Aguilera, L. Cañamero, and G.M. Hayes. Using a sofml to learn object affordances. In *Proceedings of the 5th Workshop of Physical Agents*, Girona, Catalonia, Spain, 3 2004.
- [17] E. A. Di Paolo. Organismically-inspired robotics : Homeostatic adaptation and natural teleology beyond the closed sensorimotor loop. In *K. Murase T. Asakura (Eds) Dynamical Systems Approach to Embodiment and Sociality*, pages 19–42, Adelaide, Australia, 2003. Advanced Knowledge International.
- [18] W.E. E, X. Li, W. Ren, and E. Vanden-Eijden. Heterogeneous multiscale methods : A review. *Communications in Computational Physics*, 2(3) :367–450, 2007.
- [19] S. Grillner, T. Deliagina, A. El Manira, R.H. Hill, G. N. Orlovsky, P. Wallen, O. Ekeberg, and A. Lansner. Neural networks that co-ordinate locomotion and body orientation in lamprey. *Trends in Neurosciences*, 18(6) :270–279, 1995.
- [20] I. Harvey, P. Husbands, D. Cliff, A. Thompson, and N. Jakobi. Evolutionary robotics : the sussex approach. *Robotics and Autonomous Systems*, 20 :205–224(20), June 1997.
- [21] K. Hlaváčková-Schindler, M. Paluš, M. Vejmelka, and J. Bhattacharya. Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis. *Physics Reports*, 441(1) :1–46, March 2007.
- [22] Philip Holmes, Robert J. Full, Dan Koditschek, and John Guckenheimer. The dynamics of legged locomotion : Models, analyses, and challenges. *SIAM Review*, 48(2) :207–304, 2006.
- [23] H. Kitano. Computational systems biology. *Nature*, 420 :206–210, 2002.
- [24] P. Kohl, D. Noble, R.L. Winslow, and P. Hunter. Computational modeling of biological systems : tools and vision. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 358 :579–610, 2000.
- [25] C. Le Bris. *Systèmes multi-échelles. Modélisation et simulation*. Springer, Berlin, 2005.
- [26] A. Lesne. *Encyclopedia of Mathematical Physics*, volume 3, chapter Multi-scale approaches, pages 465–482. Elsevier, 2006.
- [27] A. Lesne. Complex networks : from graph theory to biology. <http://www.lptmc.jussieu.fr/users/lesne>, 2007.

## Bibliographie

---

- [28] D.M. Lyons. A schema-theory approach to specifying and analysing the behavior of robotic systems. In *Prerational Intelligence*, (Eds. Ritter, Cruse Dean), Dordrecht/Boston/London, 2000. Kluwer Academic.
- [29] D. Noble. Modeling the heart –from genes to cells to the whole organ. *Science*, 295 :1678–1682, 2002.
- [30] D. Noble. Modeling the heart : insights, failures, and progress. *BioEssays*, 24 :1155–1163, 2002.
- [31] D. Noble. Systems biology and the heart. *Biosystems*, 83 :75–80, 2006.
- [32] D. Noble. From the hodgkin-huxley axon to the virtual heart. *Journal of Physiology*, 580(1) :15–22, 2007.
- [33] Stefano Nolfi, Dario Floreano, Orazio Miglino, and Francesco Mondada. How to evolve autonomous robots : Different approaches in evolutionary robotics. In *Brooks, R. and Maes, P. (eds.) Artificial Life IV*, pages 190–197. MIT Press, 1994.
- [34] G.A. Pavliotis and A.M. Stuart. *Multiscale Methods : Averaging and Homogenization*. Springer, 2007.
- [35] F. Varenne. Optimalité et morphogenèse : le cas des plantes au xxème siècle. *Bulletin d'Histoire et d'Epistémologie des Sciences de la Vie*, 13(1) :89–117, 2006.
- [36] R.W. Walters and L. Huyse. Uncertainty analysis for fluid mechanics with applications. Technical report, NASA, 2002.
- [37] B. Webb. Can robots make good models of biological behaviour. *Behavioral and Brain Sciences*, 24 :1033–1050, 2001.
- [38] B. Webb and T. Scutt. A simple latency-dependent spiking-neuron model of cricket phonotaxis. *Biological Cybernetics*, 82 :247–269, 1999.
- [39] A. Weitzenfeld. From schemas to neural networks : A multi-level modeling approach to biologically-inspired autonomous robotic systems. *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, pages –, 2007.
- [40] Alfredo Weitzenfeld. A multi-level approach to biologically inspired robotic systems. [citeseer.ist.psu.edu/weitzenfeld00multilevel.html](http://citeseer.ist.psu.edu/weitzenfeld00multilevel.html).

## Sources en libre accès

- Alfredo Weitzenfeld <http://cannes.itam.mx/English/research/publications/publications.html>
- Articles de Annick Lesne [www.lptmc.jussieu.fr/users/lesne/](http://www.lptmc.jussieu.fr/users/lesne/)
- publications de Weinan E et collègues au département de maths de Princeton : <http://www.math.princeton.edu/multiscale/>

## Conclusions

Le problème initialement soulevé au début de ce mémoire était le suivant : comment un robot peut-il estimer si une tâche qu'il doit exécuter est réalisable ou pas dans un environnement donné? Pour y répondre, nous nous sommes rattachés à la psychologie écologique pour plusieurs raisons : elle favorise une approche systémique attentive aux rapports de compatibilité nécessaires à l'interaction entre des agents et leur environnement, elle s'intéresse à l'organisation des comportements produits, et elle s'appuie sur de nombreux travaux formalisés.

Notre intérêt s'est porté sur la transposition en robotique du concept d'*affordance*, qui recouvre les possibilités d'action offertes à un agent dans un environnement donné, telles que traverser un lieu dans une direction donnée, saisir un objet ou le faire rouler dans une direction fixée. Deux points de vue sont classiquement opposés : celui d'un observateur extérieur au système robot/environnement, et celui -subjectif- du robot, ignorant les lois qui régissent sa propre action.

Notre premier apport consiste à en expliciter certaines conditions nécessaires : l'observateur extérieur au système robot/environnement a pour objectif de révéler l'ensemble des actions accessibles en théorie au robot, étant donné le type de ses capteurs, de ses effecteurs et de sa loi de commande, mais aussi en fonction de la nature de l'environnement. En comparant les méthodes et résultats de travaux et neuroéthologie computationnelle, en neuromécanique de la locomotion, mais également en théorie des schémas nous concluons à la nécessité d'une approche systémique. Celle-ci se traduit dans certains cas par une modélisation multiéchelle, mais les travaux existants ne rendent pas compte des interactions en boucle fermée entre l'agent et l'environnement.

Pour comprendre le point de vue subjectif, nous confrontons les travaux transposant les *affordances* en robotique avec ceux traitant de l'apprentissage du système sensorimoteur qui correspondent aux problèmes suivants :

- l'"apprentissage du système sensorimoteur" équivaut à l'apprentissage d'une fonction  $f : \text{commande} \rightarrow \text{effet}$ , qui associe à une commande choisie au hasard une variation des mesures renvoyées par les capteurs.
- l'"apprentissage des affordances" équivaut à l'apprentissage d'une fonction  $f : \text{commande} \times \text{situation} \rightarrow \text{effet}$ .

Plusieurs types d'effet se rencontrent : il peut s'agir d'un nombre ou d'un champ de vecteurs décrivant le mouvement produit par l'interaction, dans un référentiel égo-centré

## Conclusions

---

(e.g. angle de la trajectoire d'un objet avec le bras du robot). L'effet peut aussi être un booléen caractérisant le succès ou l'échec de la tâche demandée (e.g. traversabilité), déterminé grâce à des critères *ad hoc* tels que la comparaison entre une distance effective parcourue et une distance tabulée ou par la corrélation entre le mouvement du robot et le mouvement d'un objet qui doit y être attaché. Cette confrontation met en évidence l'absence de l'activité des effecteurs dans la description des effets, hormis dans les travaux de Seth, Sporns et al.

De ce premier apport nous retenons la conclusion suivante : les points de vue subjectif et objectif ne doivent pas être opposés mais être considérés comme complémentaires si on souhaite répondre à plus long terme au problème suivant : quelles sont les conditions permettant à un robot de passer en revue l'ensemble des comportements qui lui sont théoriquement accessibles ?

Ceci nous amène à notre second apport : l'apprentissage des *affordances*. Pour décrire de manière détaillée les dépendances entre les capteurs et effecteurs au cours de l'apprentissage de la fonction  $f : \text{commande} \times \text{situation} \rightarrow \text{effet}$ , nous proposons de prendre pour effet le réseau de dépendances sensorimotrices reliant les capteurs et les effecteurs lors de l'interaction entre le robot et l'environnement, en suivant Seth et al.. Toutefois, en nous inspirant des travaux disponibles dans le champ des systèmes complexes, dans celui de l'apprentissage statistique et dans d'autres disciplines connexes (e.g. inférence de réseau métabolique) nous quantifions les relations de dépendances à l'aide de la théorie de l'information.

Les noeuds de ce réseau sensorimoteur aléatoire sont les capteurs et les effecteurs du robot. Les arcs du réseau représentent une dépendance statistique mesurée à l'aide de l'information mutuelle, estimée grâce à l'algorithme de Kraskov et al. Pour rendre compte de l'organisation globale de l'ensemble des interdépendances entre les noeuds, nous mobilisons la matrice d'information mutuelle, dont on estime le spectre. Nous montrons que moyennant une modélisation de cette matrice aléatoire, on peut obtenir des approximations de  $\max |\lambda|$ . Nous montrons également qu'en discrétisant la matrice par seuillage pour construire un graphe, de nombreuses caractéristiques topologiques sont accessibles. Celles-ci dépendent toutefois du seuil en question, nous élaborons alors une structure de données présentant deux avantages : d'une part, la prise en compte des relations d'ordre supérieures quantifiées grâce à la redondance, puis celle des différents niveaux de seuil possibles. Il apparaît également que la filtration ainsi obtenue peut être caractérisée à l'aide de son homologie persistante, bien qu'aucun résultat théorique ne prédise l'allure de cette dernière pour les complexes simpliciaux que nous formons. L'utilité de ces outils est soulignée à l'aide d'une tâche de classification non supervisée dans plusieurs cas simplifiés de distributions multivariées, et de comportements simples d'évitement d'obstacles. Nous montrons que dans la plupart des cas considérés, on retrouve par classification les différents types de conditions expérimentales de départ.

Ces validations sont poursuivies à l'aide d'un robot mobile Pioneer simulé, pour une

---

tâche de classification supervisée et non supervisée, quand le robot tente de pousser différents types d'objets présents dans son environnement (i.e. en prenant pour arguments de l'application  $f$  : commande  $\times$  situation  $\rightarrow$  effet, une commande unique et des situations variées). Nous obtenons des performances similaires à celles trouvées dans la littérature lorsque un robot doit associer sa situation avec la traversabilité apprise au préalable.

Nous questionnons l'autonomie des systèmes robotiques en faisant référence aux propriétés de stabilité et de plasticité des systèmes vivants. Nous remarquons que autant l'architecture des robots que les tâches qui leurs sont assignées ne sont pas plausibles du point de vue biologique, ce qui empêche les artefacts de présenter les propriétés d'autonomie des systèmes vivants. En empruntant certains concepts au champ de la morphogenèse et de la biologie systémique, nous appelons à une approche systémique de la robotique, servie par les approches multiéchelles en Physique.

## Perspectives

Dans ce mémoire, le terme "apprentissage d'affordances" se comprend comme l'inférence d'un réseau de dépendances probabilistes entre senseurs et effecteurs, apparaissant sous l'effet d'une commande simple (e.g. la poussée d'objets). Nous rappelons ici plusieurs remarques déjà exprimées plus haut :

- l'interaction d'un robot avec son environnement ne saurait se limiter à pousser des objets. Comment l'étendre ?
- la description des relations entre senseurs et effecteurs grâce à un réseau de dépendance probabilistes pose deux questions : pourquoi un phénomène principalement déterministe comme le contact entre un robot et un ensemble d'objets devrait-il être décrit de manière probabiliste ? De plus quel est le rôle du temps dans la description ?

Pour accéder à un ensemble plus riche de comportements, plusieurs pistes méritent notre attention (les références sont rappelées dans l'Annexe ci-après).

- comme Stoytchev dans le cas de la saisie des objets [10], on peut composer des primitives de mouvements de manière aléatoire.
- en s'inspirant des études sur la coordination motrice chez l'animal et l'homme [11] on peut implémenter des imitations de trajectoires optimales.
- ensuite, en se donnant une récompense à optimiser, on peut adopter les techniques d'apprentissage semi-supervisées (e.g. apprentissage par renforcement). Les contraintes peuvent inclure la distance moyenne parcourue, ou la prédictibilité du mouvement [1, 9].

Ceci pose le problème du choix du type de démarche scientifique, entre explication et imitation comme on l'a déjà rappelé.

Quelles sont ensuite les directions de recherche que nous suivrons concernant la description subjective de l'organisation du comportement d'un agent ? Nous avons remarqué au cours du chapitre 3 que les phénomènes dont les réseaux de dépendance probabiliste

## Conclusions

---

constituent des représentations sont produits par des mécanismes principalement déterministes. Comment justifier alors la description probabiliste qui en est donnée ? La théorie des systèmes dynamiques décrit le chaos en basse dimension [2] comme un phénomène régi par des lois déterministes, mais de telle sorte que toute prédiction à long terme au sujet des trajectoires individuelles du système soit impossible. Il est pourtant possible dans le cadre de cette théorie de formuler des résultats généraux à propos des grandeurs mesurées, ou à propos des trajectoires asymptotiques du système, mais en prenant pour objet non pas des trajectoires isolées mais des groupes de trajectoires, et en employant le langage des probabilités [6]. Du fait de la nature non linéaire des équations mises en jeu par les capteurs et les effecteurs d'un robot afin d'assurer sa locomotion, il est possible que nous nous trouvions dans ce cas. Nous nous attacherons donc à vérifier la légitimité d'une telle description, en nous tournant par exemples vers les outils développés en Physique Statistique, pour donner le cas échéant une description probabiliste des *affordances*. A ce sujet, la question de la structure particulière des complexes simpliciaux appelle un traitement particulier, que nous renvoyons en Annexe.

Ensuite, comme nous l'avons mentionné au cours du chapitre 3, la flèche du temps et les rapports de causalité doit être pris en compte, ce qui n'est pas le cas avec l'information mutuelle. Nous nous appuyerons pour cela sur les différentes mesures de causalité développées actuellement, passées en revue dans [4].

Ces directions de recherche contribueront selon nous à proposer une formalisation des *affordances* plus large que celles existantes actuellement, et à expliquer les limites de l'apprentissage d'une tâche par un robot qui tiendra compte des de la compatibilité entre celui-ci et son milieu. Les applications concernent d'abord l'ingénierie, avec la programmation de robots dont les mécanismes sont connus de manière imprécise, dans des environnements variables dans le temps, susceptibles d'endommager le robot pendant son exploration. Par ailleurs, disposer de tels outils permettrait également d'éclairer les mécanismes de l'autonomie et de l'adaptativité des systèmes vivants.

# Annexe

## Théorie du contrôle et nombres de Betti aléatoires

Dans le cadre de la géométrie différentielle, Philipona et collègues [7, 8], montrent qu'un agent peut inférer certaines quantités caractéristiques de l'espace dans lequel il est plongé, telle que sa dimension, en mobilisant uniquement les relations sensorimotrices observées en effectuant des mouvements aléatoires. De plus, ils prévoient qu'il soit possible d'inférer une structure algébrique de groupe correspondant aux propriétés de l'espace. Ces résultats extrêmement riches prennent en compte en partie le caractère aléatoire intrinsèque des rapports sensorimoteurs entre un agent et son environnement, via le choix des mouvements lors de l'apprentissage de la dimension de l'espace dans lequel est plongé le robot. Cependant, les hypothèses de différentiabilité des variétés nous semblent mériter plus ample justification, et devrait être comparé aux propriétés des processus aléatoires courants tels qu'un bruit brownien, continu mais nulle part différentiable.

Dans [3] Farber et Kappeler prennent pour sujet d'investigation les nombres de Betti d'un espace de configuration d'un mécanisme plan, dans un cadre probabiliste où les longueurs des barres du mécanisme sont assimilées à des variables aléatoires. Ils obtiennent les nombres de Betti asymptotiques quand le nombre de liaisons tend vers l'infini. L'intérêt de cette démarche ne réside pas seulement dans la dérivation du nombre de Betti d'une variété aléatoire, mais également dans le lien sous-jacent entre la topologie d'une variété aléatoire et les notions classiques de la théorie du contrôle, telles l'espace des configurations, la contrôlabilité et l'observabilité.

Dans [12], Touchette et Lloyd établissent un lien entre la théorie de l'information et la théorie du contrôle, en identifiant un contrôleur avec un canal de transmission qui transforme un état initial en état final. Les notions classiques de contrôlabilité et d'observabilité sont formulées à l'aide de l'information mutuelle et de l'entropie.

En guise d'illustration d'un rapprochement entre ces thématiques et la robotique mobile, on peut citer les travaux de Kemp et Edsinger [5] qui mettent à profit l'analogie entre information mutuelle et contrôlabilité suggérée par Touchette et Lloyd. Ces auteurs proposent de hiérarchiser les différentes parties du corps du robot en fonction du degré d'information mutuelle partagé avec les effecteurs. Pour cela ils proposent un algorithme incrémental d'approximation de la dépendance statistique entre actions  $A^i$  et observations  $O^i$  par l'intermédiaire de l'information mutuelle  $I(\Phi^i, A^i)$  où  $\Phi^i$  est l'état du

système.

Ceci nous encourage à clarifier, au cours de travaux ultérieurs, le lien entre d'une part la topologie d'un espace produit par l'encodage d'un ensemble de dépendances probabilistes, et d'autre part les propriétés des lois sensorimotrices régissant l'interaction d'un agent avec son environnement. En caractérisant l'espace de configuration d'un robot de manière topologique comme Farber et Kappeler, on pourra par exemple rapprocher la topologie de ce dernier de la topologie des graphes et des complexes simpliciaux étudiés au chapitre 2. Comme annoncé, nous nous appuyerons d'une part sur la caractérisation d'espaces topologiques produits par des réseaux de dépendance aléatoires, d'autre part sur la théorie du contrôle formulées dans les termes de la théorie de l'information.

## Bibliographie

- [1] N. Ay, N. Bertschinger, R. Der, F. Güttler, and E. Olbrich. Predictive information and explorative behavior of autonomous robots. In *Proceedings of the European Conference on Complex Systems (ECCS07)*, Dreseden, October 2007.
- [2] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, Paris, 1998.
- [3] Michael Farber and Thomas Kappeler. Betti numbers of random manifolds, 2007.
- [4] K. Hlaváčková-Schindler, M. Paluš, M. Vejmelka, and J. Bhattacharya. Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis. *Physics Reports*, 441(1) :1–46, March 2007.
- [5] C.C. Kemp and A. Edsinger. Robot manipulation of humanoids : Autonomous detection and control of task relevant features. In *5th International Conference on Development and Learning : Special Session on Perceptual Systems and their Development (ICDL5)*, Paris, France, 2006. IEEE.
- [6] A. Lasota and M.C. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise : Stochastic Aspects of Dynamics*. Springer, 1994.
- [7] D. Philipona, J.K. O'Regan, and J.-P. Nadal. Is There Something Out There? Inferring Space from Sensorimotor Dependencies. *Neural Comp.*, 15(9) :2029–2049, 2003.
- [8] D. Philipona, J.K. O'Regan, J.-P. Nadal, and Olivier Coenen. Perception of the structure of the physical world using unknown multimodal sensors and effectors. In Sebastian Thrun, Lawrence Saul, and Bernhard Schölkopf, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems 16*. MIT Press, Cambridge, MA, 2004.
- [9] A.K. Seth. Measuring autonomy by multivariate autoregressive modelling. In *Advances in Artificial Life*, pages 475–484. Springer, 2007.

- 
- [10] A. Stoytchev. Toward learning the binding affordances of objects : A behavior-grounded approach. In *Proceedings of AAAI Symposium on Developmental Robotics*. Stanford University, 2005. March.
- [11] E. Todorov and M.I. Jordan. Optimal feedback control as a theory of motor coordination. *Nature Neuroscience*, 5 :1226–1235, 2002.
- [12] H. Touchette and S. Lloyd. Information-theoretic approach to the study of control systems. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 331(1-1) :140–172, January 2004.