

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ D'ÉVRY VAL D'ESSONNE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ÉVRY VAL D'ESSONNE

Spécialité : Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement par

FRÉDÉRIC LELIÈVRE

le 10 décembre 2010

Approximations des équations de Navier-Stokes préservant le changement d'échelle

Jury

M. Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset	Directeur
Mme Isabelle Gallagher	Rapporteur
M. Marco Cannone	Rapporteur
M. Yves Meyer	Examineur
Mme Manuela Valeria Banica	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier dans l'ordre chronologique de mes rencontres :

- Messieurs Dagorne et Lambertson, qui m'ont permis de reprendre mes études dans de bonnes conditions, en faisant coïncider mon emploi du temps au collège à celui des cours dispensés en M2 à l'Université de Marne-La-Vallée.
- M. Cannone, qui a suscité, lors de son cours de M2, mon intérêt pour les équations de Navier-Stokes ; qu'il soit aussi remercié pour son accueil et sa disponibilité les (quelques) fois où je suis allé le voir, l'intérêt porté à mon travail en acceptant d'en être rapporteur et enfin...pour les livres qu'il m'a offerts.
- M. Lemarié-Rieusset aura évidemment une place à part dans cette page de remerciements : tout d'abord pour ses cours, dont la richesse et l'exigence n'auront eu d'égal que le temps passé à les comprendre puis les digérer ; ils auront été très formateurs pour la thèse. Je lui suis surtout reconnaissant d'avoir encadré mes travaux pendant le stage de M2 et de m'avoir accepté, en dépit de mon parcours atypique, sur ma seule motivation comme étudiant en thèse. Malgré un emploi du temps surchargé, il aura toujours été disponible et patient, répondant inlassablement aux questions qui lui étaient posées. Ce fut une rencontre humainement et scientifiquement très enrichissante.
- N. Prioux pour sa formation LaTeX accélérée ;
- Mme Gallagher (rapporteur), M. Meyer et Mme Banica (examineurs) d'avoir accepté de faire partie du jury.

D'un point de vue personnel, un grand merci à Caroline qui aura fait preuve d'abnégation et m'aura libéré le temps nécessaire pour travailler. J'ai aussi une pensée pour mes parents et beaux-parents qui ont notamment assuré une partie de la garde des enfants lors de la rédaction de la thèse.

Enfin, je tiens à dédier ce mémoire à mes fils, Romain et Adrien.

Résumé

Nous étudions des approximations des équations de Navier-Stokes compatibles avec la recherche de solutions auto-similaires. Pour ce faire, nous utilisons un modèle préservant le changement d'échelle et vérifiant une égalité d'énergie. Lorsque la donnée initiale est dans L^2 , nous montrons qu'il converge vers une solution faible de Leray des équations de Navier-Stokes. La preuve utilise une nouvelle expression (locale) de la pression : via le formalisme des solutions "mild", le théorème de régularité maximale du noyau de la chaleur permet le contrôle de la pression approchée. Les chapitres suivants sont consacrés à la construction d'une solution des équations de Navier-Stokes, globale en temps et adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, lorsque la donnée initiale est dans $\dot{M}^{2,3}$: la pression est cette fois contrôlée grâce à l'utilisation des classes de Muckenhoupt (dont les propriétés utilisées sont rappelées dans l'annexe B). De plus, nous obtenons un résultat partiel d'unicité sur ces approximations.

La première partie est consacrée à l'étude d'un modèle scalaire ayant les mêmes propriétés que celui des équations de Navier-Stokes (invariances par translation et dilatation, antisymétrie du terme bilinéaire) mais contenant un opérateur d'intégrale singulière : nous revisitons les techniques habituelles (solutions "mild", faibles) et construisons une solution vérifiant une inégalité d'énergie locale analogue à celle des équations de Navier-Stokes.

Mots clés : Navier-Stokes, égalité d'énergie, inégalité d'énergie locale, solutions auto-similaires, solutions d'énergie infinie, classes de Muckenhoupt, régularité maximale.

Abstract

We study some approximations for the Navier-Stokes equations compatible with the research of self-similar solutions : for this, we use some scaling and energy equality preserving models. When initial data is in L^2 , we show that the model converges towards some (Leray) weak solution of the Navier-Stokes equations. In the proof, we use a new (local) expression of the pressure, whose control is ensured using the maximal regularity for the heat kernel thanks to the formalism of mild solutions. The following chapters are devoted to the construction of a global-in-time suitable solution for the Navier-Stokes equations, when initial data is in $\dot{M}^{2,3}$: Muckenhoupt classes allow to control the pressure (see Annex B). Besides, we obtain a partial result of uniqueness of these approximations. In the first part, we study a scalar model whose properties are similar to the NS equations (invariance by translations and dilations, antisymmetry of the bilinear term) but which contains a singular integral operator : using on some classical harmonic analysis tools (mild and weak solutions), we prove that the solution also satisfies a local energy inequality.

Keywords : Navier-Stokes, energy equality, suitable solutions, self-similar solutions, infinite energy solutions, Muckenhoupt classes, maximal regularity for the heat kernel.

MSC : 76D05.

Table des matières

Liste des notations	11
Liste des espaces	13
1 Introduction	17
1.1 Commentaires sur Navier-Stokes	17
1.2 Présentation de certaines approximations existantes	20
1.2.1 Approximation de Leray	20
1.2.2 Autres approximations	22
1.3 Présentation des travaux de la thèse	24
2 Étude d'un modèle scalaire	29
2.1 Formalisme des solutions "mild"	29
2.1.1 Donnée initiale dans L^3	31
2.1.2 Donnée initiale dans $L^{3,\infty}$	35
2.1.3 Espace $\dot{M}^{2,3}$	35
2.2 Solutions faibles de Leray	39
2.2.1 Solutions de l'équation convolée	39
2.2.2 Passage à la limite	44
2.3 Solutions L^2_{uloc}	47
2.3.1 Estimation a priori pour le champ de vitesse	47
2.3.2 Passages à la limite	49
2.4 Donnée initiale dans $\dot{M}^{2,3}$	53
2.4.1 Existence de solutions globales	53
2.4.2 Inégalité d'énergie locale	54
3 EMVF - Donnée initiale dans L^2	61
3.1 Solution du modèle modifié et convolé	61
3.2 Égalité et inégalité d'énergie	65

3.3	Solution des équations modifiées	67
3.4	Convergence vers les équations de Navier Stokes	71
3.4.1	Passage à la limite	72
3.4.2	Inégalité d'énergie (de Leray) vérifiée par la limite.	76
3.4.3	Donnée initiale	77
3.5	Solutions adaptées au sens de CKN	78
4	EMVF - Donnée initiale dans L^2_{uloc}	81
4.1	Approximation de la donnée initiale	81
4.2	Estimations a priori du champ de vitesse	84
4.3	Passage à la limite	87
4.3.1	Equation vérifiée par la limite	87
4.3.2	Régularité de la limite et inégalité d'énergie	88
4.3.3	Donnée initiale.	89
4.4	Un résultat partiel d'unicité	92
5	EMVF - Donnée initiale dans $\dot{M}^{2,3}$	95
5.1	Construction d'une solution globale	95
5.2	Majorations uniformes en η et α	99
5.3	Passage à la limite	106
5.3.1	Construction d'une solution globale	106
5.3.2	Construction de la solution des équations de Navier-Stokes	107
5.3.3	Solutions adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg	112
5.4	Equations de Navier Stokes	113
5.4.1	Donnée initiale petite	113
5.4.2	Donnée initiale grande	117
6	Conclusion	119
6.1	Approximation solutions "mild"	119
6.2	Perspectives	122
	Annexes	123
A	Commutateur et projecteur	125
A.1	Commutateur de Calderón	125
A.2	Étude de la continuité du projecteur de Leray	128
A.2.1	L'espace L^2_{uloc}	128

A.2.2	L'espace à poids $L^p(w)$	130
A.2.3	L'espace $\dot{M}^{p,q}$	131
A.2.4	L'espace $L^{p,\infty}$, $1 < p < \infty$	131
B	Classes de Muckenhoupt	133
B.1	Définition et premières propriétés	133
B.2	Continuité des opérateurs d'intégrale singulière	135
B.2.1	Étape 1 : Étude de Mf	136
B.2.2	Étape 2 : Passage de Mf à T_*f	137
B.2.3	Étape 3 : Conclusion	142
B.3	Régularité maximale	142
	Bibliographie	144

Liste des notations

- $\partial_j u, \partial_t u$: dérivée partielle de u par rapport à x_j (resp. par rapport à t).
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$: divergence de u .
- $\vec{\nabla} \otimes \vec{u} = (\partial_i f_j)_{i,j}$ désigne la matrice des dérivées premières.
- $\vec{u} \otimes \vec{v} = (u_i v_j)_{i,j}$ est une matrice.
- $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ désigne le vecteur $(\sum_i u_i \partial_i v_j)_j$
- $\vec{\nabla} u$: gradient de u .
- $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$: opérateur défini en Fourier par $\widehat{\Lambda f}(\xi) = |\xi| \widehat{f}(\xi)$ (voir Annexe A)
- $\Delta u, \Delta \vec{u}$: Laplaciens respectifs de u (scalaire) et de \vec{u} (vecteur).
- $\overline{B}(x, R)$: boule fermée de centre x et de rayon R .
- $B(x, R)$: boule ouverte de centre x et de rayon R .
- $B(u, v), B(\vec{u}, \vec{v})$: opérateur bilinéaire des solutions milds. Selon l'équation étudiée, il désignera soit

$$B(u, v) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} [u, \Lambda] v \, ds.$$

soit

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \, ds.$$

soit tout autre opérateur bilinéaire associé une équation de ce type (précisé au moment de l'étude).

- $e^{t\Delta}$: noyau de la chaleur (de l'opérateur $e^{t\Delta}$) dont le noyau sera (abusivement) nommé K : $K_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.
- $\widehat{u}, \mathcal{F}u$: transformée de Fourier de u ,

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} v(x) \, dx.$$

La transformée de Fourier en temps et en espace d'une fonction f sera notée $\mathcal{F}(\tau, \xi)$.

- $\mathcal{F}^{-1}u$: transformée de Fourier inverse de u , s'écrivant pour u suffisamment régulière

$$\mathcal{F}^{-1}u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} v(\xi) \, d\xi.$$

- \mathbb{P} : projecteur de Leray $\mathbb{P} = Id - \frac{\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}}{\Delta}$.
- R : transformées de Riesz $R = (R_1, \dots, R_n)$ où $R_k = \frac{\partial_k}{\Lambda}$
- $\text{Supp} f$: support d'une fonction-test f
- $|A|, w(A)$: mesure de Lebesgue de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ (resp. mesure de A pour la mesure $w dx$).

Les notations ponctuellement utiles (comme les cubes Q_k lors des études L^2_{uloc}) seront précisées au moment opportun.

Liste des espaces

- $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq \infty$: espaces de Muckenhoupt (voir annexe B).
- $B_p^{s,q}, 1 \leq p \leq \infty, s \in \mathbb{R}, 1 \leq q < \infty$: espaces de Besov (définis par la décomposition de Littlewood-Paley)

$$B_p^{s,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \|f\|_{B_p^{s,q}} = \|S_0 f\|_p + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

- $\dot{B}_p^{s,q}, 1 \leq p \leq \infty, s \in \mathbb{R}, 1 \leq q < \infty$: espaces de Besov homogènes,

$$\dot{B}_p^{s,q} = \left\{ f \in Z'(\mathbb{R}^n), \forall j \in \mathbb{Z}, \Delta_j f \in L^p \text{ et } \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

avec $Z' = \mathcal{S}'/\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

- BMO : ensemble des fonctions localement intégrables f telles que :

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - m_B f| dx < \infty,$$

où \mathcal{B} est l'ensemble des boules $B(x_0, r), x_0 \in \mathbb{R}^3, r > 0$ et $m_B f = |B|^{-1} \int_B |f(x)| dx$.

- $\mathcal{C}(X)$: espace des fonctions continues sur X
- $\mathcal{C}^\infty(O)$: espace des fonctions de classe C^∞ sur l'ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{D}(O)$: espace des fonctions \mathcal{C}^∞ sur l'ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$, à support compact dans O (fonctions test)
- $\mathcal{D}'(O)$: espace de distributions sur O
- $H^s(\mathbb{R}^n)$: espace de Sobolev d'indice $s \in \mathbb{R}$

$$H^s = \left\{ f \in \mathcal{S}', \int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

- $H^{-p}(B), p \in \mathbb{N}$: espace de Sobolev d'indice négatif (entier) sur une boule ouverte B

$$H^{-p}(B) = \left\{ f \in \mathcal{S}', f = \sum_{|\alpha| \leq p} \partial_\alpha u_\alpha \text{ où } u_\alpha \in L^2(B) \right\}.$$

- $L^p(X), L^p(w)$: espace des fonctions de puissance p^e intégrable sur X , resp. pour la mesure w

- $L_{uloc}^p, p \in [1, \infty[$: espace des fonctions de puissance p^e uniformément localement intégrable sur \mathbb{R}^n

$$L_{uloc}^p = \left\{ u \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n), \|u\|_{L_{uloc}^p} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{x_0 + [0,1]^n} |u(x)|^p dx \right) < \infty \right\}.$$

Les normes suivantes sont équivalentes :

$$\|u\|_{L_{uloc}^p}^p \sim \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{k + [0,1]^n} |u(x)|^p dx \sim \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \int \phi(x - k) |u(x)|^p dx$$

où ϕ est une fonction-test positive telle que $\sum_k \phi(x - k)$ soit minorée par un réel strictement positif sur \mathbb{R}^n .

Pour $p > 1$, c'est le dual de l'espace de Banach séparable :

$$WL^{p'}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_{loc}^{p'}(\mathbb{R}^n), \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|u\|_{L^{p'}(k + [0,1]^n)} < \infty \right\}.$$

On utilisera enfin $\|f * g\|_{L_{uloc}^p} \leq \|f\|_1 \|g\|_{L_{uloc}^p}$.

- $(L_t^p(0, T) L_x^q)_{uloc}, 1 \leq p < \infty, 1 \leq q < \infty$: c'est l'espace $L_{uloc,x}^q L_t^p((0, T) \times \mathbb{R}^n)$
- $L^{p,q}$: espaces de Lorentz définis par interpolation pour $1 < p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$
 $L^{p,q} = [L^1, L^\infty]_{1-\frac{1}{p}, q}$.
 On a (convolution des espaces de Lorentz) $L^{p_1, q_1} * L^{p_2, q_2} \rightarrow L^{p, q}$ pour $1 < p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ lorsque $1 < p < p'$ et $q' \leq q \leq \infty$ (p' et q' désignent les conjugués de p et q).
- $L^{p,*}$: espaces de Marcinkiewicz,

$$L^{p,*} = \left\{ f \text{ mesurable}, \|f\|_{p,*} = \sup_{0 < t < \infty} t |\{x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| > t\}|^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

On a $L^{p,*} = L^{p,\infty}$.

- $\dot{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq q < \infty$: espaces homogènes de Morrey-Campanato.

$$\left\{ f \in L_{loc}^p; \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n; 0 < R < \infty} R^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|f\|_{L^p(B(x_0, R))} < \infty \right\}$$

dont le pré-dual est l'espace de Banach de fonctions f se décomposant sous la forme d'une série $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n f_n$ telles que $\text{Supp } f_n \subset B(x_n; R_n)$ avec $\|f_n\|_{\frac{p}{p-1}} \leq R_n^{3(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| < \infty$.

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: espace de Schwartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: espace des distributions tempérées.

Par abus de langage, on utilisera parfois la même notation pour les espaces de fonctions scalaires et ceux à valeurs dans \mathbb{R}^n (principalement lorsque nous évoquerons les normes de ces espaces).

Lorsque E est un espace de fonctions de x , on entend par $L^p(I, E)$ l'espace des fonctions L^p sur l'intervalle de temps (par exemple $I = [0, T]$) : cet espace sera parfois noté $L^p E$.

Lorsque E est un espace de distributions non séparable (comme L^∞ ou L^2_{loc}), on entend par $L^p E$ l'espace des fonctions f localement mesurables de I dans E (c'est-à-dire $f \mapsto \langle f, \phi \rangle$ est mesurable pour toute fonction-test ϕ) telles que $\int_I \|f(t)\|_E^p dt < \infty$: cette définition n'est pas équivalente à la définition usuelle requérant une mesurabilité forte.

Le crochet \langle, \rangle désigne soit le produit scalaire dans L^2 (ou $L^2(I \times \mathbb{R}^n)$), soit le crochet de dualité entre un espace et son dual.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Quelques commentaires sur les équations de Navier-Stokes

Nous nous intéressons aux équations de Navier-Stokes dans le cadre (restrictif) suivant : considérons un fluide visqueux, homogène et incompressible, remplissant l'espace \mathbb{R}^3 et non soumis à une force extérieure. Les équations décrivant l'évolution de sa vitesse $\vec{u}(t, x)$ (sans perte de généralité, nous prenons les constantes de viscosité et de densité égales à 1) au temps $t > 0$ et à la position $x \in \mathbb{R}^3$ sont données par :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} &= \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \vec{u}(0, \cdot) &= \vec{u}_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Ces équations ont les propriétés fondamentales suivantes :

- invariance par translation : si le couple $(\vec{u}(t, x), p(t, x))$ est solution sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ des équations de Navier-Stokes avec donnée initiale \vec{u}_0 alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $(\vec{u}(t, x - x_0), p(t, x - x_0))$ est solution sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ des mêmes équations avec donnée initiale $\vec{u}_0(x - x_0)$.

- invariance par dilatation : si le couple $(\vec{u}(t, x), p(t, x))$ est solution sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ des équations de Navier-Stokes avec donnée initiale \vec{u}_0 alors, pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda \vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x))$ est solution sur $(0, \frac{T}{\lambda^2}) \times \mathbb{R}^3$ des mêmes équations avec donnée initiale $\lambda \vec{u}_0(\lambda x)$.

- antisymétrie du terme bilinéaire : lorsque \vec{u} est solution du problème de Cauchy (1.1), pour \vec{v} et \vec{w} suffisamment régulières, on a : $\int \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} \, dx = - \int \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \, dx$.

1.1. COMMENTAIRES SUR NAVIER-STOKES

Lorsque la donnée initiale est homogène ($\forall \lambda > 0, \lambda \vec{u}_0(\lambda x) = \vec{u}_0(x)$), une question intéressante est de savoir s'il existe des solutions auto-similaires ($\vec{u}_\lambda(t, x) = \vec{u}(t, x)$) : en effet, dans le cas d'une réponse positive, elles permettent de lier les variables de temps et d'espace et d'écrire la solution sous la forme $\vec{u}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \vec{U}(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Les espaces à considérer (dits critiques) pour les exhiber sont dictés par la condition d'homogénéité. Le premier candidat naturel est l'espace L^3 mais il ne produit pas de solutions auto-similaires étant donné que seules les distributions nulles vérifiant la condition d'homogénéité appartiennent à L^3 .

Lorsque la donnée initiale est petite, de nombreux exemples d'espaces critiques (contenant une distribution homogène non triviale telle $|x|^{-1}$) garantissent l'existence de solutions auto-similaires via le formalisme des solutions "mild". Nous rappelons que cette méthode consiste à chercher des solutions sous la forme

$$\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \, ds \quad (1.2)$$

où \mathbb{P} désigne le projecteur de Leray-Hopf (défini comme projection orthogonale sur les vecteurs à divergence nulle), permettant ainsi d'occulter la pression. Comme exemples, citons les espaces de Lorentz $L^{3,\infty}$ étudiés par Barraza [1] et Meyer [47], de Morrey-Campanato homogènes $\dot{M}^{p,3}$ ($1 < p < 3$) par Taylor [61], de Besov homogènes $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}$ ($3 < p < \infty$) [13] et plus récemment BMO^{-1} par Koch et Tataru [29]. Cette méthode étant basée sur l'application de l'algorithme du point fixe de Picard, la construction de solutions globales et l'unicité assurent l'existence de solutions auto-similaires.

Dans le cas d'une donnée initiale grande, le formalisme des solutions "mild" devient inopérant dans les espaces critiques. L'idée est alors de construire des solutions faibles en s'inspirant de la théorie de Leray [38] : celle-ci repose sur une construction basée sur des estimations d'énergie préalables et des arguments de compacité, l'unicité ne pouvant se déduire directement du procédé de construction. Rappelons sa définition d'une solution faible et quelques propriétés vérifiées par la solution selon sa régularité :

Définition 1.1.1. *Soit $\vec{u}_0 \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. Une solution faible de Leray des équations de Navier-Stokes est une solution $\vec{u} \in (L^\infty L^2)^3 \cap (L^2 \dot{H}^1)^3$ définie sur $(0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ et satisfaisant l'inégalité d'énergie :*

$$\|\vec{u}(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \, dx \, ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2. \quad (1.3)$$

Par interpolation $\vec{u} \in (L^4 L^3)^3$ et la pression $p \in L^2 L^{\frac{3}{2}}$ peut être déduite de \vec{u} par la

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

formule

$$p = - \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j (u_i u_j) \quad (1.4)$$

Cette solution est au mieux $(L^4 L^3)^3 \cap (L^{\frac{8}{3}} L^4)^3$ mais n'est pas $(L^4 L^4)^3$. Si nous supposons cette régularité acquise alors l'inégalité d'énergie devient une égalité. En effet, dans ce cas la pression $p \in L^2 L^2$ et ainsi $\partial_t \vec{u} \in (L^2 \dot{H}^{-1})^3$: l'égalité $\frac{d}{dt} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_2^2 = 2 \langle \partial_t \vec{u}(t, \cdot), \vec{u}(t, \cdot) \rangle$ a donc un sens comme produit d'une fonction \dot{H}^{-1} contre \dot{H}^1 et l'égalité en découle. Cette égalité d'énergie peut être simplifiée en décrivant la distribution $\partial_t |\vec{u}|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2$ comme une divergence :

$$\partial_t |\vec{u}|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \partial_i (2\vec{u} \cdot \partial_i \vec{u} - |\vec{u}|^2 - 2p) u_i + R. \quad (1.5)$$

où $R = (|\vec{u}|^2 + 2p) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Si l'on suppose une régularité (encore) supérieure sur la solution $\vec{u} \in (L^8 L^4)^3$ alors le critère de Serrin [58] nous assure l'unicité de celle-ci.

Néanmoins, dans la recherche de solutions auto-similaires, la condition d'homogénéité fixée sur \vec{u}_0 implique, dès que $\vec{u}_0 \neq 0$, $\|\vec{u}_0\|_2 = +\infty$. L'inégalité d'énergie décrite par Leray est alors remplacée par celle d'énergie locale proposée par Scheffer [57] : il existe une mesure positive et localement finie μ telle que

$$\partial_t |\vec{u}|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 = \Delta |\vec{u}|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\vec{\nabla} \cdot p\vec{u} - \mu. \quad (1.6)$$

Cette mesure μ exprime le manque de régularité de la solution \vec{u} .

Contrairement à l'inégalité d'énergie locale de Leray, il n'est plus nécessaire d'avoir une condition de carré intégrable sur l'espace entier pour satisfaire à l'égalité d'énergie de Scheffer, comme le montre la définition suivante :

Définition 1.1.2. *Un champ de vecteurs \vec{u} défini sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ est dit adapté au critère de Caffarelli, Kohn et Nirenberg lorsque :*

- 1) \vec{u} est localement en temps et en espace $(L^\infty L^2)^3 \cap (L^2 \dot{H}^1)^3$
- 2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
- 3) Il existe une distribution $p \in \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$ telle que $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p$.
- 4) Localement en temps et en espace $\vec{u} \in (L^3 L^3)^3$ et la pression $p \in L^{\frac{3}{2}} L^{\frac{3}{2}}$.
- 5) \vec{u} vérifie l'égalité de Scheffer : dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$

$$\partial_t |\vec{u}|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 = \Delta |\vec{u}|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\vec{\nabla} \cdot p\vec{u} - \mu \quad (1.7)$$

où μ est une mesure positive et localement finie définie sur $((0, T) \times \mathbb{R}^3)$.

1.2. PRÉSENTATION DE CERTAINES APPROXIMATIONS EXISTANTES

L'intérêt principal de ces solutions est qu'elles satisfont au critère de Caffarelli, Kohn et Nirenberg (voir [9]).

Théorème 1.1.3. *Il existe deux constantes ϵ_0 et C_0 telles que si $T > 0$, si $x_0 \in \mathbb{R}^3$, si $0 < r^2 < t_0 < T$, si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, si \vec{u} est une solution adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ telle que*

$$\int \int_{|x-x_0| < r, t_0 - \frac{r^2}{4} < t < t_0} |\vec{u}(t, x)|^3 + |p(t, x)|^{\frac{3}{2}} \, dx dt < \epsilon r^2$$

alors

$$\sup_{|x-x_0| < r, t_0 - \frac{r^2}{4} < t < t_0} |\vec{u}(t, x)| < C_1 \epsilon^{\frac{1}{3}} r^{-1}$$

1.2 Présentation de certaines approximations existantes

1.2.1 Approximation de Leray

Pour construire des solutions faibles de Leray (puis des solutions adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg), nous ne pouvons traiter frontalement les équations de Navier-Stokes : en effet, pour construire des solutions $(L^\infty L^2 \cap L^2 \dot{H}^1)^3$, le produit $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})$ est moins régulier que $\Delta \vec{u}$ et le formalisme des solutions milds devient inopérant. Un moyen usuel pour contourner cette difficulté est de convoler l'un des deux facteurs du terme non linéaire afin de lui donner plus de régularité, comme le proposa Leray [38] :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_\epsilon &= \Delta \vec{u}_\epsilon - \vec{\nabla} \cdot (w_\epsilon * \vec{u}_\epsilon) \otimes \vec{u}_\epsilon - \vec{\nabla} p_\epsilon \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon &= 0. \\ \vec{u}_\epsilon(0, \cdot) &= \vec{u}_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

où $p_\epsilon = -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j w_\epsilon * u_{\epsilon,i} u_{\epsilon,j}$. La méthode du point fixe de Picard permet de trouver une solution $\vec{u}_\epsilon \in (L^\infty L^2 \cap L^2 \dot{H}^1)^3$ telle que $\partial_t \vec{u} \in (L^2 \dot{H}^{-1})^3$. Ainsi, l'égalité $\langle \partial_t \vec{u}_\epsilon, \vec{u}_\epsilon \rangle$ a un sens et l'égalité d'énergie suivante en découle :

$$\partial_t |\vec{u}_\epsilon|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\epsilon|^2 = \sum_{i=1}^3 \partial_i (2\vec{u}_\epsilon \cdot \partial_i \vec{u}_\epsilon - |\vec{u}_\epsilon|^2 w_\epsilon * u_{\epsilon,i} - 2p_\epsilon u_{\epsilon,i}) + R_\epsilon. \quad (1.9)$$

où $R_\epsilon = |\vec{u}_\epsilon|^2 w_\epsilon * (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon) + 2p_\epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon = 0$. Par un critère de compacité de Rellich, il existe une suite $\epsilon_k \rightarrow 0$ et une distribution $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ telle que \vec{u}_ϵ converge faiblement vers \vec{u}

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

dans $(L^2 \dot{H}^1)^3$ et fortement en norme L^2 dans tout compact contenu dans $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$. Par passage à la limite, nous obtenons :

$$\lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} \partial_t \vec{u}_{\epsilon_k} - \Delta \vec{u}_{\epsilon_k} + (w_{\epsilon_k} * \vec{u}_{\epsilon_k}) \cdot \vec{\nabla} \vec{u}_{\epsilon_k} + \vec{\nabla} p_{\epsilon_k} = \partial_t \vec{u} - \Delta \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} p = 0. \quad (1.10)$$

ainsi que

$$\lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} \partial_t |\vec{u}_\epsilon|^2 + \sum_{i=1}^{i=3} \partial_i (-2\vec{u}_\epsilon \cdot \partial_i \vec{u}_\epsilon + |\vec{u}_\epsilon|^2 w_{\epsilon,i} * u_{\epsilon,i} + 2p_\epsilon u_{\epsilon,i}) = \partial_t |\vec{u}|^2 + \sum_{i=1}^{i=3} \partial_i (-2\vec{u} \cdot \partial_i \vec{u} + |\vec{u}|^2 u_i + 2p u_i). \quad (1.11)$$

Comme il n'y a aucune raison (connue) pour que $|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\epsilon_k}|^2$ converge vers $|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2$, nous ne pouvons avoir mieux que $\lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\epsilon_k}|^2 = |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 + \mu$ où μ est une mesure localement finie : la solution construite vérifie donc l'égalité d'énergie locale de Scheffer. Pour de plus amples détails sur les passages à la limite, cf. [34].

Lorsque la donnée initiale \vec{u}_0 est homogène et non nulle (donc $\|\vec{u}_0\|_2 = +\infty$), Lemarié développe dans [33] une théorie sur les solutions faibles localement uniformément de carré intégrable (espace L^2_{uloc} d'énergie infinie) : son idée reprend celle de Leray et repose sur une estimation uniforme a priori de la vitesse approchée et de son gradient puis sur un passage à la limite utilisant un critère de compacité. Contrairement au cas L^2 , p_ϵ ne peut s'écrire sous la forme $p_\epsilon = -\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j (w_\epsilon * u_{\epsilon,i} u_{\epsilon,j})$ étant donné que le noyau de l'opérateur de convolution $\frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j$ décroît trop faiblement à l'infini. Toutefois, nous pouvons définir $\vec{\nabla} p_\epsilon$ car $\partial_k \frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j$ opère sur L^2_{uloc} . Ainsi, p_ϵ est défini à une constante près. Considérons l'égalité d'énergie

$$\partial_t |\vec{u}_\epsilon|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\epsilon|^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \partial_i (2\vec{u}_\epsilon \cdot \partial_i \vec{u}_\epsilon - |\vec{u}_\epsilon|^2 w_{\epsilon,i} * u_{\epsilon,i} - 2p_\epsilon u_{\epsilon,i}) + R_\epsilon. \quad (1.12)$$

où $R_\epsilon = |\vec{u}_\epsilon|^2 w_\epsilon * (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon) + 2p_\epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon = 0$.

En l'intégrant avec précaution contre des fonctions test, Lemarié obtient les estimations a priori suivantes :

Proposition 1.2.1. *Soit $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc}(\mathbb{R}^3))^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. Il existe une constante positive C_0 (indépendante de ϵ et de \vec{u}_0) et un temps $T_0 = \frac{1}{C_0^4 \max(1, \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)}$ tels que, pour tout $0 < t < T_0$:*

$$\|\vec{u}_\epsilon(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\epsilon\|_{L^2_{uloc} L^2(0,t)}^2 \leq C_0 \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2 \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.13)$$

Par un critère de compacité de Rellich, il construit une solution locale aux équations de Navier-Stokes :

1.2. PRÉSENTATION DE CERTAINES APPROXIMATIONS EXISTANTES

Théorème 1.2.2. *Soit $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc}(\mathbb{R}^3))^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. Il existe une constante positive C_0 (indépendante de ϵ et de \vec{u}_0) et un temps $T_0 = \frac{1}{C_0^4 \max(1, \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)}$ tels que les équations de Navier-Stokes aient une solution \vec{u} sur $(0, T_0) \times \mathbb{R}^3$, adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg et vérifiant pour tout $0 < t < T_0$:*

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2_{uloc}L^2(0,t)}^2 \leq C_0 \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2 \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-1} \quad (1.14)$$

Maintenant, si nous souhaitons étudier les équations de Navier-Stokes avec donnée initiale homogène de carré uniformément localement intégrable, la donnée initiale doit appartenir à $(\dot{M}^{2,3})^3$ (étant donné que $\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}} = \sup_{R>0} R \|\vec{u}_0(Rx)\|_{L^2_{uloc}}$).

P.G. Lemarié [35] montre alors (via un argument d'unicité) que la preuve de la proposition (1.2.1) s'adapte à n'importe quelle échelle et peut ainsi produire une solution sur tout intervalle de temps $(0, T)$ et finalement globale.

Théorème 1.2.3. *Soit $\vec{u}_0 \in (\dot{M}^{2,3})^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. Il existe une constante positive C_0 et un temps $T_0 = \frac{1}{C_0^4 \max(1, \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)}$ tels que les équations de Navier-Stokes aient une solution \vec{u} adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg sur $(0, +\infty)$ vérifiant les majorations suivantes :*

$$\sup_{R>0, x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \frac{1}{R + \sqrt{\frac{t}{T_0}}} \int_{\|x-x_0\| \leq R} |\vec{u}(t, x)|^2 dx \leq C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2$$

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, R>0} \sqrt{\frac{T_0}{t}} \int_0^t \int_{\|x-x_0\| \leq \sqrt{\frac{t}{T_0}}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 dx ds < C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2.$$

Autrement dit, le formalisme des solutions "mild" permet de construire une solution globale des équations de Navier-Stokes lorsque la donnée initiale est petite dans $(\dot{M}^{2,3})^3$ alors que le procédé de Leray en construit une lorsque celle-ci est grande, l'unicité en moins (d'où la question de l'auto-similarité pour de grandes données initiales).

1.2.2 Autres approximations

D'autres approximations ont été étudiées par divers auteurs : exposons rapidement certaines d'entre elles.

Dans le but de développer la théorie de Galerkin (équations de Navier-Stokes sur des domaines bornés), Chemin [15] a proposé le modèle de Friedrich, qui converge vers des

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

solutions de Navier-Stokes dans le cas L^2 .

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_N &= \Delta \vec{u}_N - P_N(\mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_N \otimes \vec{u}_N) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_N &= 0. \\ \vec{u}_N(0, \cdot) &= P_N \vec{u}_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

où $p_N = -P_N(\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j (u_{N,i} u_{N,j}))$ où P_N désigne le projecteur (en Fourier) sur $|\xi| \leq 2^N$.

L'égalité d'énergie locale associée est

$$\partial_t |\vec{u}_N|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_N|^2 = \Delta |\vec{u}_N|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}_N|^2 \vec{u}_N) - 2\vec{\nabla} \cdot (p_N \vec{u}_N) \quad (1.16)$$

Beirão da Vega [5] ajoute un bi-Laplacien (reprenant l'idée de J.-L. Lions) aux équations de Navier-Stokes pour rendre l'approximation plus régulière et construire de façon déterministe des solutions lorsque la donnée initiale est $(L^2)^3$ (cette approximation doit aussi certainement fournir des solutions lorsque la donnée initiale est dans $(L^2_{uloc})^3$ puis dans $(\dot{M}^{2,3})^3$) :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_\epsilon &= \Delta \vec{u}_\epsilon - \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\epsilon \otimes \vec{u}_\epsilon) - \epsilon \Delta^2 \vec{u}_\epsilon \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon &= 0. \\ \vec{u}_\epsilon(0, \cdot) &= \vec{u}_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

où $p_\epsilon = -\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j (u_{\epsilon,i} u_{\epsilon,j})$. L'égalité d'énergie locale associée est

$$\begin{aligned} \partial_t |\vec{u}_\epsilon|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\epsilon|^2 + 2\epsilon |\Delta \vec{u}_\epsilon|^2 &= \Delta |\vec{u}_\epsilon|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}_\epsilon|^2 + 2p_\epsilon) \vec{u}_\epsilon + 4\epsilon \sum_{j=1}^{j=3} \partial_j (\Delta \vec{u}_\epsilon \cdot \partial_j \vec{u}_\epsilon) \\ &\quad - 2\epsilon \Delta (|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\epsilon|^2) - 2\epsilon \Delta (\vec{u}_\epsilon \cdot \Delta \vec{u}_\epsilon) \end{aligned}$$

Partant d'une approche totalement différente, dans le but d'étudier des solutions statistiques spatialement homogènes dans les espaces à poids $L^2(w dx)$ (où le poids $w \in L^1$) qui requièrent une approche probabiliste (pour une position claire du problème des solutions statistiques homogènes, voir [2] ou [3]), Vishik et Fursikov [64] se sont intéressés à l'approximation suivante

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_\epsilon &= \Delta \vec{u}_\epsilon - \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon \otimes \vec{u}_\epsilon - \epsilon |\vec{u}_\epsilon|^4 \vec{u}_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon) \\ \vec{u}_\epsilon(0, \cdot) &= \vec{u}_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

La pression est ici donnée par $p_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon$ et la divergence de la vitesse n'est pas nécessairement nulle.

L'égalité d'énergie locale est

$$\partial_t |\vec{u}_\epsilon|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\epsilon|^2 + \frac{2}{\epsilon} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon|^2 + 2\epsilon |\vec{u}_\epsilon|^6 = \Delta |\vec{u}_\epsilon|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) - \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon |\vec{u}_\epsilon|^2 \quad (1.19)$$

1.3. PRÉSENTATION DES TRAVAUX DE LA THÈSE

A cet effet, notons que dans la démonstration originelle de Vishik et Fursikov, le pire terme à étudier permettant à l'approximation de converger était $\mathbb{E}(\int p_\epsilon \vec{\nabla} w \cdot \vec{u}_\epsilon)$ (où \mathbb{E} est l'espérance) mais s'annulait par invariance par translation de la loi de probabilité.

Ces modèles (ainsi que l'approximation de Leray) convergent d'une façon déterministe ou probabiliste vers les équations de Navier-Stokes et mènent à des égalités d'énergie locale : il y a aussi unicité des solutions de chaque approximation étant donné la forte régularité ajoutée (la projection sur les basses fréquences de Friedrich permet d'avoir un contrôle L^2L^∞ grâce aux inégalités de Bernstein, la convolution de Leray permet d'avoir un facteur $L^\infty L^\infty$ dans le terme non linéaire, le bi-Laplacien de Beirão da Vega un terme L^2H^2 et la pénalisation de Vishik et Fusikov est L^6L^6); toutefois, aucun d'eux ne préserve l'invariance par changement d'échelle propre aux équations de Navier-Stokes et la recherche de solutions auto-similaires ne peut s'effectuer à partir de ceux-ci.

1.3 Présentation des travaux de la thèse

Cette thèse est composée de deux parties dans lesquelles nous étudions deux modèles indépendants mais ayant des propriétés analogues aux équations de Navier-Stokes et soumis à une même idée : la construction de solutions globales faibles lorsque la donnée initiale est dans l'espace de Morrey-Campanato $(\dot{M}^{2,3})^3$ (nous reprenons les idées développées par Lemarié dans [34] puis [35] et décrites dans le paragraphe portant sur l'approximation de Leray).

D'une part, le deuxième chapitre reprend les travaux effectués lors de la première année pendant laquelle nous nous sommes intéressés à :

$$\begin{cases} \partial_t u &= \Delta u - [u, \Lambda]u \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases} \quad (1.20)$$

où Λ est l'opérateur de Calderón défini en Fourier par $\widehat{\Lambda f}(\xi) = |\xi| \hat{f}(\xi)$ (pour des précisions élémentaires sur cet opérateur on se référera à l'Annexe A et pour des informations plus complètes, l'oeuvre de Calderón ou tout manuscrit portant sur les équations quasi-géostrophiques [44] ou [68] peuvent être conseillés) et $[u, \Lambda]u = u\Lambda u - \Lambda(u^2)$.

Ce modèle vérifie les mêmes propriétés que celui des équations de Navier-Stokes (invariances par translation et dilatation, antisymétrie du terme bilinéaire sous certaines hypothèses de régularité grâce au théorème de Plancherel) mais possède une difficulté

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

supplémentaire liée à la présence d'opérateurs d'intégrale singulière. Notre objectif est donc d'appliquer à ce modèle les techniques d'analyse précédemment décrites et usuelles aux équations de Navier-Stokes (formalisme des solutions "mild", construction de solutions faibles) afin de mieux comprendre l'opérateur Λ . Les résultats obtenus via le formalisme des solutions "mild" (dans certains espaces critiques : L^3 , $L^{3,\infty}$ et $\dot{M}^{2,3}$) et pour la construction de solutions faibles de Leray le sont grâce à la continuité du projecteur de Leray dans ces espaces (remarquons qu'en espace, l'opérateur Λ s'écrit comme la somme de produits d'opérateurs de transformées de Riesz et de dérivation). Lorsque la donnée initiale est dans L^2_{uloc} , les commutateurs de Calderón ([11], voir Annexe A) $[\phi, \Lambda]$ (où ϕ est une fonction test) joueront un rôle majeur et permettront de gagner une dérivée dans les estimations a priori L^2_{uloc} et ainsi d'obtenir un contrôle du terme bilinéaire. Nous construisons ensuite une solution globale lorsque la donnée initiale est dans $\dot{M}^{2,3}$. Le principal résultat est l'obtention d'une inégalité d'énergie locale (comparable à l'égalité d'énergie locale de Scheffer) :

Théorème 1.3.1. *Soit $u_0 \in \dot{M}^{2,3}$.*

Soit $\phi \in \mathcal{D}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ telle que $\phi \geq 0$. La solution u du modèle scalaire vérifie l'inégalité d'énergie locale suivante :

$$2 \int \int |\vec{\nabla} u|^2 \phi \, dx \, dt \leq \int \int |u|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) \, dx \, dt - \frac{C}{2} \int \int \int u(t, x) u(t, y) (u(t, x) - u(t, y)) \frac{(\phi(t, x) - \phi(t, y))}{|x - y|^4} \, dx \, dy \, dt.$$

La constante C est donnée par $\Lambda u = C v.p. \int \frac{u(x-y) - u(x)}{|y|^{n+\beta}} \, dx$ pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (voir annexe A).

D'autre part, les trois chapitres suivants sont consacrés à la recherche de solutions auto-similaires pour les équations de Navier-Stokes. La stratégie est la suivante : une limite faible de solutions auto-similaires restant autosimilaire, l'idée est de considérer un modèle ayant des solutions plus régulières que celles de Navier-Stokes et de traiter l'auto-similarité de celles-ci. P.G. Lemarié a donc considéré une approximation des équations de Navier-Stokes préservant à la fois l'égalité d'énergie (pour avoir des solutions plus régulières) et le changement d'échelle (pour la recherche de solutions auto-similaires) : ces deux contraintes semblaient a priori difficilement compatibles puisque l'égalité d'énergie nécessite des estimations L^2 alors que la contrainte d'échelle est une estimation L^3 . Nous souhaitons construire de façon déterministe des solutions globales du modèle approché lorsque la donnée initiale est (grande) dans $(\dot{M}^{2,3})^3$, étudier leur unicité et enfin la convergence (au sens des distributions) de l'approximation vers les équations de Navier-Stokes :

1.3. PRÉSENTATION DES TRAVAUX DE LA THÈSE

dans le cas d'une triple réponse positive, cela assurerait l'existence de solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes pour une donnée initiale quelconque.

Le modèle considéré est une adaptation de celui de Vishik et Fursikov précédemment décrit.

Définition 1.3.2. *Nous appellerons équations modifiées de Vishik et Fursikov l'approximation suivante :*

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_{\alpha,\eta} &= \Delta \vec{u}_{\alpha,\eta} - (\vec{u}_{\alpha,\eta} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\alpha,\eta} - \alpha |\vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 \vec{u}_{\alpha,\eta} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}) \\ \vec{u}_{\alpha,\eta}(0, \cdot) &= \vec{u}_0. \end{cases} \quad (1.21)$$

La pression est toujours donnée par $p_{\alpha,\eta} = -\frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}$ et la divergence de la vitesse n'est pas nécessairement nulle (ce qui sera parfois noté abusivement $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta} \neq 0$).

Le changement d'échelle $\lambda \vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x)$ opère sur cette approximation et l'ajout de la pénalité égalité $-\alpha |\vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 \vec{u}_{\alpha,\eta}$ est une condition ($L^4 L^4$) bien connue permettant d'écrire l'égalité d'énergie locale :

$$\partial_t |\vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 + 2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 + \frac{2}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 + 2\alpha |\vec{u}_{\alpha,\eta}|^4 = \Delta |\vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 \vec{u}_{\alpha,\eta}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta} |\vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 \quad (1.22)$$

Remarquons enfin que le signe du terme $+\frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta})$ permet l'obtention par intégration par parties (à gauche dans l'égalité d'énergie locale) du terme positif $|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}|^2$ qui contrôlera le terme (habituellement nul) $(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}) |\vec{u}_{\alpha,\eta}|^2$: ce contrôle a un coût et nécessitera une condition liant α et η .

Le premier des trois chapitres est consacré à la convergence de ce modèle (lorsque $(\alpha, \eta) \rightarrow (0, 0)$) vers une solution adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg lorsque la donnée initiale est dans $(L^2)^3$. Comme lors de l'étude proposée par Vishik et Fursikov, le terme a priori non contrôlé est $p_{\alpha,\eta} \vec{u}_{\alpha,\eta}$ mais celui-ci ne s'annule pas lorsque nous cherchons la solution d'un point de vue déterministe. A priori, le seul contrôle connu sur la pression est une majoration en $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ dans $L^2 L^2$, terme non contrôlé lors du passage à la limite.

En utilisant le théorème de régularité maximale $L^p L^q$ du noyau de la chaleur (une preuve est donnée en Annexe B)

Théorème 1.3.3. *L'opérateur A défini par $f(t, x) \mapsto Af(t, x) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta f(s, \cdot) ds$ est borné de $L^p((0, T), L^q(\mathbb{R}^3))$ dans lui-même (indépendamment de T) pour tout $T \in (0, +\infty]$, $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$.*

et un changement de variable adapté (en temps), le principal résultat obtenu dans cette partie est le contrôle de la pression $p_{\alpha,\eta}$:

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

Proposition 1.3.4. *On peut écrire $p_{\alpha,\eta} = R_{\alpha,\eta} + S_{\alpha,\eta}$ où les deux termes sont uniformément contrôlés :*

$$\|R_{\alpha,\eta}\|_{L^{\frac{4}{3}}L^2} \leq C \text{ et pour } p \in [3; 4[, \|S_{\alpha,\eta}\|_{L^{\frac{p}{3}}L^{\frac{6p}{7p-12}}} \leq C\alpha \text{ où } C \text{ est une constante uniforme en } \alpha \text{ et } \eta.$$

Habituellement, la pression est exprimée grâce à des opérateurs d'intégrales singulières dont le noyau est porté par l'espace entier et représente l'une des difficultés des équations de Navier-Stokes : ici, elle dépend localement de la vitesse.

Dans le quatrième chapitre, la donnée initiale est dans $(L^2_{uloc})^3$: en approchant la donnée initiale, dans $(L^2_{uloc})^3$ muni de la topologie faible*, par une suite de champs de vecteurs à divergence nulle appartenant à $(L^2)^3$, uniformément contrôlée en norme L^2_{uloc} ([3]), nous construisons des solutions locales aux équations modifiées de Vishik et Fursikov : cependant, le temps d'existence de la solution dépend de η et tend vers 0 lorsque $\eta \rightarrow 0$ et le modèle ne converge donc pas dans L^2_{uloc} , contrairement à l'approximation de Leray. Nous remarquerons que nous ne pouvons traiter la pression comme auparavant car le théorème de régularité maximale du noyau de la chaleur ne s'applique pas dans L^2_{uloc} (le projecteur de Leray n'est d'ailleurs pas continu de $(L^2_{uloc})^3$ dans lui-même, par manque de décroissance à l'infini).

Dans le dernier paragraphe, nous obtenons le résultat partiel d'unicité suivant :

Proposition 1.3.5. *Soient \vec{u} et \vec{v} deux solutions des équations modifiées de Vishik et Fursikov avec la même donnée initiale $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc})^3$, telles que*

$$\vec{u} \in L^\infty((0, T), (L^2_{uloc})^3) \cap L^2((0, T), \dot{H}^1_{uloc})^3 \cap L^4((0, T), L^4_{uloc})^3 \text{ et}$$

$$\vec{v} \in L^\infty((0, T), (L^2_{uloc})^3) \cap L^2((0, T), \dot{H}^1_{uloc})^3 \cap L^4((0, T), L^4_{uloc})^3.$$

Sous la double contrainte $\alpha > 6$ et $\eta < \frac{\alpha}{6}$, $\vec{u} = \vec{v}$ sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$.

Bien entendu, ce résultat est insuffisant pour envisager des solutions auto-similaires (seules les grandes valeurs de α donnent une réponse positive). Son intérêt réside dans le fait que sous une hypothèse d'égalité d'énergie (L^4L^4) , nous obtenons un résultat d'unicité assez inattendu : c'était a priori le facteur limitant de cette approximation car la régularité L^8L^4 exigée par le critère de Serrin n'était pas vérifiée.

Dans le cinquième chapitre, la donnée initiale est dans $(\dot{M}^{2,3})^3$. En adaptant le changement d'échelle proposé par Lemarié dans [35], nous construisons des solutions globales aux équations modifiées de Vishik et Fursikov.

Le principal résultat de cette partie réside dans le fait que les solutions de cette approximation convergent vers des solutions adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg lorsque $(\alpha, \eta) \rightarrow (0, 0)$: pour ce faire, nous introduisons des espaces à poids de Muckenhoupt (voir [49], [50]) $L^p(wdx)$ où le poids $w(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\lambda}{2}}$ avec $\lambda \in]1; 2[$. La théorie

1.3. PRÉSENTATION DES TRAVAUX DE LA THÈSE

de Calderón-Zygmund [12] s'applique dans ces espaces et, en conséquence, le théorème de régularité du noyau de la chaleur (l'annexe B est consacrée à la démonstration de ces résultats). Nous obtenons un contrôle uniforme a priori de la pression dans $L^{\frac{3}{2}}L^{\frac{3}{2}}(w_1 dx)$ (w_1 étant sensiblement le même poids que w , sauf que $\lambda \in]\frac{3}{2}; 3[$), résultat essentiel permettant le passage à la limite comme dans le cas L^2 :

Proposition 1.3.6. *Soit $T > 0$ fixé. Pour $t \in (0, T)$ définissons*

$$a(t) = \int_0^t \int \frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}}} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^{\frac{3}{2}} w_1(x) \, dx \, ds = \int_0^t \int |p(x, s)|^{\frac{3}{2}} w_1(x) \, dx \, ds.$$

Il existe une constante C (indépendante de α , η et T) et un exposant $R > 1$ tels que :

$$a(t) \leq \frac{1}{2}\beta(t) + \frac{1}{2}\gamma(t) + C \int_0^t (\rho(s) + (\rho(s))^3 + (\rho(s))^R) \, ds. \quad (1.23)$$

$$\text{où } \rho(t) = \int |\vec{u}(t, x)|^2 w(x) \, dx$$

$$\beta(t) = \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 w(x) \, dx \, ds.$$

$$\gamma(t) = \int_0^t \int \alpha |\vec{u}(s, x)|^4 w(x) \, dx \, ds.$$

Le dernier paragraphe de ce chapitre revient sur quelques notions d'auto-similarité des équations de Navier-Stokes et fournit une classe d'unicité des solutions lorsque la donnée initiale est petite dans $(\dot{M}^{2,3})^3$.

Dans les chapitres 3, 4 et 5, nous considérons toujours une donnée initiale à divergence nulle, dans le but d'étudier la convergence des solutions des équations modifiées de Vishik et Fursikov vers celles de Navier-Stokes. Bien entendu, cette condition n'est utile que lors de ce passage à la limite et n'intervient pas lors de la construction de solutions des équations (1.21). Autrement dit, nous pouvons, a posteriori, nous affranchir de cette condition dans le chapitre 4 vu que la convergence n'est pas assurée dans l'espace L^2_{uloc} .

Chapitre 2

Étude d'un modèle scalaire

Dans ce chapitre, nous allons étudier le modèle scalaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u &= \Delta u - [u, \Lambda]u \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $[u, \Lambda]u = u\Lambda u - \Lambda(u^2)$.

2.1 Formalisme des solutions "mild"

Dans cette partie, nous chercherons à trouver des solutions dans les espaces suivants : L^3 , $L^{3,\infty}$ et $\dot{M}^{2,3}$. On rappelle que ces trois espaces sont critiques pour les équations considérées.

Définition 2.1.1.

Un espace de Banach B est dit critique pour les équations 2.1 si pour tout $\lambda > 0$, tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et tout $f \in B$, nous avons $\|f(x - x_0)\|_B = \|f\|_B$ et $\lambda\|f(\lambda x)\|_B = \|f\|_B$.

Ainsi, nous ne pouvons espérer mieux que des solutions globales avec donnée initiale petite ou des solutions locales lorsque celles-ci appartiennent à la fermeture des fonctions test dans L^3 , $L^{3,\infty}$ et $\dot{M}^{2,3}$ (dans le premier cas, c'est évidemment L^3).

Via le formalisme des solutions "mild", nous chercherons des solutions à l'équation intégrale équivalente

$$u = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}[u, \Lambda]u \, ds \quad (2.2)$$

et noterons dans cette partie B l'opérateur bilinéaire

$$B(u, v) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}[u, \Lambda]v \, ds. \quad (2.3)$$

2.1. FORMALISME DES SOLUTIONS "MILD"

La recherche de celles-ci s'effectue par la méthode du point fixe de Picard, basée sur l'application du lemme suivant :

Lemme 2.1.2.

Soit X un espace de Banach et B un opérateur bilinéaire de $X \times X \mapsto X$ tel que : $(x, y) \in X^2 \quad \|B(x, y)\|_X \leq C_0 \|x\|_X \|y\|_X$. Soit $x_0 \in X$ tel que $\|x_0\|_X < \frac{1}{4C_0}$. Alors l'équation $x = x_0 + T(x, x)$ a au moins une solution ; si elle vérifie de plus $\|x\|_X < \frac{1}{2C_0}$ alors elle est unique.

Démonstration. On note $F : x \mapsto x_0 + B(x, x)$. Grâce à la résolution de l'inéquation $C_0 R^2 - R + \|x_0\|_X \leq 0$, F envoie la boule fermée $\overline{B}(0, R)$ dans $\overline{B}(0, R)$ avec $R = \frac{1 + \sqrt{1 - 4C_0 \|x_0\|_X}}{2C_0}$ (la racine carrée est bien définie grâce à la condition sur $\|x_0\|_X$).

Pour $(h, g) \in (\overline{B}(0, R))^2$,

$$\begin{aligned} \|F(h) - F(g)\|_X &= \|B(h - g, h) + B(g, h - g) + L(h) - L(g)\|_X \\ &\leq C_0 (\|h\|_X + \|g\|_X) \|h - g\|_X \\ &\leq 2C_0 R \|h - g\|_X \end{aligned}$$

Comme $2C_0 R < 1$, F est contractante dans la boule $\overline{B}(0, R)$, d'où une unique solution dans cette boule. L'unicité est préservée si $\|x\|_X < \frac{1}{2C_0}$.

En effet, si x et y sont deux solutions distinctes satisfaisant $\|x\|_X < \frac{1}{2C_0}$ et $\|y\|_X < \frac{1}{2C_0}$ alors : $\|x - y\|_X \leq C_0 (\|x\|_X + \|y\|_X) \|x - y\|_X < \|x - y\|_X$, ce qui donne la contradiction souhaitée. \square

La difficulté majeure est de trouver l'espace de Banach X dans lequel le lemme précédent s'applique. Lorsque la donnée initiale $u_0 \in L^3$, l'espace naturel de résolution est $L^\infty L^3$.

Revenons un instant sur les équations de Navier-Stokes. Kato [27] a montré qu'une approche directe dans $L^\infty L^3$ ne convenait pas : en effet, via l'utilisation du projecteur de Leray pour se séparer de la pression, on a le contrôle suivant :

$$\|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})\|_3 \leq \frac{C}{t-s} \|\vec{u}\|_3 \|\vec{v}\|_3 \quad (2.4)$$

En effet, si $K_{i,j}$ désigne une composante de la matrice de l'opérateur de convolution (en espace) $e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla}$ alors $\|K_{i,j}\|_r \leq C(t-s)^{(-2+\frac{3}{2r})}$. Il faut donc chercher des solutions dans un espace plus petit (Oru [53] a d'ailleurs montré que l'opérateur bilinéaire n'était pas borné dans $\mathcal{C}([0, T], (L^3)^3)$). Néanmoins, il est borné dans

$$\{\vec{f} \in \mathcal{C}([0, T], (L^3(\mathbb{R}^3))^3) / \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_6 < +\infty\}.$$

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

Dans le cas qui nous intéresse, non seulement devons-nous majorer des termes du type $e^{(t-s)\Delta}\Lambda(uv)$ mais aussi ceux de type $e^{(t-s)\Delta}u\Lambda v$. L'espace X dans lequel le théorème du point fixe sera appliqué devra donc porter une condition sur u et l'autre sur Λu .

2.1.1 Donnée initiale dans L^3

Nous souhaitons montrer que l'espace

$$X_T = \{u \in \mathcal{C}([0, T], L^3) \mid \sqrt{t}\Lambda u \in \mathcal{C}([0, T], L^3) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t}\|\Lambda u\|_3 = 0\} \quad (2.5)$$

est un bon espace de résolution de l'équation intégrale.

Remarque : Lorsque $u \in L^3$, Λu a bien un sens dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. On peut le faire en passant en Fourier : si $\phi \in \mathcal{S}$, pour $|\xi| \geq 1$ on a $|\xi|\widehat{\phi} \in \mathcal{S}$ tandis que si $|\xi| < 1$, la décomposition de Littlewood-Paley nous assure que $\mathcal{F}^{-1}(|\xi|w) \in L^{\frac{3}{2}}$ lorsque $\text{Supp} w \in B(0, 1)$, car on somme sur les indices négatifs.

En nous inspirant de la méthode développée par Kato, les espaces de substitution (à l'espace naturel) dans lesquels s'appliqueront la méthode du point fixe semblent être

$$Y_T = \{u \in L^\infty(]0, T[, L^6) \mid \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}}\|u\|_6 < \infty \text{ et } \sup_{0 < t < T} \sqrt{t}\|\Lambda u\|_3 < \infty\}$$

pour une donnée initiale grande et

$$Y_\infty = \{u \in L^\infty(]0, \infty[, L^6) \mid \sup_{0 < t} t^{\frac{1}{4}}\|u\|_6 < \infty \text{ et } \sup_{0 < t} \sqrt{t}\|\Lambda u\|_3 < \infty\}$$

lorsque la donnée initiale est petite.

Avant d'appliquer le théorème du point fixe, pour s'assurer que Y_T est un espace potentiel de résolution, nous devons répondre à la question suivante : Si $u \in L^3$ et $\Lambda u \in L^3$, a-t-on $u \in L^6$? La réponse est donnée dans les deux lemmes suivants.

Lemme 2.1.3. $\forall \alpha \in]0, 1[, \|\Lambda^\alpha u\|_3 \leq C\|\Lambda u\|_3^\alpha \|u\|_3^{1-\alpha}$.

Démonstration. Par passage dans les transformées de Fourier dans \mathcal{S}' , nous avons l'égalité suivante $\Lambda^\alpha u = -\int_0^\infty \Lambda^{\alpha+2} e^{t\Delta} u \, dt$.

Soit $A > 0$. Lorsque $t \leq A$, $\|\Lambda^{\alpha+1} e^{t\Delta} \Lambda u\|_3 \leq Ct^{-\frac{\alpha+1}{2}} \|\Lambda u\|_3$.

Lorsque $t > A$, $\|\Lambda^{\alpha+2} e^{t\Delta} u\|_3 \leq Ct^{-1-\frac{\alpha}{2}} \|u\|_3$

On découpe $\int_0^\infty = \int_0^A + \int_A^\infty$. Par l'inégalité de Minkowski, on a successivement

$$\int_0^A \|\Lambda^{\alpha+1} e^{t\Delta} \Lambda u\|_3 \, dt \leq CA^{\frac{1-\alpha}{2}} \|\Lambda u\|_3 \quad (2.6)$$

2.1. FORMALISME DES SOLUTIONS "MILD"

et

$$\int_A^\infty \|\Lambda^{\alpha+2} e^{t\Delta} u\|_3 dt \leq C' A^{-\frac{\alpha}{2}} \|u\|_3 \quad (2.7)$$

Choisissons A tel que $C' A^{-\frac{\alpha}{2}} \|u\|_3 = C A^{\frac{1-\alpha}{2}} \|\Lambda u\|_3$, soit $A = K \|u\|_3^2 \|\Lambda u\|_3^{-2}$ où K est une constante dépendant de C et C' .

Des inégalités (2.6) et (2.7), on obtient alors $\|\Lambda^\alpha u\|_3 \leq K \|\Lambda u\|_3^\alpha \|u\|_3^{1-\alpha}$. \square

Lemme 2.1.4. *Si $u \in L^3$ et $\Lambda u \in L^3$ alors $u \in L^6$.*

Démonstration. On écrit que $u = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} u$. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ envoie L^3 dans L^6 . Cependant, nous ne pouvons utiliser directement le produit de convolution $L^3 * L^{\frac{6}{5}} \hookrightarrow L^6$ étant donné que le noyau de l'opérateur $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ est en $|x|^{-\frac{5}{2}}$ (et n'appartient donc pas à L^3).

Néanmoins $\Lambda^{-\frac{1}{2}} u \in L^{\frac{6}{5}, \infty}$ (en utilisant la caractérisation $L^{\frac{6}{5}, \infty} = L^{\frac{6}{5}, *}$: $|\{x, |x|^{-\frac{5}{2}}\} > \lambda\}| = |\{x, |x| < \lambda^{\frac{2}{5}}\}| \leq C \lambda^{\frac{6}{5}}$). Comme $L^{\frac{6}{5}, \infty} * L^{3,3} \hookrightarrow L^{6,3} \subset L^6$, nous obtenons bien que $u \in L^6$. \square

Nous pouvons maintenant passer à l'application du point fixe :

Proposition 2.1.5. *Soit $u_0 \in L^3$. Alors l'équation intégrale*

$$u = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} [u, \Lambda] u ds \quad (2.8)$$

peut être résolue dans les deux cas suivants :

A) (Solution locale) *Il existe un temps $T = T(u_0)$ telle que la suite définie par*

$$u^0 = e^{t\Delta} u_0 \text{ et } u^{n+1} = e^{t\Delta} u_0 - B(u^n, u^n) \quad (2.9)$$

soit bornée et converge vers une unique solution u dans Y_T .

B) (Solution globale) *Il existe une constante ϵ_0 telle que si $\|u_0\|_3 \leq \epsilon_0$ alors la suite définie par*

$$u^0 = e^{t\Delta} u_0 \text{ et } u^{n+1} = e^{t\Delta} u_0 - B(u^n, u^n) \quad (2.10)$$

est bornée et converge vers une unique solution u dans Y_∞ .

Démonstration. Les constantes C peuvent varier d'une ligne à l'autre. Seules les constantes indexées joueront un rôle dans la discussion finale en vue de l'application du lemme (2.1.2).

i) Donnée initiale.

On écrit : $\|e^{t\Delta} u_0\|_6 \leq C t^{-\frac{1}{4}} \|u_0\|_3$ (en utilisant $L^{\frac{6}{5}} * L^3 \hookrightarrow L^6$) et $\|\Lambda e^{t\Delta} u_0\|_3 \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|u_0\|_3$.

Donc il existe C_1 tel que

$$\|\Lambda e^{t\Delta} u_0\|_{Y_T} \leq C_1 \|u_0\|_3 \quad (2.11)$$

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

ii) Étudions $A_1(t) = \|\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Lambda(uv) \, ds\|_6$. On utilise toujours l'inégalité de Young $L^3 * L^{\frac{6}{5}} \hookrightarrow L^6$: celle-ci permet d'écrire

$$\|e^{(t-s)\Delta} \Lambda(uv)\|_6 \leq C(t-s)^{-\frac{3}{4}} \|uv\|_3 \leq C(t-s)^{-\frac{3}{4}} \|u\|_6 \|v\|_6.$$

Donc, par l'inégalité de Minkowski,

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} A_1(t) \leq C \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|u\|_6 \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|v\|_6 \right) \quad (2.12)$$

iii) Étudions $A_2(t) = \|\int_0^t e^{(t-s)\Delta} u \Lambda v\|_6$.

Comme $u \in L^6$ et $\Lambda v \in L^3$, alors : $u \Lambda v \in L^2$.

D'après l'inégalité de Young (en utilisant $L^{\frac{3}{2}} * L^2 \hookrightarrow L^6$), on obtient :

$$\|e^{(t-s)\Delta} u \Lambda v\|_6 \leq C(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_6 \|\Lambda v\|_3 \quad (2.13)$$

Donc

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} C(t) \leq C \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|u\|_6 \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} \|\Lambda v\|_3 \right) \quad (2.14)$$

iv) Étudions $A_3(t) = \|\int_0^t \Lambda e^{(t-s)\Delta} \Lambda(uv) \, ds\|_3$.

On ne peut étudier directement le noyau de l'opérateur $e^{(t-s)\Delta} \Delta$, celui-ci menant à une intégrale divergente. On décompose alors l'opérateur $\Lambda = \sum_{i=1}^{i=3} \partial_j R_j$ où R_j désignent les transformées de Riesz.

On écrit : $\Lambda e^{(t-s)\Delta} \Lambda(uv) = \sum_{i=1}^{i=3} \Lambda e^{(t-s)\Delta} R_i[(\partial_i u)v + (\partial_i v)u]$. Sachant que R_i est un opérateur de Calderón-Zygmund, il est continu de L^3 dans L^3 . On obtient alors la majoration suivante (en utilisant $L^{\frac{6}{5}} * L^2 \hookrightarrow L^3$) :

$$\|\Lambda e^{(t-s)\Delta} \Lambda(uv)\|_3 \leq C(t-s)^{-\frac{3}{4}} [\|u\|_6 \|\partial_i v\|_3 + \|v\|_6 \|\partial_i u\|_3].$$

Pour revenir à l'opérateur Λ , il suffit d'écrire $\partial_j v = -i R_j \Lambda v$ (toujours par continuité des opérateurs de Riesz dans L^3), nous obtenons :

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} A_3(t) \leq C \left[\left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|u\|_6 \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} \|\Lambda v\|_3 \right) + \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|v\|_6 \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} \|\Lambda u\|_3 \right) \right] \quad (2.15)$$

v) Étudions enfin $A_4(t) = \|\int_0^t \Lambda e^{(t-s)\Delta} u \Lambda v \, ds\|_3$.

On utilise la majoration $\|\Lambda e^{(t-s)\Delta} u \Lambda v\|_3 \leq C(t-s)^{-\frac{3}{4}} \|u\|_6 \|\Lambda v\|_3$ et ainsi

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} A_4(t) \leq C \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|u\|_6 \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} \|\Lambda v\|_3 \right) \quad (2.16)$$

Remarque : dans les évaluations de A_1 à A_4 , T peut être fini ou infini.

2.1. FORMALISME DES SOLUTIONS "MILD"

vi) Application du lemme (2.1.2).

On a donc montré qu'il existait deux constantes C_0 et C_1 telles que (pour tout $T \leq +\infty$) :

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{Y_T} \leq C_1\|u_0\|_3.$$

$$\|B(u, v)\|_{Y_T} \leq C_0\|u\|_{Y_T}\|v\|_{Y_T}.$$

Cas B de la proposition : si ϵ_0 est tel que $\epsilon_0 < \frac{1}{4C_0C_1}$ alors il existe une unique solution $u \in Y_\infty$.

Cas A de la proposition : nous devons montrer que $\lim_{T \rightarrow 0} \|e^{t\Delta}u_0\|_{Y_T} \rightarrow 0$.

D'un côté, $\lim_{T \rightarrow 0} \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|e^{t\Delta}u_0\|_6 = 0$. En effet, on écrit

$$t^{\frac{1}{4}} \|e^{t\Delta}u_0\|_6 \leq (t^{\frac{1}{2}} \|e^{t\Delta}u_0\|_\infty)^{\frac{1}{2}} \|e^{t\Delta}u_0\|_3;$$

on a $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|e^{t\Delta}u_0\|_3 = 0$ lorsque $u_0 \in L^3 \cap L^\infty$ d'où la limite par équicontinuité de la famille d'opérateurs $(t^{\frac{1}{2}} e^{t\Delta} f)$ de L^3 dans L^∞ et densité de $L^3 \cap L^\infty$ dans L^3 .

De même, $\lim_{T \rightarrow 0} \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} \|e^{t\Delta}\Lambda u_0\|_3 = 0$. En effet $u_0 \mapsto t^{\frac{1}{2}} e^{t\Delta}\Lambda u_0$ est équicontinue de L^3 dans L^3 . Si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ alors $\Lambda u_0 \in L^3$. Comme $\|\sqrt{t}\Lambda e^{t\Delta}u_0\|_3 \leq \sqrt{t}\|\Lambda u_0\|_3$ expression tendant vers 0 lorsque $t \rightarrow 0$, nous pouvons alors conclure par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ dans $L^3(\mathbb{R}^3)$.

Il existe donc $T_0 = T(u_0)$ tel que la condition $4C_0\|e^{t\Delta}u_0\|_{Y_{T_0}} < 1$ soit satisfaite. \square

Proposition 2.1.6. *La solution précédemment construite appartient à X_T (respectivement X_∞).*

Démonstration. a) Montrons que $u \in L^\infty((0, T), L^3)$.

D'une part $\|e^{t\Delta}u_0\|_{L^\infty((0, T), L^3)} = \|u_0\|_3$,

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|e^{(t-s)\Delta}\Lambda(uv)\|_3 &\leq C(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|uv\|_3 \\ &\leq C(t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}} \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}}\|u\|_6 \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}}\|v\|_6 \right). \end{aligned}$$

On conclut grâce à $\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}} ds = \pi$.

Enfin $\|e^{(t-s)\Delta} u\Lambda v\|_3 \leq C(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u\|_6\|\Lambda v\|_3$

Donc : $\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta} u\Lambda v ds\|_3 \leq C\|u\|_{Y_T}\|v\|_{Y_T}$ étant donné que $\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{4}}s^{-\frac{3}{4}} ds = C$.

b) Il reste à étudier la continuité.

Par récurrence sur l'entier n , nous vérifions que chaque terme de la suite u^n (définie dans la proposition précédente) appartient à l'espace

$$Z_T = \{f \in Y_T \mid \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{4}}\|f\|_6 = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{2}}\|\Lambda f\|_3 = 0, f \in \mathcal{C}([0, T], L^3) \text{ et } \sqrt{t}\Lambda f \in \mathcal{C}([0, T], L^3)\}.$$

En effet, d'une part $u^0 \in Z_T$ (car u_0 peut être approché par des fonctions régulières) et B envoie $\mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3)$ dans Z_T . Comme Z_T est fermé dans Y_T on

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

$L^\infty((0, T), L^3)$ alors par densité des fonctions test dans Z_T : ainsi B envoie $Z_T \times Z_T$ dans Z_T et la limite $u \in X_T$. \square

2.1.2 Donnée initiale dans $L^{3,\infty}$

Le cas $L^{3,\infty}$ se traite de façon similaire.

i) Tout d'abord, on montre que lorsque $u \in L^{3,\infty}$ et si $\Lambda u \in L^{3,\infty}$ alors $u \in L^{6,\infty}$ en utilisant la caractérisation par interpolation $L^{3,\infty} = [L^1, L^\infty]_{\frac{1}{3}, \infty}$ muni de la norme $\|f\|_{3,\infty} = \sup_{\lambda>0} \min_{f=g+h} \lambda^{\frac{2}{3}} \|g\|_1 + \lambda^{-\frac{1}{3}} \|h\|_\infty$.

ii) Les mêmes estimations montrent que nous avons un contrôle des termes initial et bilinéaire dans

$$\{u \mid \sup_{0<t} t^{\frac{1}{4}} \|u(t, \cdot)\|_{L^{6,\infty}} < \infty \text{ et } \sup_{0<t} \sqrt{t} \|\Lambda u(t, \cdot)\|_{L^{3,\infty}} < \infty\}$$

d'où l'existence d'une unique solution globale pour une donnée initiale petite dont le contrôle est aussi assuré dans $L^\infty L^{3,\infty}$. Ceci montre que ces équations sont adaptées à la recherche de solutions auto-similaires comme le sont celles de Navier-Stokes.

iii) On remarque enfin qu'on ne peut plus "relever" u_0 , les fonctions continues à support compact n'étant pas denses dans $L^{3,\infty}$. On a seulement $e^{t\Delta} u_0 \in \mathcal{C}_*([0, T], L^{3,\infty})$. En effet, il suffit de montrer que $e^{t\Delta} u_0 \rightarrow u_0$ dans \mathcal{S}' lorsque $t \rightarrow 0$, ce qui est le cas en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley et

$$e^{t\Delta} - Id = \int_0^t \Delta e^{s\Delta} ds.$$

2.1.3 Espace $\dot{M}^{2,3}$

Les espaces de Morrey-Campanato vont jouer un rôle important dans les futurs chapitres de ce livre. Voilà pourquoi nous avons choisi de vérifier que le formalisme des solutions milds était adapté à cet espace. Nous rappelons leur définition :

Définition 2.1.7. *L'espace $\dot{M}^{2,3}(\mathbb{R}^3)$ est l'espace des fonctions localement de carré intégrable vérifiant*

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n; 0 < R < \infty} R^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(B(x_0, R))} < \infty. \quad (2.17)$$

Nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition 2.1.8. *Soit $u_0 \in \dot{M}^{2,3}(\mathbb{R}^3)$.*

A) (Solution globale) *Il existe une constante ϵ telle que si $\|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon$ alors la suite*

$$u^0 = e^{t\Delta} u_0 \text{ et } u^{n+1} = e^{t\Delta} u_0 - B(u^n, u^n) \quad (2.18)$$

2.1. FORMALISME DES SOLUTIONS "MILD"

reste bornée et converge vers une unique solution u dans l'espace de Banach A_∞ défini par :

$A_\infty = \{u \in L^2_{loc}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3); \sup_{0 < t} t^{\frac{1}{4}} \|u(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{4,6}} < \infty \text{ et } \sup_{0 < t} t^{\frac{1}{2}} \|\Lambda u(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{2,3}} < \infty\}$ et muni de la norme :

$$\|u\|_{A_\infty} = \sup_{0 < t} t^{\frac{1}{4}} \|u(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{4,6}} + \sup_{0 < t} t^{\frac{1}{2}} \|\Lambda u(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{2,3}}.$$

Cette solution u vérifie $\sup_{0 < t} \|u(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{2,3}} < \infty$.

B) (Solution locale) Si $u_0 \in \tilde{M}^{2,3}(\mathbb{R}^3)$ (adhérence des fonctions test dans $\dot{M}^{2,3}$) alors il existe un temps $T = T(u_0)$ telle que la u^n reste bornée et converge vers une unique solution u dans A_T défini par :

$A_T = \{u \in L^2_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^3); \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|u(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{4,6}} < \infty \text{ et } \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} \|\Lambda u(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{2,3}} < \infty\}$ et muni de la norme :

$$\|u\|_{A_T} = \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|u(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{4,6}} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} \|\Lambda u(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{2,3}}.$$

Cette solution $u \in \mathcal{C}([0, T], \dot{M}^{2,3})$.

Nous aurons besoin, au cours de la démonstration, des lemmes suivants :

Lemme 2.1.9. Si $f \in \dot{M}^{\frac{4}{3},2}$ alors $\|e^{t\Delta} f\|_\infty \leq C_1 t^{-\frac{3}{4}} \|f\|_{\dot{M}^{\frac{4}{3},2}}$.

Démonstration. Notons K le noyau de la chaleur.

On écrit

$$\begin{aligned} \left| \langle t^{-\frac{3}{2}} K\left(\frac{y}{\sqrt{t-s}}\right), f(x-y) \rangle_{dy} \right| &= \left| \langle K(z), f(x-\sqrt{t}z) \rangle_{dz} \right| \leq \|K\|_{WL^4_{uloc}} \|f(\sqrt{t}z)\|_{L^{\frac{4}{3}}_{uloc}} \\ &\leq C_1 t^{-\frac{3}{4}} \|f\|_{\dot{M}^{\frac{4}{3},2}} \end{aligned}$$

Ici WL^4_{uloc} désigne le préduel de l'espace $L^{\frac{4}{3}}_{uloc}$ (la définition de ces espaces est donnée dans Liste des espaces). Comme le noyau K appartient à l'espace de Schwartz, il est borné en norme WL^4_{uloc} . Enfin, nous avons utilisé le fait que la norme L^p_{uloc} est invariante par translation. \square

Lemme 2.1.10. Si $f \in \dot{M}^{p,q}$ alors $\|e^{t\Delta} f\|_{\dot{M}^{p,q}} \leq \|f\|_{\dot{M}^{p,q}}$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $L^1 * \dot{M}^{p,q} \rightarrow \dot{M}^{p,q}$: Par l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned} \left\| \int |f(y)g(x-y)| \, dy \right\|_{L^p(B(x_0,R))} &\leq \int |f(y)| \|g(x-y)\mathbb{1}_{x \in B(x_0,R)}\|_p \, dy \\ &\leq R^{3(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|_{\dot{M}^{p,q}} \|f\|_1, \end{aligned}$$

d'où le lemme (nous avons utilisé l'invariance par translation de la norme $\dot{M}^{p,q}$). \square

Lemme 2.1.11. Pour tout $p \geq \frac{4}{3}$, $\|e^{t\Delta} f\|_{\dot{M}^{p,\frac{3p}{2}}} \leq C(p) t^{-\frac{3}{4} + \frac{1}{p}} \|f\|_{\dot{M}^{\frac{4}{3},2}}$.

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

Démonstration. Soit B une boule de rayon R ,

$$\begin{aligned} \int_B |e^{t\Delta} f|^p \, dx &= \int_B |e^{t\Delta} f|^{\frac{4}{3}} |e^{t\Delta} f|^{p-\frac{4}{3}} \, dx \\ &\leq \|e^{t\Delta} f\|_{\infty}^{p-\frac{4}{3}} \|e^{t\Delta} f\|_{\dot{M}^{\frac{4}{3},2}}^{\frac{4}{3}} R \\ &\leq R(C_1 t)^{-\frac{3}{4}(p-\frac{4}{3})} \|f\|_{\dot{M}^{\frac{4}{3},2}}^p \text{ d'après le lemme (2.1.9)} \end{aligned}$$

On obtient bien $\|e^{t\Delta} f\|_{\dot{M}^{p,\frac{3p}{2}}} \leq C(p) t^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{p}} \|f\|_{\dot{M}^{\frac{4}{3},2}}$. \square

Démonstration. (de la proposition)

i) Terme initial $e^{t\Delta} u_0$. Montrons qu'il appartient à A_T (T éventuellement infini).

a) Estimons $\|e^{t\Delta} u_0\|_{\dot{M}^{4,6}}$.

De $\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^4(B(x_0,R))} \leq \sqrt{\|e^{t\Delta} u_0\|_{\infty} \|e^{t\Delta} u_0\|_{L^2(B(x_0,R))}}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz), il vient :

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta} u_0\|_{\dot{M}^{4,6}} &\leq \sqrt{\|e^{t\Delta} u_0\|_{\infty} \|e^{t\Delta} u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}} \\ &\leq \sqrt{\|e^{t\Delta} u_0\|_{\infty} \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}} \end{aligned}$$

b) Majorons alors $\|e^{t\Delta} u_0\|_{\infty}$.

$$\begin{aligned} | \langle t^{-\frac{3}{2}} K(\frac{y}{\sqrt{t}}, u_0(x-y)) \rangle_{dy} | &= | \langle K(z), u_0(x-\sqrt{t}z) \rangle_{dz} | \\ &\leq \|K\|_{W L^2_{uloc}} \|u_0(\sqrt{t}z)\|_{L^2_{uloc}} \end{aligned}$$

Comme $\|u_0(\sqrt{t}z)\|_{L^2(B(x_0,1))} = t^{-\frac{3}{4}} \|u_0\|_{L^2(B(x_0,\sqrt{t}))}$, nous avons $\|u_0(\sqrt{t}z)\|_{L^2_{uloc}} \leq t^{-\frac{1}{2}} \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$, soit :

$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}} \|e^{t\Delta} u_0\|_{\infty} \leq C \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$ et pour la même constante C :

$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|e^{t\Delta} u_0\|_{\dot{M}^{4,6}} \leq \sqrt{C} \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$.

c) Du lemme (2.1.10), on a aussi $\|e^{t\Delta} \Lambda u_0\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$.

ii) Étude du terme bilinéaire $B(u, v)$.

Pour le premier terme, on écrit :

$$\begin{aligned} \|e^{(t-s)\Delta} u \Lambda v\|_{\dot{M}^{4,6}} &\leq C(4) (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u \Lambda v\|_{\dot{M}^{\frac{4}{3},2}} \text{ d'après le lemme (2.1.11)} \\ &\leq C(4) s^{-\frac{3}{4}} (t-s)^{-\frac{1}{2}} (\sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{4}} \|u(s, \cdot)\|_{\dot{M}^{4,6}}) \\ &\quad (\sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{2}} \|\Lambda v(s, \cdot)\|_{\dot{M}^{2,3}}) \text{ (inégalité de Hölder)} \end{aligned}$$

La majoration du terme $\|e^{(t-s)\Delta} \Lambda(uv)\|_{\dot{M}^{4,6}}$ en découle immédiatement.

On écrit $\Lambda(uv) = \sum_{i=1}^{i=3} R_i(u\partial_i v + v\partial_i u)$ et on utilise la continuité des opérateurs de Riesz dans $\dot{M}^{p,q}$ (voir Annexe A). Nous nous ramenons alors au cas précédent (on utilise encore la continuité des opérateurs de Riesz pour revenir de ∂_i à Λ).

Majorons $\|\Lambda e^{(t-s)\Delta}(u\Lambda v)\|_{\dot{M}^{2,3}}$. On écrit :

$$\Lambda e^{(t-s)\Delta}(u\Lambda v) = \Lambda e^{\frac{(t-s)\Delta}{2}} e^{\frac{(t-s)\Delta}{2}}(u\Lambda v) \tag{2.19}$$

2.1. FORMALISME DES SOLUTIONS "MILD"

d'où : $\|\Lambda e^{(t-s)\Delta}(u\Lambda v)\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq C(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|e^{\frac{(t-s)\Delta}{2}}(u\Lambda v)\|_{\dot{M}^{2,3}}$.

Comme précédemment, on utilise le lemme (2.1.11) avec $p = 2$ pour obtenir la majoration :

$$\begin{aligned} \|\Lambda e^{(t-s)\Delta}u\Lambda v\|_{\dot{M}^{2,3}} &\leq CC(2)(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|u\Lambda v\|_{\dot{M}^{\frac{4}{3},2}} \\ &\leq C's^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}(\sup_{0<s<T} s^{\frac{1}{4}}\|u(s,\cdot)\|_{\dot{M}^{4,6}}) \\ &\quad (\sup_{0<s<T} s^{\frac{1}{2}}\|\Lambda v(s,\cdot)\|_{\dot{M}^{2,3}}). \end{aligned}$$

Enfin, la majoration de $\|\Lambda e^{(t-s)\Delta}\Lambda(uv)\|_{\dot{M}^{2,3}}$ est une conséquence de ce qui vient d'être fait (toujours par continuité des opérateurs de Riesz dans $\dot{M}^{2,3}$).

iii) Retour à l'espace initial ($L^\infty \dot{M}^{2,3}$).

On a successivement : $\|e^{t\Delta}u_0\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$;

$\|e^{(t-s)\Delta}(u\Lambda v)\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq C(2)(t-s)^{-\frac{1}{4}}\|u\Lambda v\|_{\dot{M}^{\frac{4}{3},2}}$, d'après le lemme (2.1.11), donc :

$$\|e^{(t-s)\Delta}(u\Lambda v)\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq C(2)(t-s)^{-\frac{1}{4}}s^{\frac{3}{4}}\|u\|_{A_T}\|v\|_{A_T}.$$

Enfin le terme $\|e^{(t-s)\Delta}\Lambda(uv)\|_{\dot{M}^{2,3}}$ se majore comme le précédent (en utilisant les opérateurs de Riesz) ou tout simplement par :

$$\|e^{(t-s)\Delta}\Lambda(uv)\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq C(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|uv\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq C(t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}\|u\|_{A_T}\|v\|_{A_T}.$$

iv) Conclusion : nous avons, comme dans le cas L^3 , toutes les estimations requises pour faire tourner l'algorithme du point fixe et revenir à l'espace initial.

Sous l'hypothèse $u_0 \in \tilde{M}^{2,3}(\mathbb{R}^3)$, nous avons $\lim_{T \rightarrow 0} \|e^{t\Delta}u_0\|_{A_T} = 0$ (mêmes arguments que pour la preuve L^3), ce qui permet de conclure. Enfin, si u_0 est régulière, on montre par récurrence sur n que u^n appartient à l'espace

$$Z_T = \{f \in A_T / \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{4}}\|f\|_{\dot{M}^{4,6}} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{2}}\|\Lambda f\|_{\dot{M}^{2,3}} = 0\} \cap \mathcal{C}([0, T], \dot{M}^{2,3})$$

espace fermé dans $A_T \cap \mathcal{C}([0, T], \dot{M}^{2,3})$. □

Comme nous avons existence et unicité d'une solution globale (lorsque la donnée initiale est petite) dans ces espaces critiques, il est possible de trouver des solutions auto-similaires à l'équation scalaire (nous rappelons qu'elle est invariante par changement d'échelle). Pour construire des solutions globales lorsque la donnée initiale est grande dans $\dot{M}^{2,3}$, le formalisme des solutions "mild" devient inopérant : voilà pourquoi nous allons construire des solutions faibles en reprenant les idées de Leray [38] puis Lemarié-Rieusset. Le schéma de construction est le suivant : lorsque la donnée initiale est dans L^2 , nous allons adapter la preuve de J. Leray à cette équation. Pour une donnée initiale dans L^2_{loc} , nous estimerons a priori la vitesse comme l'a fait P.G. Lemarié-Rieusset [33] puis, par le changement d'échelle dicté par ces équations, nous montrerons que ces estimations perdurent lorsque la donnée initiale est dans $\dot{M}^{2,3}$.

2.2 Solutions faibles de Leray

Nous cherchons une solution $L^\infty L^2 \cap L^2 H^1$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t u &= \Delta u - [u, \Lambda]u \\ u(0, \cdot) &= u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (2.20)$$

Le manque de régularité de la solution cherchée empêche d'utiliser le formalisme des solutions "mild" : en effet, sous ces hypothèses, le terme bilinéaire ne peut être contrôlé dans L^2 . Afin de surmonter cette difficulté, la méthode employée par Leray fut de convoluer l'un des facteurs du terme non linéaire pour le rendre plus régulier. Soit w une fonction positive à support compact telle que $\int w(x)dx = 1$. On note $w_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^3} w(\frac{x}{\epsilon})$. En passant par la formulation intégrale, nous allons donc chercher à résoudre l'équation intégrale

$$u = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}[u * w_\epsilon, \Lambda]u \, ds$$

2.2.1 Solutions de l'équation convolée

Proposition 2.2.1. *Il existe un temps $T_\epsilon(\epsilon, \|u_0\|_2)$ tel que l'équation intégrale $u = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}[u * w_\epsilon, \Lambda]u \, ds$ admette une solution locale $u_\epsilon \in \mathcal{C}([0, T_\epsilon], L^2)$.*

Démonstration. Nous allons faire tourner l'algorithme du théorème du point fixe dans $L^\infty L^2$.

i) Terme initial $\|e^{t\Delta}u_0\|_2 \leq \|u_0\|_2$.

ii) Étudions le terme bilinéaire $B(u, v) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}[u * w_\epsilon, \Lambda]v \, ds$.

Nous devons majorer $\|e^{(t-s)\Delta}u * w_\epsilon \Lambda v\|_{L^2}$. En utilisant les transformées de Riesz, on écrit

$$u * w_\epsilon \Lambda v = \sum_{j=1}^3 \partial_j(u * w_\epsilon R_j v) - \sum_{j=1}^3 \partial_j(u * w_\epsilon) R_j v \quad (2.21)$$

Dans le deuxième terme de droite, on place la dérivée sur la convolée ; la continuité de R_j de L^2 dans L^2 permet alors les contrôles suivants :

$$\begin{aligned} \|e^{(t-s)\Delta} \partial_j(u * w_\epsilon R_j v)\|_2 &\leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \|w_\epsilon\|_2 \|u\|_{L^\infty L^2} \|v\|_{L^\infty L^2} \\ &\leq \frac{C}{\epsilon^{\frac{3}{2}}(t-s)^{\frac{1}{2}}} \|w_\epsilon\|_2 \|u\|_{L^\infty L^2} \|v\|_{L^\infty L^2} \end{aligned}$$

tout comme

$$\begin{aligned} \|e^{(t-s)\Delta} R_j v \partial_j(u * w_\epsilon)\|_2 &\leq C \|\nabla w_\epsilon\|_{L^2} \|u\|_{L^\infty L^2} \|v\|_{L^\infty L^2} \\ &\leq \frac{C}{\epsilon^{\frac{5}{2}}} \|u\|_{L^\infty L^2} \|v\|_{L^\infty L^2} \end{aligned}$$

2.2. SOLUTIONS FAIBLES DE LERAY

Le terme $\|e^{(t-s)\Delta}\Lambda(u * w_\epsilon v)\|_2$ se majore comme $\|e^{(t-s)\Delta}\partial_j(u * w_\epsilon R_j v)\|_2$ (les noyaux ayant le même contrôle).

$B(u, v)$ est donc continu de $L^\infty L^2$ dans lui-même avec une constante de continuité égale à $C_\epsilon(\sqrt{T} + T)$ et C_ϵ de l'ordre de $\epsilon^{-\frac{5}{2}}$. Nous pouvons donc appliquer le lemme du point fixe de Picard pour un temps $T_\epsilon < \min(1, \frac{1}{4C_\epsilon\|u_0\|_2})$; cela nous assure l'existence d'une (unique) solution $L^\infty((0, T), L^2)$ où T dépend de ϵ et $\|u_0\|_2$.

Traitons la continuité : $t \mapsto e^{t\Delta}u_0 \in \mathcal{C}([0, T], L^2)$ (par densité des fonctions test à support compact) et $(u, v) \mapsto B(u, v)$ envoie $\mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3)$ dans $\mathcal{C}([0, T], L^2)$ (c'est une convolution en temps) fermé dans $L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^3))$. On conclut par densité. \square

Remarques importantes :

1) La solution construite est unique sur $(0, T^*)$ où T^* est le temps maximal d'existence de la solution. Si u et v sont deux solutions de l'équation intégrale E_T sur $(0, T)$ alors elles coïncident sur $(0, T_0)$ où

$$C_\epsilon(\sqrt{T} + T)(\|u\|_{L^\infty L^2} + \|v\|_{L^\infty L^2}) < 1 \quad (2.22)$$

Considérons T_1 la borne supérieure des temps t pour lesquels $u = v$ sur $[0, t)$. On a alors $u(T_1) = v(T_1)$ par continuité dans L^2 . Nous ne pouvons avoir $T_1 < T$: si tel était le cas, $u(t+T_1)$ et $v(t+T_1)$ seraient solutions du même problème de Cauchy dans $F_{T-T_1} \cap G_{T-T_1}$ avec donnée initiale $u(T_1)$ qui prolongerait l'unicité au-delà de T_1 (par application du point fixe). Donc $T_1 = T$. Grâce à l'unicité, il existe un intervalle maximal d'existence $[0, T^*)$ sur lequel u est défini. Si $T^* < \infty$ alors nécessairement pour $0 < t < T^*$, $\|u(t)\|_2 \geq \frac{1}{4C_\epsilon(T^*-t)}$ ce qui implique que $\lim_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_2 = \infty$.

2) Cette solution est $\mathcal{C}^\infty((0, T^*) \times \mathbb{R}^3)$. On montre par récurrence sur l'entier n que $u \in \bigcap_{0 < T_1 < T_2 < T^*} L^\infty((T_1, T_2), H^{\frac{n}{2}})$ (le terme bilinéaire est le terme empêchant de gagner une dérivée complète).

Pour $0 < T_0 < T_1 < t < T_2$, on écrit :

$$u(t) = e^{(t-T_0)\Delta}u(T_0) - \int_{T_0}^t e^{(t-s)\Delta}[u * w_\epsilon, \Lambda]v \, ds. \quad (2.23)$$

puis on utilise successivement $\|e^{(t-T_0)\Delta}u(T_0)\|_{H^{\frac{n+1}{2}}} \leq C \sup(1, (t-T_0)^{-\frac{1}{4}})\|u(T_0)\|_{H^{\frac{n}{2}}}$ et (par continuité des transformées de Riesz dans H^s)

$$\begin{aligned} \left\| \int_{T_0}^t e^{(t-s)\Delta}[u * w_\epsilon, \Lambda]u \, ds \right\|_{H^{\frac{n+1}{2}}} &\leq C_\epsilon \|u\|_{L^\infty((T_0, T_2), H^n)}^2 \int_{T_0}^t \sup(1, (t-s)^{-\frac{3}{4}}) \, ds \\ &\quad + C'_\epsilon \|u\|_{L^\infty((T_0, T_2), H^n)}^2 \int_{T_0}^t \sup(1, (t-s)^{-\frac{1}{2}}) \, ds. \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

Toutes ces estimations prouvent la régularité spatiale de u . La régularité temporelle suit en écrivant $\frac{\partial^{p+1}}{\partial t^{p+1}}u = \Delta \frac{\partial^p}{\partial t^p}u - \frac{\partial^p}{\partial t^p}[u * w_\epsilon, \Lambda]u$.

Maintenant, nous devons vérifier que cette solution a une régularité L^2H^1 . Cela tient au lemme suivant :

Lemme 2.2.2. *L'opérateur A défini par $f(t, x) \mapsto \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta f(s, \cdot) ds$ est borné de $L^2((0, T), L^2(\mathbb{R}^3))$ dans lui-même pour tout $T \in (0, \infty]$.*

Démonstration. On peut supposer que $T = \infty$: si $T < \infty$, on prolonge f par $f = 0$ sur (T, ∞) (cela ne pose pas de problème car $Af(t, x)$ dépend uniquement des valeurs de f sur $(0, t) \times \mathbb{R}^3$). Afin d'utiliser la transformée de Fourier, on prolonge aussi f et Af pour $t < 0$ en les prenant nulles sur $(-\infty, 0)$.

Soit K le noyau de l'opérateur e^Δ . On sait que $K(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$.

On définit $R(t, x) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} (\Delta K)(\frac{x}{\sqrt{t}})$ pour $t > 0$ et on la prolonge par 0 lorsque $t < 0$.

Nous avons

$$Af(t, x) = \int_{s \in \mathbb{R}} \int_{x \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{t-s} R(t-s, x-y) f(s, y) ds dy.$$

On définit donc un opérateur A de convolution de $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.

Prenons la transformée de Fourier (en temps et en espace) de $\frac{1}{t}R$: sa transformée en x donne pour tout $t > 0$ $\int \frac{1}{t}R(t, x) e^{-ix \cdot \xi} dx = -|\xi|^2 e^{-t|\xi|^2}$ puis sa transformée en t donne :

$$\mathcal{F}(\tau, \xi) = - \int_0^\infty |\xi|^2 e^{-t|\xi|^2} e^{-it\tau} dt = \frac{-|\xi|^2}{|\xi|^2 + i\tau}.$$

Comme $|\mathcal{F}(\tau, \xi)| \leq 1$, alors $\|\widehat{Af}(\tau, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)}^2$. Par isométrie (à une constante près) de la transformée de Fourier de L^2 dans L^2 , on obtient le résultat voulu. \square

Ce lemme est à la base du théorème de régularité maximale (L^pL^q) du noyau de la chaleur [34] page 64. Il jouera un rôle essentiel dans les chapitres suivants (il est essentiel de remarquer que la constante de continuité est indépendante de T ; voir annexe B).

Proposition 2.2.3. *La solution locale $u_\epsilon \in L^2((0, T), H^1)$ pour tout $T < T^*$.*

Démonstration. Majorons $\|\vec{\nabla} e^{t\Delta} u_0\|_{L^2(0, T) L^2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\vec{\nabla} e^{t\Delta} u_0\|_2^2 dt &\leq \int_0^\infty \|\vec{\nabla} e^{t\Delta} u_0\|_2^2 dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\int_0^\infty |\xi|^2 e^{-t|\xi|^2} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 dt) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|u_0\|_2^2. \end{aligned}$$

2.2. SOLUTIONS FAIBLES DE LERAY

Le terme $\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta(u_\epsilon * w_\epsilon v) \, ds \|_{L^2((0,T),L^2)}$ se contrôle grâce au lemme précédent :

$$\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta(u_\epsilon * w_\epsilon u_\epsilon) \, ds \|_{L^2((0,T),L^2)} \leq \|w_\epsilon\|_2 \|u_\epsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2)} \|v\|_{L^2((0,T),L^2)}.$$

Il reste à majorer $\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla}(u_\epsilon * w_\epsilon \Lambda u_\epsilon) \, ds \|_{L^2((0,T),L^2)}$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sachant que $0 \leq t \leq T$:

$$| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla(u_\epsilon * w_\epsilon \Lambda u_\epsilon) \, ds |^2 \leq T \times \int_0^t |e^{(t-s)\Delta} \nabla(u_\epsilon * w_\epsilon \Lambda u_\epsilon)|^2 \, ds \quad (2.24)$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $0 \leq t \leq T$. Les théorèmes de Fubini puis de Plancherel (le noyau de l'opérateur $e^{(t-s)\Delta} \nabla(u * w_\epsilon) \Lambda u_\epsilon$ est L^2) impliquent :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int | \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla}(u_\epsilon * w_\epsilon \Lambda u_\epsilon)(s, x) \, ds |^2 \, dx \, dt &\leq \\ \frac{T}{(2\pi)^3} \int_0^T \int \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-s)|\xi|^2} |u_\epsilon * \widehat{w_\epsilon \Lambda u_\epsilon}(s, \xi)|^2 \, ds \, d\xi \, dt &\leq \\ 2T \|u_\epsilon * w_\epsilon \Lambda u_\epsilon\|_{L^2((0,T),L^2)}^2 & \end{aligned} \quad (2.25)$$

en intégrant en premier par rapport à la variable t , sachant que $0 \leq s \leq t \leq T$.

Donc : $| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla}(u_\epsilon * w_\epsilon \Lambda u_\epsilon) \, ds |^2 \leq \frac{C}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} T \|u\|_{L^\infty((0,T),L^2)}^2 \| \Lambda u_\epsilon \|_{L^2((0,T),L^2)}^2$.

On a donc montré que $u_\epsilon \in L^2((0, T), H^1)$. □

A ce stade, nous allons interpréter u_ϵ comme solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon &= \Delta u_\epsilon - [u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda] u_\epsilon \\ u_\epsilon(0, \cdot) &= u_0 \end{cases} \quad (2.26)$$

pour satisfaire à une égalité d'énergie et ainsi définir une solution globale. Comme dans les équations de Navier-Stokes, nous souhaitons une contribution nulle du terme bilinéaire dans l'égalité d'énergie. Celle-ci est assurée par le lemme suivant :

Lemme 2.2.4. *Si $v \in H^1$ et $r \in H^1$ alors l'expression bilinéaire*

$$b(v, r) = \int_{\mathbb{R}^3} v [u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda] r \, dx \quad (2.27)$$

est antisymétrique.

Démonstration. Remarquons d'abord que l'intégrale ci-dessus a bien un sens : le terme $v u_\epsilon * w_\epsilon \Lambda r$ est évidemment L^1 ($r \in H^1$) tandis que $v \Lambda(u_\epsilon * w_\epsilon r)$ l'est aussi en écrivant Λ à l'aide des transformées de Riesz (continues de L^2 dans L^2). Le théorème de Plancherel nous assure que

$$\int_{\mathbb{R}^3} v \Lambda r \, dx = \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\xi| \hat{v}(\xi) \hat{r}(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} r \Lambda v \, dx$$

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

(les fonctions r , v , Λr et Λv considérées sont toutes L^2 d'après les hypothèses).

Pour $v \in H^1$ et $r \in H^1$, nous écrivons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} v [u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda] r \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} v(u_\epsilon * w_\epsilon) \Lambda r \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} v \Lambda(u_\epsilon * w_\epsilon) r \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda(v u_\epsilon * w_\epsilon) r \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda v (u_\epsilon * w_\epsilon) r \, dx. \end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie car toutes les fonctions considérées sont L^2 grâce à la régularité H^1 de v et r et le fait que $u_\epsilon * w_\epsilon$ et $\vec{\nabla}(u_\epsilon * w_\epsilon)$ sont respectivement L^∞ et $(L^\infty)^3$. Nous avons donc $b(v, r) = -b(r, v)$. \square

Proposition 2.2.5. *La solution u_ϵ vérifie l'égalité d'énergie*

$$\|u_\epsilon(t, \cdot)\|_2^2 + 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} u_\epsilon(s, \cdot)\|_2^2 \, ds = \|u_0\|_2^2.$$

Démonstration. Multiplions l'équation $\partial_t u_\epsilon = \Delta u_\epsilon - [u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda] u_\epsilon$ par la fonction régulière u_ϵ . On a alors

$$\partial_t |u_\epsilon|^2 + 2|\vec{\nabla} u_\epsilon|^2 = \Delta |u_\epsilon|^2 - u_\epsilon [u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda] u_\epsilon. \quad (2.28)$$

Nous intégrons contre $h(\frac{x}{A})r(t)$ où $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et vaut 1 au voisinage de 0 et $r \in \mathcal{D}(0, T^*)$. L'antisymétrie du terme bilinéaire implique sa non contribution et le laplacien s'annule lorsque $A \rightarrow \infty$. On a donc, dans $\mathcal{D}'(0, T^*)$:

$$\partial_t \|u_\epsilon(t, \cdot)\|_2^2 + 2\|\vec{\nabla} u_\epsilon\|_2^2 = 0. \quad (2.29)$$

Puis, en intégrant en temps (sachant que $t \mapsto \|u(t, \cdot)\|_2$ est continue en 0), on obtient l'égalité d'énergie souhaitée. \square

Comme la solution u reste bornée en norme L^2 pour tout temps, alors $T^* = \infty$.

Nous avons donc prouvé

Proposition 2.2.6. *Soit $u_0 \in L^2$.*

Il existe une solution régulière globale $u_\epsilon \in L^\infty((0, \infty), L^2) \cap L^2((0, T), \dot{H}^1)$ pour tout $T > 0$, résolvant

$$\begin{cases} \partial_t u &= \Delta u - [u * w_\epsilon, \Lambda] u \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Elle satisfait l'égalité d'énergie $\|u_\epsilon(t, \cdot)\|_2^2 + 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} u_\epsilon(s, \cdot)\|_2^2 \, ds = \|u_0\|_2^2$.

2.2.2 Passage à la limite

On sait que les solutions $(u_\epsilon)_{0 < \epsilon}$ sont bornées (uniformément en ϵ) dans $L^\infty((0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3))$, dual d'un espace de Banach séparable ($L^1((0, \infty), L^2)$) : on peut donc extraire une sous-suite u_{ϵ_k} (avec $\lim_{k \rightarrow 0} \epsilon_k = 0$) convergeant faiblement* vers u dans $L^\infty L^2$.

De plus (quitte à extraire une nouvelle sous-suite notée de la même façon), $\vec{\nabla} u_{\epsilon_k}$ converge faiblement (nécessairement) vers $\vec{\nabla} u$ dans $(L^2((0, \infty), L^2))^3$: en effet, $\vec{\nabla} u_{\epsilon_k}$ est uniformément borné (en ϵ et T) dans $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3)^3$ pour tout $T > 0$ et il y a convergence dans $(\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))^3$.

Dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ les termes $\partial_t u_{\epsilon_k} \rightarrow \partial_t u$ et $\Delta u_{\epsilon_k} \rightarrow \Delta u$ ne poseront donc pas de problème de convergence. Le terme bilinéaire ne peut être traité directement car il nécessite une convergence forte de u_{ϵ_k} . Nous allons reprendre la méthode de Leray, basée sur un critère de compacité de Rellich et nécessitant un contrôle uniforme de u_{ϵ_k} dans un espace de Sobolev positif, possible grâce au lemme suivant :

Lemme 2.2.7. *Soit $z \in \mathcal{D}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$. Supposons que $zu(t, x) \in L^2 H^1$ et $\partial_t(zu) \in L^2 H^{-b}$ (avec $b > 0$), alors il existe $a \in (0, 1)$ tel que $z\vec{u}_\epsilon \in H^a(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.*

Démonstration. On note $\mathcal{F}(s, \xi)$ la transformée de Fourier en espace et en temps de $zu(t, x) \in (L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3))^3$.

D'après les hypothèses, nous avons

$$\int \int (1 + |\xi|^2) |\mathcal{F}(s, \xi)|^2 \, d\xi \, ds \leq C$$

$$\text{et } \int \int \frac{|s|^2}{(1 + |\xi|^2)^b} |\mathcal{F}(s, \xi)|^2 \, d\xi \, ds \leq C.$$

$$\int \int \frac{|s|^2}{(1 + |\xi|^2)^{2b}} |\mathcal{F}(s, \xi)|^2 \, d\xi \, ds \leq C.$$

Nous souhaitons contrôler $|s|^{2a}$ pour $a > 0$, en utilisant l'inégalité de convexité de Young : $|s|^{2a} \leq \frac{1}{p'}(1 + |\xi|^2)^{abp'} + \frac{1}{p}(1 + |\xi|^2)^{-abp}|s|^{2ap} \leq (1 + |\xi|^2) + (1 + |\xi|^2)^{-b}|s|^2$ avec $ap = 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (donc $p' = \frac{1}{1-a}$) et $abp' \leq 1$, ce qui est toujours possible dès lors que $a \leq \frac{1}{b+1}$ (ce qui implique évidemment $a < 1$).

Fixons un tel a . En distinguant les cas $|s|^2 \leq (1 + |\xi|^2)$ et $|s|^2 > (1 + |\xi|^2)$, nous obtenons bien que $\int \int (1 + |\xi|^2 + |s|^2)^a |\mathcal{F}(s, \xi)|^2 \, d\xi \, ds < +\infty$. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de convergence :

Théorème 2.2.8.

i) Il existe une suite $\epsilon_k \rightarrow 0$ telle que u_{ϵ_k} converge, au sens des distributions, vers $u \in$

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

$L^\infty((0, \infty), L^2) \cap L^2((0, \infty), \dot{H}^1)$ satisfaisant les équations (2.20).

ii) Cette limite vérifie l'inégalité d'énergie $\|u(t)\|^2 + 2 \int_0^t \int |\vec{\nabla} u(s)|^2 \, ds \leq \|u_0\|_2^2$

iii) Lorsque $t \rightarrow 0^+$, $\|u - u_0\|_2 \rightarrow 0$.

Démonstration.

Pour commencer, montrons que nous pouvons extraire de la suite u_{ϵ_k} une suite qui converge fortement dans $(L^2 L^2)_{loc}$.

Soit ρ une fonction test : nous avons des contrôles uniformes en ϵ de $\rho u_{\epsilon_k} \in L^2 L^2$ et $\partial_t(\rho u_{\epsilon_k}) \in L^2 H^{-s}$ ($s > \frac{3}{2}$) car les deux termes du commutateur se contrôlent respectivement dans $L^\infty L^2 \times L^2 L^2 \subset L^2 L^1$ et $L^2 H^{-\frac{3}{2}}$ (le produit $u_{\epsilon_k} u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k}$ est contrôlé dans $L^\infty L^2 \times L^2 L^6 \subset L^2 L^{\frac{3}{2}} \subset L^2 H^{-\frac{1}{2}}$ par les inégalités de Sobolev, puis nous appliquons la continuité des transformées de Riesz dans H^s). Nous pouvons donc appliquer le lemme (2.2.7) : ρu_ϵ est uniformément borné dans $H^a(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. Par le critère de compacité de Rellich, il existe une suite toujours notée ϵ_k telle que ρu_{ϵ_k} converge fortement vers ρu dans $(L^2 L^2)$ (vu que $\text{Supp} \rho$ est un compact). Par un procédé d'exhaustion (une suite dénombrable de fonctions test dont la réunion des supports est l'espace tout entier) et un procédé diagonal de Cantor, nous obtenons une suite u_{ϵ_k} convergeant fortement vers u dans $L^2 L^2_{loc}$ ne dépendant pas de la fonction test choisie.

i) Fixons $\phi \in \mathcal{D}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$.

Il reste à montrer la convergence de $\langle [u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k}, \Lambda] u_{\epsilon_k}, \phi \rangle \rightarrow \langle [u, \Lambda] u, \phi \rangle$.

Traitons d'abord la convergence du terme $\langle u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k} \Lambda u_{\epsilon_k}, \phi \rangle = \langle u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k} \tilde{\phi} \Lambda u_{\epsilon_k}, \phi \rangle$ où $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ vaut 1 au voisinage de $\overline{B}_R + \overline{B}(0, 1)$ (si $\text{Supp} \phi \in (0, T) \times \overline{B}_R$).

D'un côté $\tilde{\phi} \Lambda u_{\epsilon_k}$ converge faiblement vers $\tilde{\phi} \Lambda u$ dans $L^2 L^2$: en effet, lorsque $\rho \in L^2((0, \infty), L^2)$, on a :

$$\langle \tilde{\phi} \Lambda u_{\epsilon_k}, \rho \rangle = \sum_{j=1}^{j=3} \langle \partial_j u_{\epsilon_k}, R_j(\rho \tilde{\phi}) \rangle \rightarrow \sum_{j=1}^{j=3} \langle \partial_j u, R_j(\rho \tilde{\phi}) \rangle$$

(car $R_j(\rho \tilde{\phi}) \in L^2 L^2$, par continuité des transformées de Riesz dans L^2 et $\partial_j u_{\epsilon_k}$ converge faiblement vers $\partial_j u$ dans $L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$).

D'autre part, $\phi(u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k}) \rightarrow \phi u$ fortement dans $L^2 L^2$: il suffit d'écrire

$\phi(u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k} - u) = \phi(\tilde{\phi} u_{\epsilon_k} - \tilde{\phi} u) * w_{\epsilon_k} + \phi(u * w_{\epsilon_k})$ puis d'utiliser la convergence forte de u_{ϵ_k} vers u dans $(L^2 L^2)_{loc}$.

Le produit $\phi(u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k}) \tilde{\phi} \Lambda u_{\epsilon_k}$ converge donc vers $\phi u \tilde{\phi} \Lambda u = \phi u \Lambda u$ dans $L^1 L^1$.

Traitons maintenant la convergence du terme $\langle \Lambda(u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k} u_{\epsilon_k}), \phi \rangle = \langle u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k} u_{\epsilon_k}, \Lambda \phi \rangle$: on dispose d'une borne uniforme de $u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k}$ dans $L^2 L^6$ par les inégalités de Sobolev dans \mathbb{R}^3 , donc d'une borne uniforme de $(u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k}) u_{\epsilon_k}$ dans $L^2 L^{\frac{3}{2}}$ (car u_{ϵ_k} est uniformément borné dans $L^\infty L^2$). Étant donné que $(u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k}) u_{\epsilon_k}$ converge vers u^2 dans \mathcal{D}' (par la

2.2. SOLUTIONS FAIBLES DE LERAY

convergence forte de u_{ϵ_k} dans $(L^2L^2)_{loc}$ alors on conclut que $\Lambda u_{\epsilon_k} * w_{\epsilon_k} u_{\epsilon_k}$ converge vers Λu^2 par densité des fonctions test dans le préduel séparable L^2L^3 (on a bien entendu $\Lambda\phi \in L^2L^3$, en utilisant toujours la continuité des transformés de Riesz).

ii) $\forall \alpha \in \mathcal{D}(0, \infty)$, on utilise la convergence faible de $\alpha(t)u$ dans $L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ (convergence dans \mathcal{D}' et borne uniforme dans $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3)$ pour tout $T > 0$) et de $\vec{\nabla}u$ dans $(L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))^3$:

$$\begin{aligned} & \int \int |\alpha(t)|^2 |u(t)|^2 dt dx + 2 \int |\alpha(t)|^2 \left(\int_0^t \int |\vec{\nabla}u(s, x)|^2 ds dx \right) dt \\ & \leq \liminf_{\epsilon_k \rightarrow 0} \int \int |\alpha(t)|^2 |u_{\epsilon_k}(t)|^2 dt dx + 2 \int |\alpha(t)|^2 \left(\int_0^t \int |\vec{\nabla}u_{\epsilon_k}(s, x)|^2 ds dx \right) dt \\ & \leq \|u_0\|^2 \int |\alpha(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

On choisit $\forall t_0 > 0$ $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \Theta\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)$ avec $\Theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $\int |\Theta|^2 dt = 1$. On obtient alors :

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \int \frac{1}{\eta} |\Theta\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)|^2 \|u(t)\|_{L^2}^2 dt + 2 \int_0^{t_0} \int |\vec{\nabla}u(s)|^2 ds dx \leq \|u_0\|^2.$$

Pour conclure, on utilise l'argument suivant :

- si t_0 est un point de Lebesgue de la fonction mesurable $t \mapsto \|u\|_{L^2}$ alors la limite sup précédente est égale à $\|u(t_0)\|_{L^2}^2$. Donc l'inégalité d'énergie est vérifiée, p.p. $t_0 > 0$.

- sinon, on considère une suite t_n de points de Lebesgue qui converge vers t_0 ; dans ce cas $\|u(t_0)\|_2^2 \leq \liminf_{t_n \rightarrow t_0} \|u(t_n)\|_2^2$ par continuité faible de $t \mapsto \|u(t)\|_2^2$ sur $[0, \infty)$ (en effet, $t \mapsto \|u_\epsilon(t)\|_2$ est uniformément borné et $\partial_t u_\epsilon$ l'est aussi dans $L^2((0, T), H^{-s})$ pour tout $T > 0$ donc u est continue en norme H^{-s}) et $\int_0^{t_0} \int |\vec{\nabla}u(s)|^2 ds dx = \lim_{t_n \rightarrow t_0} \int_0^{t_n} \int |\vec{\nabla}u(s)|^2 ds dx$. Ceci assure l'inégalité d'énergie pour tout t_0 .

iii) On a $u(0, \cdot) = u_0$. En effet, Soit $a \in \mathcal{D}[0, +\infty)$ tel que $a(0) = 1$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

$$\int_0^{+\infty} \langle u_\epsilon(t), \rho \rangle \partial_t a(t) dt = - \langle u_\epsilon(0), \rho \rangle - \int_0^{+\infty} \langle \partial_t u_\epsilon(t), \rho \rangle a(t) dt.$$

Faisons tendre ϵ vers 0. Comme $u_\epsilon(0) = u_0$, u_ϵ et $\partial_t u_\epsilon(t)$ convergent faiblement respectivement dans $L^2\dot{H}^1$ et L^2H^{-s} vers \vec{u} et $\partial_t \vec{u}$, le passage à la limite est licite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_0^{+\infty} \langle \vec{u}(t), \rho \rangle \partial_t a(t) dt = - \langle \vec{u}_0, \rho \rangle - \int_0^{+\infty} \langle \partial_t \vec{u}(t), \rho \rangle a(t) dt.$$

$\langle u(0, \cdot), \rho \rangle = \langle u_0, \rho \rangle$ étant vrai pour toute fonction test, nous avons $u(0, \cdot) = u_0$.

D'une part, par continuité faible, on a $\|u_0\|_2^2 \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \|u(t)\|_2^2$. D'autre part, par l'inégalité d'énergie ii), on a $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|u(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$, condition suffisante (grâce à la continuité faible) pour prouver la continuité forte en 0. \square

2.3 Solutions L^2_{uloc}

Nous reprenons la méthode utilisée par P.G.Lemarié-Rieusset, basée sur une inégalité d'énergie locale. Étant donné $u_0 \in L^2_{uloc}$, nous pouvons l'approcher par une suite $u_0^n \in L^2$ dans le sens suivant :

Lemme 2.3.1. *Soit $u_0^n = \mathbb{I}_{B(0;2^n)}u_0$. Cette suite vérifie*

- i) $\|u_0^n\|_{L^2_{uloc}} \leq C\|u_0\|_{L^2_{uloc}}$;
- ii) $u_0^n \rightarrow u_0$ dans L^2_{uloc} muni de la topologie faible*.

Démonstration. Il suffit de considérer la suite $u_0^n = 1_{B(0;2^n)}u_0$: chaque terme de cette suite appartient bien à L^2 et vérifie i).

La suite u_0^n converge faiblement* vers u_0 dans L^2_{uloc} car elle est bornée dans L^2_{uloc} et converge dans L^∞_{loc} (sur tout compact K , la suite $(u_0^n - u_0)$ devient nulle à partir d'un certain rang). \square

Nous verrons une construction autrement plus complexe dans les cas vectoriel (ici, nous n'avons pas de contrainte de divergence nulle).

2.3.1 Estimation a priori pour le champ de vitesse

A partir de cette suite de données initiales, on considère, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la solution u_ϵ^n associée à la donnée initiale u_0^n et vérifiant

$$\partial_t u_\epsilon^n = \Delta u_\epsilon^n - [u_\epsilon^n * w_\epsilon, \Lambda]u_\epsilon^n . \quad (2.31)$$

Par analogie aux équations de Navier-Stokes, nous souhaitons montrer que nous avons un contrôle sur $u_\epsilon^n \in L^\infty L^2_{uloc} \cap (L^2 H^1)_{uloc}$ uniformément en n et ϵ par analogie aux équations de Navier-Stokes. Choisissons une norme facilement utilisable dans L^2_{uloc} : soit χ une fonction test positive, égale à 1 sur $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]^3$ et non nulle sur $[-1; 1]^3$ et telle que $\sum \chi_k(x) = 1$. Nous appellerons $\chi_k(x) = \chi(x-k)$ et désignerons par Q_k le cube $k + [-1; 1]^3$. Nous utiliserons aussi Q'_k le cube $k + [-3; 3]^3$.

On définit $\|f\|_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}}^2 = \sup_k \int_0^t \int \chi_k(x) |f(s,x)|^2 dx ds$.

Vérifions donc la proposition essentielle pour permettre un passage à la limite, basée sur une estimation d'énergie.

Proposition 2.3.2. *Soit $u_0 \in L^2_{uloc}$. Il existe une constante $K = K(\|u_0\|_{L^2_{uloc}}) > 1$ (donc uniforme en n et ϵ) et un temps $T_0(\|u_0\|_{L^2_{uloc}}) = \frac{1}{2K^3(1+\|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2}$ tel que pour tout $t \leq T_0$:*

$$\|u_\epsilon^n(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} u_\epsilon^n\|_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}}^2 \leq \sqrt{\frac{1}{(1+\|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2} - 2K^3 t} - 1. \quad (2.32)$$

Démonstration. Dans la suite de cette partie, nous noterons u la solution du modèle approché u_ϵ^n . Nous rappelons que la solution peut être prise $u \in \mathcal{C}^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$, ce qui nous permet d'écrire, en multipliant l'équation aux dérivées partielles par $\chi_k u$:

$$\frac{d}{dt} \int \chi_k |u|^2 dx + 2 \int \chi_k |\vec{\nabla} u|^2 dx = \int \Delta \chi_k |u|^2 dx - \int \chi_k u [u * w_\epsilon, \Lambda] u dx. \quad (2.33)$$

Le point essentiel est de contrôler $\int \chi_k u [u * w_\epsilon, \Lambda] u dx$. On décompose cette intégrale en deux parties (locale et non locale) en considérant ϕ valant 1 au sur un voisinage de $\text{Supp} \chi$ et ρ valant 1 sur $\text{Supp} \phi + \overline{B}(0, 1)$. Toutes ces fonctions sont prises telles que leur support soit contenu dans $[-3; 3]^3$:

$$\begin{aligned} \int \chi_k u [u * w_\epsilon, \Lambda] u dx &= \int \chi_k u [u * w_\epsilon, \Lambda] (\phi_k u) dx \\ &\quad + \int \chi_k u [u * w_\epsilon, \Lambda] ((1 - \phi_k) u) dx \\ &= (I) + (II). \end{aligned}$$

Pour (I), nous souhaitons utiliser les commutateurs de Calderón-Zygmund (afin d'absorber l'opérateur d'ordre 1 dans le contrôle du terme, voir Annexe A). Appliquons le théorème de Plancherel au premier terme du commutateur, nous obtenons (en remarquant que $\chi_k u = \chi_k \phi_k u$, $(u * w_\epsilon)(\phi_k u) = (\rho_k u) * w_\epsilon (\phi_k u)$)

$$\begin{aligned} (I) &= \int \chi_k u [u * w_\epsilon, \Lambda] (\phi_k u) dx \\ &= \int \phi_k u \Lambda(\chi_k \phi_k u (\rho_k u) * w_\epsilon) dx - \int \chi_k \phi_k u \Lambda(\phi_k u (\rho_k u) * w_\epsilon) dx \\ &= \int \phi_k u [\chi_k, \Lambda] ((\rho_k u) * w_\epsilon) (\phi_k u) dx \end{aligned}$$

Comme $[\chi_k, \Lambda]$ est un commutateur de Calderón-Zygmund, le théorème homonyme permet de conclure qu'il est continu de L^p dans L^p pour $1 < p < \infty$ (en particulier pour $p = \frac{3}{2}$, voir annexe A). Ainsi :

$$\begin{aligned} |(I)| &\leq C \|u\|_{L^3(Q_k)} \|(\rho_k u) * w_\epsilon (\phi_k u)\|_{L^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq C \|w_\epsilon\|_1 \|u\|_{L^3(Q'_k)}^3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Majorons (II). L'opérateur Λ étant en $|x|^{-4}$ hors de l'origine, nous écrivons :

$$|(II)| \leq C \int \int \frac{1}{|x - y|^4} |\chi_k(x) u(x)| (|u * w_\epsilon(x)| + |u * w_\epsilon(y)|) |(1 - \phi_k(y)) u(y)| dx dy.$$

L'intégrale en x est locale et nous allons paver l'espace en cubes d'arête 1 pour celle en y (y est loin de x). Notons $Q_j = j + [0, 1]^3$. Sur chacun de ces cubes, $|x - y|$ est de l'ordre de $|j - k|$ avec $j \neq k$, on a donc :

$$\begin{aligned} |II| &\leq C \sum_{j \neq k, j \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{|j - k|^4} \int_{Q_k} \int_{Q_j} |\chi_k(x) u(x)| |(1 - \phi_k(y)) u(y)| \\ &\quad (|u * w_\epsilon(x)| + |u * w_\epsilon(y)|) dx dy \\ &\leq C \|u\|_{L^2_{uloc}}^3 \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

(car $\|u^n\|_{L^1_{uloc}} \leq \|u^n\|_{L^2_{uloc}}$).

L'injection de Sobolev $\dot{H}^{\frac{1}{2}} \subset L^3$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit $|\xi|\widehat{u}(\xi) \times |\widehat{u}(\xi)|$ impliquent

$$\|u\|_{L^3(Q'_k)}^3 \leq C \|u\|_{\dot{H}^1(Q'_k)}^{\frac{3}{2}} \|u\|_{L^2(Q'_k)}^{\frac{3}{2}}. \quad (2.35)$$

En réinjectant dans l'égalité d'énergie (2.33), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \chi_k(x) |u(x)|^2 dx + 2 \int \chi_k(x) |\nabla u(x)|^2 dx &\leq C (\|u\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|u\|_{L^2_{uloc}}^3 \\ &\quad + \|\vec{\nabla} u\|_{L^2(Q'_k)}^{\frac{3}{2}} \|u\|_{L^2(Q'_k)}^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

Pour majorer le dernier terme, utilisons l'inégalité de convexité de Young :

$C(ab)^{\frac{3}{2}} \leq C'a^2 + C''b^6$ où la constante C' peut être choisie aussi petite que souhaitée puis intégrons en temps. On se débarrasse du terme $\|u\|_{L^2_{uloc}}^3$ grâce à l'inégalité $a^3 \leq \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^6$.

Prenons enfin la borne supérieure sur k (nous choisissons donc la constante C' telle que $C' \sup_k \int \int \|\vec{\nabla} u\|_{L^2(0,t)L^2(Q'_k)}^2 dx ds \leq \|\vec{\nabla} u\|_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}}$, ce qui est possible car les normes sont équivalentes) :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} u\|_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}}^2 &\leq \|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2 + C \int_0^t (\|u(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|u(s)\|_{L^2_{uloc}}^6) ds. \\ &\leq \max(1, C) (\|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2 + \int_0^t (\|u(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|u(s)\|_{L^2_{uloc}}^6) ds). \end{aligned}$$

Notons $K = \max(1; C)$.

Terminons la preuve : notons $y(t) = \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2 + \int_0^t (\|u(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|u(s)\|_{L^2_{uloc}}^6) ds$. Cette fonction vérifie l'inéquation différentielle $(1+y)' \leq K^3(1+y)^3$ (car $K \geq 1$), qui se résout en $\frac{1}{(1+y(0))^2} - \frac{1}{(1+y(t))^2} \leq 2K^3t$. En remarquant que $y(0) = \|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2$, nous obtenons donc un contrôle de y pour $t \leq \frac{1}{2K^3(1+\|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2}$ avec $y(t) \leq \sqrt{\frac{1}{(1+\|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2 - 2K^3t}} - 1$, d'où le résultat souhaité. \square

2.3.2 Passages à la limite

Faisons tendre $n \rightarrow \infty$

Notons u^n la limite précédemment décrite (sachant qu'elle dépend aussi de ϵ). Adaptons la démonstration L^2 au cas L^2_{uloc} (elle diffère nécessairement vu que les transformées de Riesz ne sont pas continues de L^2_{uloc} dans L^2_{uloc}). Pour tout $T < T_0$, la proposition (2.3.2) montre qu'on a des estimations uniformes de u^n dans $(L^2(0, T)L^2)_{uloc}$ et de $\vec{\nabla} u^n$ dans $(L^2(0, T)L^2)_{uloc}^3$. L'espace $(L^2(0, T)L^2)_{uloc}$ étant le dual de l'espace de Banach séparable

$$\{f \in L^2_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^3) / \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \|f\|_{L^2((0, T) \times (k+[0;1]^3))} < \infty\}$$

2.3. SOLUTIONS L^2_{ULOC}

on peut extraire (par le procédé diagonal de Cantor) une sous-suite (notée de la même façon) telle u^n converge faiblement* vers $u \in \cap_{0 < T < T_0} (L^2(0, T)L^2)_{uloc}$ et $\vec{\nabla}u^n$ faiblement* (nécessairement) vers $\vec{\nabla}u \in \cap_{0 < T < T_0} (L^2(0, T)L^2)^3_{uloc}$ (on rappelle que $u = u_\epsilon$).

Lemme 2.3.3. *Pour tout $\phi \in \mathcal{D}((0, T_0) \times \mathbb{R}^3)$, il existe une constante C (uniforme en n et ϵ) telle que :*

$$\|\phi u^n\|_{L^2L^2} \leq C$$

et

$$\|\partial_t(\phi u^n)\|_{L^2H^{-2}} \leq C$$

Démonstration. La première majoration vient de la proposition précédente. Pour la deuxième, on écrit

$$\partial_t(\phi u^n) = u^n \partial_t \phi + \phi \Delta u^n + \phi [u^n * w_\epsilon, \Lambda] u^n.$$

On a des contrôles uniformes respectifs de $u^n \partial_t \phi$ et $\phi \Delta u^n$ dans L^2L^2 et L^2H^{-1} .

Pour contrôler le terme $\phi u^n * w_\epsilon \Lambda u^n$, on décompose $\Lambda u^n = \Lambda \tilde{\phi} u^n + \Lambda(1 - \tilde{\phi})u^n$ où $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est une fonction régulière à support compact valant 1 sur $\overline{B}_R + \overline{B}(0, 1)$ (si $\text{Supp} \phi \in (0, T_0) \times \overline{B}_R$).

Localement (par continuité des opérateurs de Riesz dans L^2), nous avons :

$\|\phi \Lambda \tilde{\phi} u^n\|_{L^2L^2} \leq C \|\tilde{\phi} u^n\|_{L^2H^1} \leq C' (\|u_0\|_{L^2_{uloc}})$ d'après l'estimation obtenue dans la proposition précédente.

Loin de l'origine (par un pavage de l'espace en cubes d'arête 1)

$$\begin{aligned} \|\phi \Lambda(1 - \tilde{\phi})u^n\|_{L^2L^2} &\leq C(\phi) \|\Lambda(1 - \tilde{\phi})u^n\|_\infty \\ &\leq C \|u^n\|_{L^\infty(0, T)L^1_{uloc}} \leq C' (\|u_0\|_{L^2_{uloc}}) \end{aligned}$$

(avec $T < T_0$ dépendant du support de ϕ). On a donc un contrôle uniforme en n et ϵ dans L^2L^2 de $\phi \Lambda u^n$.

Le produit $\phi u^n * w_\epsilon \Lambda u^n$ est donc uniformément contrôlé dans $L^2L^1 \subset L^2H^{-s}$ avec $s > \frac{3}{2}$. D'autre part $u^n * w_\epsilon u^n$ est borné dans $(L^2((0, T), L^{\frac{3}{2}}))_{uloc}$ (en effet, pour tout k , nous avons, par les inégalités de Sobolev, un contrôle uniforme en k , n et ϵ de $\chi_k u^n$ dans L^2L^6 et de $\chi_k u^n * w_\epsilon$ dans $L^\infty L^2$). On décompose Λ de la même façon que précédemment :

$$\begin{aligned} \|\phi \Lambda(\tilde{\phi} u^n u^n * w_\epsilon)\|_{L^2H^{-2}} &\leq C \sum_{i=1}^3 \|R_i(\tilde{\phi} u^n u^n * w_\epsilon)\|_{L^2((0, T), H^{-\frac{1}{2}})} \\ &\leq C' \|\tilde{\phi} u^n u^n * w_\epsilon\|_{L^2((0, T), L^{\frac{3}{2}})}, \end{aligned}$$

(les transformées de Riesz sont continues dans $H^{-\frac{1}{2}}$ et $L^{\frac{3}{2}} \subset H^{-\frac{1}{2}}$).

D'autre part (par un pavage loin de l'origine) $\|\phi \Lambda((1 - \tilde{\phi})u^n u^n * w_\epsilon)\|_{L^\infty L^\infty} \leq C \|u^n\|_{L^\infty((0, T), L^2_{uloc})}^2$, d'où un contrôle L^2L^2 . □

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

Comme dans le cas L^2 , le lemme précédent ajouté au lemme (2.3.3) et à un critère de compacité de Rellich nous assurent la convergence forte (d'une suite extraite) u^n vers u dans $(L^2(0, T_0), L^2)_{loc}$.

Proposition 2.3.4. *Soit $u_0 \in L^2_{uloc}$. Il existe une fonction $u_\epsilon \in L^\infty L^2_{uloc}$ telle que*

i) $\partial u_\epsilon = \Delta u_\epsilon - [u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda]u_\epsilon$ dans $\mathcal{D}'((0, T_0) \times \mathbb{R}^3)$

ii) $u_\epsilon(0, \cdot) = u_0$

iii) Pour $t < T_0$, on a

$$\|u_\epsilon(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} u_\epsilon\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}^2 \leq \sqrt{\frac{1}{(1+\|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2} - 2K^3 t} - 1. \quad (2.36)$$

Démonstration.

i) Traitons le passage à la limite du commutateur (les autres étant évidents).

Soit $\phi \in \mathcal{D}'((0, T_0) \times \mathbb{R}^3)$. En reprenant les notations du lemme précédent, on considère la même fonction $\tilde{\phi}$ et qui vérifie :

$$\begin{aligned} \langle u^n * w_\epsilon \Lambda u^n, \phi \rangle &= \langle u^n * w_\epsilon \tilde{\phi} \Lambda u^n, \phi \rangle \\ &= \langle (u^n * w_\epsilon - u) \tilde{\phi} \Lambda u^n, \phi \rangle + \langle u^n, \Lambda(\tilde{\phi} \phi u) \rangle \end{aligned}$$

D'une part, $\phi u^n * w_\epsilon$ converge fortement vers ϕu dans $L^2 L^2$. D'autre part, $\tilde{\phi} \Lambda u^n$ est borné dans $L^2 L^2$ (en effet, on décompose en partie locale et loin de l'origine : la partie locale est uniformément L^2 car nous avons un contrôle $(L^2 H^1)_{uloc}$ de u^n et la partie loin de l'origine est $L^\infty L^\infty$ car le noyau est en $\frac{1}{|x|^4}$, toujours par un pavage en cubes d'arêtes 1). Donc, dans \mathcal{D}' :

$$\langle (u^n * w_\epsilon - u) \tilde{\phi} \Lambda u^n, \phi \rangle \rightarrow 0. \quad (2.37)$$

Comme u^n converge faiblement* vers u dans $(L^2 L^2)_{uloc}$, il suffit de montrer que $\Lambda(\tilde{\phi} \phi u)$ est dans le préduel, noté $WL^2_x L^2_t$

$$\{f \in L^2_{loc}((0, T_0) \times \mathbb{R}^3) / \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \|f\|_{L^2((0, T_0) \times (k + [0; 1]^3))} < \infty\}.$$

C'est bien le cas localement, car si ρ vaut 1 au voisinage du support de $\tilde{\phi} \phi$ alors $\|\rho \Lambda(\tilde{\phi} \phi u)\|_{WL^2 L^2} \leq C(\phi) \|u\|_{(L^2(0, T) H^1)_{uloc}}$ (transformées de Riesz continues dans L^2 , avec $T < T_0$) et loin de l'origine

$$\|(1 - \rho) \Lambda(\tilde{\phi} \phi u)\|_{WL^2 L^2} \leq \sum_{k \neq 0} \frac{C}{|k|^4} \|\tilde{\phi} \phi u\|_{(L^2 L^2)_{uloc}}. \quad (2.38)$$

Pour le deuxième terme du commutateur, on écrit : $\langle \Lambda(u^n * w_\epsilon u^n), \phi \rangle = \langle u^n * w_\epsilon u^n, \Lambda \phi \rangle$: on dispose d'un contrôle uniforme de $u^n * w_\epsilon u^n$ dans $(L^2 L^{\frac{3}{2}})_{uloc}$ (dont le

2.3. SOLUTIONS L^2_{ULOC}

prédual est un Banach séparable WL^3L^2) et on sait que $\Lambda\phi \in WL^3L^2$ (localement L^3 par continuité des transformées de Riesz dans L^3 et loin de l'origine le noyau est en $\frac{1}{|x|^4}$); de plus, $u^n * w_\epsilon u^n$ converge vers u^2 dans \mathcal{D}' grâce à la convergence forte de u^n vers u dans $(L^2L^2)_{loc}$. On a donc bien $\langle \Lambda(u^n * w_\epsilon u^n), \phi \rangle \rightarrow \langle \Lambda u^2, \phi \rangle$. Ceci montre bien i).

On montre ii) comme dans le cas L^2 : soit $T < T_0$; pour tout $R > 0$, nous savons que u^n et $\partial_t u^n(t)$ sont respectivement uniformément bornés dans $L^2((0, T), H^1(B_R))$ et $L^2(0, T)H^{-2}(B_R)$ alors (à une sous-suite près) convergent faiblement nécessairement vers u et $\partial_t u$. Ainsi, nous avons déjà que $u \in \mathcal{C}((0, T), H^{-2}_{loc})$ et $u(0, \cdot)$ a un sens. De plus u^n converge faiblement* vers u_0 dans L^2_{uloc} , ce qui permet de conclure.

Montrons iii) : Comme $L^\infty L^2_{uloc}$ est aussi le dual d'un espace de Banach séparable, quitte à extraire une nouvelle sous-suite par le procédé diagonal de Cantor, elle converge aussi faiblement vers u avec $u \in \cap_{0 < t < T_0} L^\infty((0, t), L^2_{uloc})$ (par unicité de la limite dans \mathcal{D}'). Les passages à la limite faible donnent aussi bien p.p. t tel que $0 < t < T_0$:

$\|u(t)\|_{L^2_{uloc}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u^n(t)\|_{L^2_{uloc}}$ que $\|\vec{\nabla} u\|_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\vec{\nabla} u^n\|_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}}$. Ainsi, l'inégalité (3.4.5) est montrée pour la limite u . \square

Dans le chapitre 4 (dédié à l'étude de l'approximation lorsque la donnée initiale est dans L^2_{uloc}), nous étudierons plus longuement la convergence de la solution vers u_0 .

Faisons tendre $\epsilon \rightarrow 0$

La proposition précédente fournit le même contrôle uniforme en ϵ sur u_ϵ que ne l'avait u^n sur n . Autrement dit, les mêmes arguments nous assurent le résultat suivant :

Théorème 2.3.5. *Soit $u_0 \in L^2_{uloc}$. Le modèle scalaire possède une solution locale : il existe $T_0(\|u_0\|_{L^2_{uloc}})$ et une fonction $u \in L^\infty((0, T), L^2_{uloc})$ telle que $u \in (L^2((0, T), H^1))_{uloc}$ pour tout $T < T_0$ satisfaisant*

- i) $\partial u = \Delta u - [u, \Lambda]u$ dans $\mathcal{D}'((0, T_0) \times \mathbb{R}^3)$
- ii) $u(0, \cdot) = u_0$
- iii) Pour $t < T_0$, on a

$$\|u(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} u\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}^2 \leq \sqrt{\frac{1}{(1 + \|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2} - 2K^3 t} - 1. \quad (2.39)$$

2.4 Donnée initiale dans $\dot{M}^{2,3}$

2.4.1 Existence de solutions globales

Notre objectif est de construire des solutions globales pour une donnée initiale grande. Nous reprenons l'idée de P.G. Lemarié-Rieusset [35] : elle est basée sur le fait que si $u_0 \in \dot{M}^{2,3}$ alors $\sup_{\lambda>0} \|\lambda u_0(\lambda x)\|_{L^2_{uloc}} = \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$. Par un argument d'unicité dans $L^\infty L^2_{uloc}$ et le changement d'échelle adapté aux équations de Navier-Stokes, il est possible de construire une solution globale aux équations approchées, ayant un contrôle uniforme permettant le passage à la limite. Exposons-là (en modifiant légèrement la démonstration, car nous allons rechercher l'unicité à la source - $L^\infty L^2$) sans détailler tous les calculs de changements de variable, qui le seront dans le chapitre 5.

Soit $u_0 \in \dot{M}^{2,3}$ (donc $u_0 \in L^2_{uloc}$). Il est possible d'approcher cette donnée initiale par une suite $u_0^n \in L^2 \cap L^2_{uloc}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ tout $\epsilon > 0$, considérons l'équation E_ϵ^n

$$\partial_t u = \Delta u - [u * w_\epsilon, \Lambda]u \quad (2.40)$$

avec donnée initiale u_0^n . Nous savons qu'il existe une unique solution globale régulière $u_\epsilon^n \in L^\infty((0, \infty), L^2)$ telle que pour tout $t \leq T_0$:

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon^n(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} u_\epsilon^n\|_{(L_t^2 L_x^2)_{uloc}}^2 &\leq \sqrt{\frac{1}{(1+\|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2 - 2K^3 t}} - 1. \\ &\leq (1 + \|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2)(1 - \frac{t}{T_0})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où $T_0 = T_0(\|u_0\|_{L^2_{uloc}}) = \frac{1}{2K^3(1+\|u_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2}$ est uniforme en n et ϵ .

Remarquons que si v_ϵ^n est solution de E_ϵ^n sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ avec donnée initiale u_0^n , alors pour tout $A > 0$, $Av_\epsilon^n(A^2t, Ax)$ est solution de $E_{\frac{\epsilon}{A}}$ sur $(0, A^{-2}T) \times \mathbb{R}^3$ avec donnée initiale $Au_0^n(Ax)$.

Le point essentiel est d'appliquer cette remarque à l'équation $E_{\frac{\epsilon}{A}}$ avec donnée initiale $Au_0^n(Ax)$. Il existe une solution $v_{\frac{\epsilon}{A}}^n$ définie sur $(0, T'_0)$ où T'_0 est tel que pour tout $0 < T'_0 \leq T_0$ avec $T'_0 = \frac{1}{2K^3(1+\|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^4)}$ (indépendant de ϵ et n) : ainsi, $\frac{1}{A}v_{\frac{\epsilon}{A}}^n(\frac{t}{A^2}, \frac{x}{A})$ coïncide avec l'unique solution u_ϵ^n de E_ϵ^n ayant pour donnée initiale u_0^n . N'ayant plus besoin de T_0 et dans le but de pas alourdir des notations déjà suffisamment indexées, nous noterons le nouveau temps T'_0 sous la forme T_0 . Ceci étant dit, u_ϵ^n vérifie par changement de variables, pour tout $0 < t < A^2T_0$:

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \int_{|x-x_0| \leq A} |u_\epsilon^n(t, x)|^2 dx \leq CA(1 + \|Au_0(Ax)\|_{L^2_{uloc}}^2)(1 - \frac{t}{T_0})^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.41)$$

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq A} |\vec{\nabla} u_\epsilon^n(s, x)|^2 dx ds \leq CA(1 + \|Au_0(Ax)\|_{L^2_{uloc}}^2)(1 - \frac{t}{T_0})^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

Si $t \leq \frac{1}{4}A^2T_0$ alors :

$$\begin{aligned} \int_{|x-x_0| \leq A} |u_\epsilon^n(t, x)|^2 dx &\leq A(1 + \|Au_0(Ax)\|_{L_{uloc}^2}^2)(1 - \frac{t}{A^2T_0})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}}A(1 + \|Au_0(Ax)\|_{L_{uloc}^2}^2) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Si $t > \frac{1}{4}A^2T_0$ alors :

$$\begin{aligned} \int_{|x-x_0| \leq A} |u_\epsilon^n(t, x)|^2 dx &\leq \int_{|x-x_0| \leq 2\sqrt{\frac{t}{T_0}}} |u_\epsilon^n(t)|^2 dx \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{t}{T_0}}(1 + \|Au_0(Ax)\|_{L_{uloc}^2}^2) \end{aligned} \quad (2.44)$$

La solution globale u_ϵ^n vérifie donc :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0, R > 0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_{|x-x_0| \leq R} |u_\epsilon^n(t, x)|^2 dx < +\infty.$$

et, de la même façon :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0, R > 0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{\nabla} u_\epsilon^n(s, x)|^2 dx ds < +\infty.$$

Nous pouvons donc successivement passer à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ puis $\epsilon \rightarrow 0$ puisque les majorations obtenues sont uniformes en n et ϵ (ce sont exactement les mêmes arguments que dans le cas L_{uloc}^2).

Nous avons donc le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. *Soit $u_0 \in \dot{M}^{2,3}$. Il existe une solution globale $u \in \mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ vérifiant $\partial_t u = \Delta u - [u, \Lambda]u$ et $u(0, \cdot) = u_0$. De plus,*

$$\begin{aligned} \sup_{R > 0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_{|x-x_0| \leq R} |u(t, x)|^2 dx &< +\infty. \\ \sup_{R > 0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{\nabla} u(s, x)|^2 dx ds &< +\infty. \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons besoin des deux paramètres n et ϵ lors du changement d'échelle : ceci explique pourquoi nous avons pris le parti d'effectuer un double passage à la limite pour déterminer la solution L_{uloc}^2 (alors que l'approximation $\partial_t u^n = \Delta u^n - [u^n * w^n, \Lambda]u^n$ eût été suffisante pour la construire).

2.4.2 Inégalité d'énergie locale

Comme nous l'avons vu en introduction, dans le cas des équations de Navier-Stokes, lorsque la donnée initiale est dans $\dot{M}^{2,3}$, les solutions obtenues satisfont à l'égalité d'énergie locale suivante (dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$) :

$$\partial_t |\vec{u}|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 = \Delta |\vec{u}|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\vec{\nabla} \cdot p\vec{u} - \mu. \quad (2.45)$$

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

(où μ est une mesure positive localement finie). Celle-ci est obtenue par passage à la limite sur les solutions approchées et nous rappelons que la mesure μ vient du fait que nous n'avons pas mieux qu'une convergence faible de $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}^n$ dans $(L^2 L^2)^3$; ainsi nous ne pouvons espérer $|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}^n|^2 \rightarrow |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2$.

Qu'en est-il dans notre équation ?

Nous venons de voir que le changement d'échelle permettait d'obtenir des solutions globales avec contrôles uniformes de $u_\epsilon^n \in (L^\infty L^2)_{uloc} \cap (L^2 H^1)_{uloc}$: les deux passages se traitant de la même façon (car les majorations sont uniformes en n et ϵ dans les mêmes espaces), nous n'en traiterons qu'un (le dernier, portant sur u_ϵ). De la même façon que pour les équations de Navier-Stokes, les termes $\partial_t |u_\epsilon|^2$, $|\vec{\nabla} u_\epsilon|^2$ et $\Delta |u_\epsilon|^2$ convergent vers les limites attendues. La question est donc de savoir si les hypothèses connues sur u_ϵ permettent le passage à la limite de $u_\epsilon[u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda]u_\epsilon$ dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$.

Nous rappelons que les majorations connues sur u_ϵ impliquent (à une sous-suite près) une convergence forte vers u dans $(L^2 L^2)_{loc}$ mais aussi dans $(L^3 L^3)_{loc}$ (il y a convergence forte dans $(L^6 L^2)_{loc}$, grâce au contrôle uniforme dans $(L^\infty L^2)_{loc}$ puis dans l'espace souhaité grâce à la borne uniforme $(L^2 L^6)_{loc}$).

Théorème 2.4.2. *Soit $u_0 \in \dot{M}^{2,3}$.*

Soit $\phi \in \mathcal{D}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ telle que $\phi \geq 0$. La solution u du modèle scalaire construite dans la proposition (2.4.1) telle que

$$\sup_{R>0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_{|x-x_0| \leq R} |u(t, x)|^2 dx < +\infty.$$

$$\sup_{R>0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{\nabla} u(s, x)|^2 dx ds < +\infty.$$

vérifie l'inégalité d'énergie locale suivante :

$$2 \int \int |\vec{\nabla} u|^2 \phi dx dt \leq \int \int |u|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) dx dt - \frac{C}{2} \int \int \int u(t, x) u(t, y) (u(t, x) - u(t, y)) \frac{(\phi(t, x) - \phi(t, y))}{|x-y|^4} dx dy dt.$$

Remarque : La constante C est celle du noyau de l'opérateur Λ (voir Annexe A).

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{D}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ telle que $\phi \geq 0$.

Nous partons de la solution approchée $u_\epsilon \in L^\infty L^2_{uloc} \cap (L^2 H^1)_{uloc}$ vérifiant :

$$2 \int \int |\vec{\nabla} u_\epsilon|^2 \phi dx dt = \int \int |u_\epsilon|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) dx dt - \int \int u_\epsilon [u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda] u_\epsilon \phi dx dt. \quad (2.46)$$

Cette expression a bien un sens, d'après l'étude L^2_{uloc} effectuée dans le paragraphe 3.

A ϵ fixé, approchons u_ϵ par sa troncature-régularisation : nous noterons v^n cette suite de fonctions test approchante.

Étape 1 : Estimations pour les fonctions test

a) Nous allons majorer

$$\begin{aligned}
 \langle v^n[v^n * w_\epsilon, \Lambda]v^n, \phi \rangle &= C \left(\frac{1}{2} \int \int_{|x-y| \leq 1} \frac{v^n(t,x)v^n(t,y)(\phi(t,x)-\phi(t,y))}{|x-y|^4} w_\epsilon * (v^n(t,x)-v^n(t,y)) \, dx \, dy \, dt \right. \\
 &\quad + \int \int_{1 \leq |x-y| \leq R} \frac{v^n(t,x)v^n(t,y)\phi(t,x)}{|x-y|^4} w_\epsilon * (v^n(t,x)-v^n(t,y)) \, dx \, dy \, dt \\
 &\quad \left. + \int \int_{|x-y| \geq R} \frac{v^n(t,x)v^n(t,y)\phi(t,x)}{|x-y|^4} w_\epsilon * (v^n(t,x)-v^n(t,y)) \, dx \, dy \, dt \right) \\
 &= \frac{1}{2}A(v^n, v^n, v^n * w_\epsilon) + B_R(v^n, v^n, v^n * w_\epsilon) + C_R(v^n, v^n, v^n * w_\epsilon)
 \end{aligned}$$

où $R > 10$ sera fixé grand ultérieurement, avec :

$$A(u, v, w) = C \int \int_{|x-y| \leq 1} \frac{u(t, x)v(t, y)(\phi(t, x) - \phi(t, y)) (w(t, x) - w(t, y))}{|x - y|^4} \, dx \, dy \, dt$$

$$B_R(u, v, w) = C \int \int_{1 \leq |x-y| \leq R} \frac{u(t, x)v(t, y)\phi(t, x) (w(t, x) - w(t, y))}{|x - y|^4} \, dx \, dy \, dt$$

$$C_R(u, v, w) = C \int \int_{|x-y| \geq R} \frac{u(t, x)v(t, y)\phi(t, x) (w(t, x) - w(t, y))}{|x - y|^4} \, dx \, dy \, dt$$

Remarquons que les égalités précédentes utilisent le noyau de convolution de l'opérateur Λ (voir Annexe A). Pour $(a, b, c) \in (\mathcal{D})^3$, nous avons (en omettant la valeur principale) :

$$\begin{aligned}
 \langle a[b, \Lambda]c, \phi \rangle &= C \int \int \int \frac{a(t,x)b(t,x)\phi(t,x) (c(t,y)-c(t,x))}{|x-y|^4} \, dx \, dy \, dt \\
 &\quad - C \int \int \int \frac{a(t,x)\phi(t,x) (b(t,y)c(t,y)-b(t,x)c(t,x))}{|x-y|^4} \, dx \, dy \, dt \\
 &= C \int \int \int \frac{a(t,x)c(t,y)\phi(t,x) (b(t,x)-b(t,y))}{|x-y|^4} \, dx \, dy \, dt
 \end{aligned}$$

Le terme A est juste une réécriture du terme précédent lorsque $a = c$ où l'on échange les rôles de x et y .

b) Étude des termes trilineaires :

Pour A , sachant que $t \in K$, $(x, y) \in K'^2$ (où K et K' sont deux compacts dépendant du support de ϕ), on considère $\rho \in \mathcal{D}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ valant 1 sur un voisinage de $K \times K'$:

$$\begin{aligned}
 |A(u, v, w)| &\leq C \int \left(\int \int_{|x-y| \leq 1} u(t, x)^2 v(t, y)^2 \frac{(\phi(t, x) - \phi(t, y))^2}{|x-y|^4} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \left(\int \int \frac{|\rho(t, x)w(t, x) - \rho(t, y)w(t, y)|^2}{|x-y|^4} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \, dt \\
 &\leq C(\phi) \int \left(\int (\rho u(t, x))^2 ((\rho v)^2 * \mathbb{1}_{|x| \leq \frac{1}{|x|^2}}) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\rho w(t, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \, dt \\
 &\leq C \|\rho u\|_{L^3 L^3} \|\rho v\|_{L^3 L^3} \|\rho w\|_{L^3 H^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

Détaillons la majoration obtenue dans la dernière ligne où nous utilisons une nouvelle fois la convolution dans les espaces de Lorentz :

Comme $(\rho v)^2 \in L^{\frac{3}{2}}$ et $\mathbb{1}_{|x| \leq \frac{1}{|x|^2}} \in L^{\frac{3}{2}, \infty}$ alors $(\rho v)^2 * \mathbb{1}_{|x| \leq \frac{1}{|x|^2}} \in L^{3, \frac{3}{2}} \subset L^{3,3} = L^3$. L'intégration en temps permet alors de conclure.

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

Nous remarquons que ce contrôle convient car nous avons convergence forte de u_ϵ et $w_\epsilon * u_\epsilon$ dans $(L^3L^3)_{loc}$ mais aussi de ρu_ϵ et $\rho w_\epsilon * u_\epsilon$ dans $L^3H^{\frac{1}{2}}$ (par interpolation entre la convergence forte dans L^6L^2 et la borne uniforme dans L^2H^1).

Pour B_R , de même que précédemment, on constate que t , x et y sont bornés et le noyau est intégrable sur la couronne choisie : il existe donc une fonction $\tilde{\rho}_R \in \mathcal{D}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ telle que :

$$|B_R(u, v, w)| \leq C(R, \phi) \|\tilde{\rho}_R u\|_{L^3L^2} \|\tilde{\rho}_R v\|_{L^3L^2} \|\tilde{\rho}_R w\|_{L^3L^2} \quad (2.47)$$

Pour C_R , on utilise (par exemple) le contrôle en la norme $(L^3L^3)_{uloc}$, après avoir effectué un pavage de l'espace en cubes d'arêtes 1 pour contrôler l'intégrale en y (celle en x étant locale) :

$$|C_R(u, v, w)| \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^3, |k| \geq R-1} \frac{1}{|k|^4} \|u\|_{(L^3L^3)_{uloc}} \|v\|_{(L^3L^3)_{uloc}} \|w\|_{(L^3L^3)_{uloc}} \quad (2.48)$$

Etape 2 : Passage à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$

Soit $\eta > 0$. D'après l'estimation obtenue sur C_R (correspondant au reste d'une série convergente), il existe un nombre $R_0(\eta, \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}) > 0$ tel que

$$|C_{R_0}(u_\epsilon, u_\epsilon, u_\epsilon * w_\epsilon) - C_{R_0}(v^n, v^n, v^n * w_\epsilon)| < \frac{\eta}{3} \quad (2.49)$$

(en effet, v^n et u_ϵ sont uniformément contrôlés dans $(L^3L^3)_{uloc}$) D'autre part, la trilinearité et les majorations obtenues sur A et B_{R_0} impliquent qu'il existe $n_0(\eta, \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}, \phi) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$|A(u_\epsilon, u_\epsilon, u_\epsilon * w_\epsilon) - A(v^n, v^n, v^n)| < \frac{\eta}{3} \quad (2.50)$$

(en effet ρv^n converge fortement vers ρu_ϵ dans $L^3H^{\frac{1}{2}}$, donc aussi dans L^3L^3) ainsi que

$$|B_{R_0}(u_\epsilon, u_\epsilon, u_\epsilon * w_\epsilon) - B_{R_0}(v^n, v^n, v^n)| < \frac{\eta}{3} \quad (2.51)$$

(a fortiori, on a convergence forte de ρv^n dans L^3L^2)

Enfin, lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\langle v^n [v^n * w_\epsilon, \Lambda] v^n, \phi \rangle \rightarrow \langle u_\epsilon [u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda] u_\epsilon, \phi \rangle \quad (2.52)$$

Pour le voir, on traite chaque terme du commutateur séparément.

On montre respectivement que

$$\langle v^n v^n * w_\epsilon \Lambda v^n, \phi \rangle \rightarrow \langle u_\epsilon u_\epsilon * w_\epsilon \Lambda u_\epsilon, \phi \rangle$$

puis

$$\langle v^n \Lambda(v^n * w_\epsilon v^n), \phi \rangle \rightarrow \langle u_\epsilon \Lambda(u_\epsilon * w_\epsilon u_\epsilon), \phi \rangle$$

Comme nous travaillons à ϵ fixé, nous pouvons utiliser un contrôle de $u * w_\epsilon$ en norme $L^\infty L^\infty$: la convergence forte locale $L^2 H^1$ et le contrôle global dans $L^\infty L^2_{uloc}$ allié à la décroissance du noyau de Λ à l'infini permettent de conclure.

Explicitons cette idée sur l'un des termes (les autres convergeant de la même façon) :

$\langle v^n v^n * w \Lambda(u_\epsilon - v^n), \phi \rangle \rightarrow 0$: on décompose en partie locale et loin de l'origine. Localement (pour une fonction plateau ρ valant 1 sur le double du support de ϕ avec R grand déterminé ultérieurement), on a successivement :

$$|\langle v^n v^n * w \Lambda \rho(u_\epsilon - v^n) \rangle| \leq \|v^n v^n * w\|_{L^2 L^2} \|\rho(u_\epsilon - v^n)\|_{L^2 H^1}$$

et

$$\begin{aligned} |\langle v^n v^n * w \Lambda(1 - \rho)(u_\epsilon - v^n) \rangle| &\leq \sum_{k, |k| \geq \frac{R}{2}} 1/|k|^4 \|\phi v^n v^n * w\|_2 \|u_\epsilon - v^n\|_{L^\infty L^2_{uloc}} \\ &\leq C \sum_{k, |k| \geq \frac{R}{2}} 1/|k|^4. \end{aligned}$$

Comme c'est le reste d'une série convergente, elle peut être rendue aussi petite que souhaité et cela détermine R , donc le support de la fonction plateau. On conclut grâce à la convergence forte locale de ρv^n vers ρu_ϵ dans $L^2 H^1$.

On a donc bien, par passage à la limite dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ (en échangeant aussi les rôles de x et y dans le terme B_R) :

$$\begin{aligned} 2 \int \int |\vec{\nabla} u_\epsilon|^2 \phi \, dx \, dt &= \int \int |u_\epsilon|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) \, dx \, dt \\ &\quad - \frac{C}{2} \int \int u_\epsilon(t, x) u_\epsilon(t, y) \frac{w_\epsilon * (u_\epsilon(t, x) - u_\epsilon(t, y)) (\phi(t, x) - \phi(t, y))}{|x - y|^4} \, dx \, dy \, dt. \end{aligned}$$

Etape 3 : Passage à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Cette fois-ci, nous partons de

$$\int \int \int u_\epsilon(t, x) u_\epsilon(t, y) w_\epsilon * (u_\epsilon(t, x) - u_\epsilon(t, y)) \frac{(\phi(t, x) - \phi(t, y))}{|x - y|^4} \, dx \, dy \, dt \quad (2.53)$$

que nous décomposons sous la forme $\frac{1}{2}A + B_R + C_R$. Nous reprenons stricto sensu l'étape 1 pour obtenir des majorations sur chacune des trois intégrales et le début de l'étape 2 pour la convergence de chacun des termes C_R , A et B_R (en effet, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, les estimations sur u_ϵ et u sont les mêmes que celles qui avaient été utilisées sur v^n et u_ϵ). Le passage à la limite donne alors le résultat souhaité. Notons que l'inégalité provient du passage à la limite de $|\vec{\nabla} u_\epsilon|^2$ et que

$$\int \int \int u(t, x) u(t, y) (u(t, x) - u(t, y)) \frac{(\phi(t, x) - \phi(t, y))}{|x - y|^4} \, dx \, dy \, dt \quad (2.54)$$

a bien un sens grâce à la décomposition $\frac{1}{2}A + B_R + C_R$. \square

CHAPITRE 2. ÉTUDE D'UN MODÈLE SCALAIRE

Remarque :

Dans les équations de Navier-Stokes, le pire terme à contrôler est $\vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$: a priori, il nécessite un contrôle local $L^4 L^4$ sur \vec{u} en plus des contrôles locaux habituels ($L^\infty L^2 \cap L^2 H^1$). Grâce à l'antisymétrie du terme bilinéaire, nous le réécrivons sous la forme $\vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u})$: le contrôle est alors assuré sous la seule condition $\vec{u} \in ((L^\infty L^2)_{loc} \cap (L^2 H^1)_{loc})^3$, puisqu'il implique $\vec{u} \in (L^3 L^3)_{loc}^3$.

Dans le cas de nos équations, il en va de même. Le terme $u[u, \Lambda]u$ n'a pas de sens dans \mathcal{D}' sans un contrôle $(L^4 L^4)_{loc}$ de \vec{u} ; néanmoins, une réécriture de ce terme utilisant l'antisymétrie du commutateur permet de donner un sens à l'intégrale

$$\int \int \int u(t, x) u(t, y) (u(t, x) - u(t, y)) \frac{(\phi(t, x) - \phi(t, y))}{|x - y|^4} dx dy dt, \quad (2.55)$$

avec un contrôle utilisant moins de régularité sur \vec{u} : en effet, les normes $L^3 L^3$, $(L^3 L^3)_{uloc}$ et $L^3 \dot{H}^{\frac{1}{2}}$ suffisent pour majorer les termes A , B_R et C_R (elles sont induites par les hypothèses $u \in L^\infty L^2_{uloc} \cap (L^2 \dot{H}^1)_{uloc}$). La seule différence avec les équations de Navier-Stokes est que la condition de dérivabilité ($L^3 \dot{H}^{\frac{1}{2}}$) se lit explicitement sur le contrôle du terme A .

2.4. DONNÉE INITIALE DANS $\dot{M}^{2,3}$

Chapitre 3

Équations modifiées de Vishik et Fursikov - Donnée initiale dans L^2

Dans ce chapitre, nous allons étudier la convergence de l'approximation modifiée de Vishik et Fursikov lorsque la donnée initiale est dans $(L^2)^3$: il reprend les résultats décrits dans [31].

Nous commençons par convoler l'équation afin d'assurer l'existence d'une solution dans $(L^\infty L^2 \cap L^2 \dot{H}^1)^3$.

3.1 Existence d'une solution aux équations modifiées et convolées de Vishik & Fursikov

Définition 3.1.1. *Nous appellerons équations modifiées et convolées de Vishik & Fursikov le modèle suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} &= \Delta \vec{u} - w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon) - \alpha w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon) \\ \vec{u}_\epsilon &= \vec{u} * w_\epsilon \\ \vec{u}(0, \cdot) &= \vec{u}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où w une fonction test positive, paire telle que $\int w(x) dx = 1$ et $w_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^3} w(\frac{x}{\epsilon})$.

Nous cherchons une solution via la méthode du point fixe de Picard, ainsi nous nous intéressons à la formulation intégrale du problème

$$\begin{aligned} \vec{u} &= e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} [w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon) - \alpha w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) \\ &\quad + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u})] ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.1. SOLUTION DU MODÈLE MODIFIÉ ET CONVOLÉ

Remarque :

L'idée est la suivante : la convolution permet comme toujours de rendre plus régulières les fonctions en présence et donc d'appliquer le théorème du point fixe. Les équations modifiées et convolées sont construites pour non seulement vérifier le théorème du point fixe mais aussi satisfaire à une égalité d'énergie (d'où la parité de w pour appliquer le théorème de Plancherel polarisé).

Théorème 3.1.2. *Soit $\vec{u}_0 \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. L'équation intégrale*

$$\begin{aligned} \vec{g} = & e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} [w_\epsilon * ((\vec{g}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{g}_\epsilon) - \alpha w_\epsilon * (|\vec{g}_\epsilon|^2 \vec{g}_\epsilon) \\ & + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u})] ds. \end{aligned} \quad (3.3)$$

peut être résolue dans le sens suivant :

(A) il existe $T = T(\|u_0\|_2, \eta, \epsilon, \alpha)$ tel que l'équation intégrale (3.3) ait une solution locale \vec{u} dans l'espace de Banach $L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^3)^3) \cap L^2((0, T), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)^3)$, muni de la somme des normes suivantes

$$\begin{aligned} \|\vec{g}\|_{L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^3)^3) \cap L^2((0, T), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)^3)} &= \sup_{0 < t < T} \|\vec{g}(\cdot, t)\|_2 + \|\|\vec{\nabla} \otimes \vec{g}(\cdot, t)\|_{L^2(0, T)}\| \\ \|\vec{g}(\cdot, t)\|_2^2 &= \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |g_i(x, t)|^2 dx \\ \text{et } \|\|\vec{\nabla} \otimes \vec{g}(\cdot, t)\|_{L^2(0, T)}\|^2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_i g_j(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

(B) il existe un temps maximal $T^* > 0$ (dépendant des paramètres précédemment cités) tel que les équations (5.3) aient une unique solution $\vec{u} \in \bigcap_{T < T^*} L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^3)^3) \cap L^2((0, T), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)^3)$.

Si $T^* < \infty$ alors $\lim_{t \rightarrow T^*} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{(L^2)^3} = \infty$.

Démonstration. (A) Appliquons le théorème du point fixe à l'espace $L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^3)^3) \cap L^2((0, T), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)^3)$.

Notons respectivement $E_T = L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^3)^3)$, $F_T = L^\infty((0, T), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)^3)$ et $G_T = L^2((0, T), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)^3)$ les espaces que nous utiliserons pour les majorations.

Les constantes C peuvent changer d'une ligne à l'autre mais resteront toujours indépendantes de η, α, ϵ et de T .

i) Terme initial :

$\|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{E_T} \leq \|\vec{u}_0\|_2$. Pour contrôler $\|e^{t\Delta} \vec{\nabla} \vec{u}_0\|_{G_T}$, nous utilisons successivement les théorèmes

CHAPITRE 3. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2

de Plancherel puis de Fubini (et de nouveau de Plancherel).

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \|\vec{\nabla} \otimes e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_2^2 dt &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{i=0}^3 \int_0^{+\infty} \int |\xi|^2 e^{-t|\xi|^2} |\widehat{u_{0_i}}(\xi)|^2 d\xi dt \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{i=0}^3 \int |\widehat{u_{0_i}}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \|\vec{u}_0\|_2^2
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty L^2} + \|\vec{\nabla} e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^2((0,T),L^2)} \leq 2\|\vec{u}_0\|_2 \quad (3.4)$$

ii) Contrôle du terme bilinéaire :

On note $B(\vec{u}, \vec{u}) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (w_\epsilon * (\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon) ds$ et $b(\vec{u}, \vec{u}) = w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon)$.

On a :

$$\begin{aligned}
 \|b(\vec{u}, \vec{u}) - b(\vec{v}, \vec{v})\|_{E_T} &\leq \|b(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u})\|_{E_T} + \|b(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})\|_{E_T} \\
 &\leq \|w_\epsilon\|_1 \|w_\epsilon\|_2 (\|\vec{\nabla} w_\epsilon\|_2 \|\vec{u}\|_{E_T} + \|\vec{\nabla} w_\epsilon\|_\infty \|\vec{v}\|_{E_T}) \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T} \\
 &\leq C(\epsilon^{-4} + \epsilon^{-\frac{11}{2}}) (\|\vec{u}\|_{E_T} + \|\vec{v}\|_{E_T}) \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T}
 \end{aligned}$$

alors

$$\|B(\vec{u}, \vec{u}) - B(\vec{v}, \vec{v})\|_{E_T} \leq CT(\epsilon^{-4} + \epsilon^{-\frac{11}{2}}) (\|\vec{u}\|_{E_T} + \|\vec{v}\|_{E_T}) \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T} \quad (3.5)$$

et, en dérivant sur w_ϵ

$$\|B(\vec{u}, \vec{u}) - B(\vec{v}, \vec{v})\|_{F_T} \leq CT(\epsilon^{-5} + \epsilon^{-\frac{13}{2}}) (\|\vec{u}\|_{E_T} + \|\vec{v}\|_{E_T}) \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T} \quad (3.6)$$

Nous obtenons donc

$$\|B(\vec{u}, \vec{u}) - B(\vec{v}, \vec{v})\|_{G_T} \leq CT^{\frac{3}{2}}(\epsilon^{-5} + \epsilon^{-\frac{13}{2}}) (\|\vec{u}\|_{E_T} + \|\vec{v}\|_{E_T}) \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T} \quad (3.7)$$

iii) Contrôle de la pénalisation :

On note $l(\vec{u}) = w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon)$ and $L(\vec{u}) = \alpha \int_0^t e^{(t-s)\Delta} w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) ds$.

Sachant que

$$l(\vec{u}) - l(\vec{v}) = w_\epsilon * |\vec{u}_\epsilon|^2 (\vec{u}_\epsilon - \vec{v}_\epsilon) + w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon - \vec{v}_\epsilon| |\vec{u}_\epsilon + \vec{v}_\epsilon|) \vec{v}_\epsilon \quad (3.8)$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|l(\vec{u}) - l(\vec{v})\|_{E_T} &\leq \|w_\epsilon\|_1 \|w_\epsilon\|_2^3 \|\vec{u}\|_{E_T}^2 \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T} + \|w_\epsilon\|_1 \|w_\epsilon\|_2^3 (\|\vec{u}\|_{E_T} + \|\vec{v}\|_{E_T}^2) \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T} \\
 &\leq C\epsilon^{-\frac{9}{2}} (1 + \|\vec{u}\|_{E_T}^2 + \|\vec{v}\|_{E_T}^2) \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T}
 \end{aligned}$$

3.1. SOLUTION DU MODÈLE MODIFIÉ ET CONVOLÉ

De la même façon que pour l'étude du terme bilinéaire :

$$\|L(\vec{u}) - L(\vec{v})\|_{E_T} + \|L(\vec{u}) - L(\vec{v})\|_{G_T} \leq C\alpha(T\epsilon^{\frac{-9}{2}} + T^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{-11}{2}})(1 + \|\vec{u}\|_{E_T}^2 + \|\vec{v}\|_{E_T}^2)\|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T} \quad (3.9)$$

iv) Contrôle de la pression :

$$\text{Notons } F(\vec{u}) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla}(w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon) \, ds.$$

De la même façon :

$$\|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{E_T} + \|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{G_T} \leq \frac{C}{\eta}(\epsilon^{-2}T + \epsilon^{-3}T^{\frac{3}{2}}) \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T} \quad (3.10)$$

v) Algorithme du point fixe :

On appelle

$$\begin{aligned} R(\vec{u}) &= e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} [w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon) - \alpha w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) \\ &\quad + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla}(w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \, ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Les majorations précédentes donnent

$$\|R(\vec{u})\|_{E_T} + \|R(\vec{u})\|_{G_T} \leq 2\|\vec{u}_0\|_2 + C_{\epsilon, \alpha, \eta}^0(T + T^{\frac{3}{2}})(\|\vec{u}\|_{E_T}^2 + \|\vec{u}\|_{E_T}^3) \quad (3.12)$$

et

$$\|R(\vec{u}) - R(\vec{v})\|_{E_T} + \|R(\vec{u}) - R(\vec{v})\|_{G_T} \leq C_{\epsilon, \alpha, \eta}^1(1 + \|\vec{u}\|_{E_T}^2 + \|\vec{v}\|_{E_T}^2)(T + T^{\frac{3}{2}})\|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_T} \quad (3.13)$$

Choisissons $T = \min(T_1, T_2)$ tel que

$$T_1 = \min\left(1, \frac{1}{18C_{\epsilon, \alpha, \eta}^0(\|\vec{u}_0\|_2 + 3\|\vec{u}_0\|_2^2)}\right) \text{ (} R \text{ envoie la boule } \overline{B}(0, 3\|\vec{u}_0\|_2) \text{ dans elle-même) et}$$

$$T_2 = \min\left(1, \frac{1}{4C_{\epsilon, \alpha, \eta}^1(1 + 18\|\vec{u}_0\|_2^2)}\right) \text{ (} R \text{ est contractante, de rapport } \frac{1}{2}\text{).}$$

L'équation $\vec{u} = R(\vec{u})$ admet donc une unique solution dans $E_T \cap G_T$ pour un certain $T(\|\vec{u}_0\|_2, \epsilon, \alpha, \eta)$.

(B) Soit T^* le temps maximal d'existence. Si T^* est infini alors la solution est globale.

Sinon, supposons un instant que $\lim_{t \rightarrow T^*} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \neq \infty$. Il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $t_n \rightarrow T^*$ avec $\|\vec{u}(t_n)\|_{L^2} \leq l$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut alors construire une solution sur $[0, \epsilon]$ au même problème de Cauchy ayant pour donnée initiale $\vec{u}(t_n)$: le point important est de remarquer que $\epsilon = \epsilon(\|\vec{u}(t_n)\|_2) = \epsilon(l)$. Il suffit alors de choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t_{n_0} + \epsilon > T^*$ et de raccorder les solutions. Le temps maximal d'existence n'est plus T^* , ce qui est absurde. \square

Avant de passer aux égalités d'énergie, énonçons un résultat sur la régularité de la solution \vec{u} :

Proposition 3.1.3.

(A) La solution locale \vec{u} des équations (5.3) vérifie $\vec{u} \in \mathcal{C}^\infty((0, T^*) \times \mathbb{R}^3)$.

(B) De plus, $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T^*), (L^2(\mathbb{R}^3)^3)$.

Démonstration. (A) Soit $0 < T_0 < t < T^*$, on considère :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= e^{(t-T_0)\Delta} \vec{u}_{T_0} - \int_{T_0}^t e^{(t-s)\Delta} [w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon) - \alpha w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) \\ &\quad + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla}(w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u})] ds. \end{aligned} \quad (3.14)$$

On montre par récurrence sur l'entier n que $\vec{u} \in \bigcap_{0 < T_1 < T_2 < T^*} L^\infty((T_1, T_2), H^n)$.

Pour $0 < T_0 < T_1 < t < T_2$, on a successivement :

$$\|e^{(t-s)\Delta} u(T_0)\|_{H^n} \leq C \sup(1, (t - T_0)^{-\frac{1}{2}}) \|\vec{u}(T_0)\|_{H^{n-1}} \quad (3.15)$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \int_{T_0}^t e^{(t-s)\Delta} [w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon) - \alpha w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla}(w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u})] ds \right\|_{H^n} \leq \\ C_\epsilon^n T (\|\vec{u}\|_{L^\infty L^2}^2 + \|\vec{u}\|_{L^\infty L^2}^3). \end{aligned}$$

En effet, nous avons vu lors des estimations $L^\infty L^2$ et $L^\infty \dot{H}^1$ que nous pouvions contrôler tous les termes par la norme $L^\infty L^2$ en plaçant les dérivées sur w_ϵ .

Ces estimations prouvent la régularité spatiale de \vec{u} puis une régularité similaire sur $\partial_t \vec{u}$.

La régularité temporelle suit en écrivant

$$\frac{\partial^{p+1}}{\partial t^{p+1}} u = \Delta \frac{\partial^p}{\partial t^p} u - \frac{\partial^p}{\partial t^p} [w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon) - \alpha w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla}(w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u})].$$

(B) Soit $T < T^*$. Nous pouvons écrire \vec{u} sous la forme $\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{f} ds$ avec $\vec{f} \in (L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3))^3$.

Notons $g = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{f} ds$. On sait que $f \mapsto g$ est borné de $L^2 L^2$ dans $L^\infty L^2$ (car $\|g\|_{L^\infty L^2} \leq \sqrt{T} \|f\|_{L_t^2 L_x^2}$.)

Si $f \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3)$, alors $\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{f} ds \in \mathcal{C}([0, T], L^2)$. Vu que $\mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3)$ est dense dans $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3)$ et que $C_b([0, T], L^2)$ est fermé dans $L^\infty L^2$, on conclut que $f \mapsto g$ est borné de $L^2 L^2$ dans $C_b([0, T], L^2)$. Vu que $t \mapsto e^{t\Delta} \vec{u}_0$ est continu de $[0, T]$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)^3$, alors pour tout $T < T^*$, $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T], (L^2)^3)$: ceci achève la preuve. \square

3.2 Égalité et inégalité d'énergie satisfaites par la solution du modèle convolé.

Nous allons montrer que $T^* = \infty$ et ainsi étendre \vec{u} en une solution globale.

3.2. ÉGALITÉ ET INÉGALITÉ D'ÉNERGIE

Proposition 3.2.1. *Soit \vec{u} la solution du modèle modifié et convolé. Alors \vec{u} vérifie dans $\mathcal{D}'(0, T^*)$ l'égalité d'énergie suivante :*

$$\begin{aligned} \partial_t \|\vec{u}(t)\|_2^2 + 2 \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx + \frac{2}{\eta} \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon|^2 dx + 2\alpha \int |\vec{u}_\epsilon|^4 dx \\ = \int |\vec{u}_\epsilon|^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon) dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Démonstration. La solution \vec{u} étant régulière, nous pouvons écrire (en prenant le produit scalaire entre l'équation (5.3) par \vec{u} :

$$\partial_t |\vec{u}|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 = \Delta |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon - 2\alpha \vec{u} \cdot w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) + \frac{2}{\eta} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u}))$$

Ainsi, dans $\mathcal{D}'(0, T^*)$ (on intègre toujours contre une fonction $h(\frac{x}{A})r(t)$ où h vaut 1 au voisinage de 0; les termes $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ avec $\vec{F} \in L^1 L^1$ ont une contribution nulle lorsque $A \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned} \partial_t \|\vec{u}\|^2 + 2 \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx = & - 2 \int \vec{u} \cdot w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon) dx - 2\alpha \int \vec{u} \cdot w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) dx \\ & + \frac{2}{\eta} \int \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dx \end{aligned}$$

En effet, toutes les intégrales du terme de droite ont un sens, vu que nous intégrons des fonctions $L^2 L^2$ contre des fonctions ayant la même régularité.

Pour estimer les termes de droite, nous allons utiliser (la version polarisée) le théorème de Plancherel (comme w est paire, alors $\widehat{w_\epsilon} = \overline{\widehat{w_\epsilon}}$) :

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon) dx &= -\frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{u}_i \widehat{w_\epsilon} (\widehat{(\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon})_{u_{\epsilon,i}} dx \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{u_{\epsilon,i}} (\widehat{(\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon})_{u_{\epsilon,i}} dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\epsilon (\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}_\epsilon|^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon) dx \end{aligned}$$

De même :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon) dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}_\epsilon|^4 dx \quad (3.17)$$

Enfin, une dernière utilisation du théorème de Plancherel implique

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) (w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon|^2 dx. \end{aligned}$$

Ceci prouve l'égalité avancée dans la proposition. □

Proposition 3.2.2. *Si $\eta < 8\alpha$, nous avons l'inégalité d'énergie suivante :*

$$\begin{aligned} \forall 0 < t < T^*, \|\vec{u}(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(x, s)|^2 dx ds + \left(\frac{2}{\eta} - \frac{1}{4\alpha}\right) \int_0^t \int |(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon)(x, s)|^2 dx ds \\ + \alpha \int_0^t \int |\vec{u}_\epsilon(x, s)|^4 dx ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous partons de l'égalité obtenue dans la proposition précédente, vraie dans $\mathcal{D}'(0, T^*)$:

$$\begin{aligned} \partial_t \|\vec{u}(t)\|_2^2 + 2 \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \, dx + \frac{2}{\eta} \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon|^2 \, dx + 2\alpha \int |\vec{u}_\epsilon|^4 \, dx \\ = \int |\vec{u}_\epsilon|^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon) \, dx. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nous remarquons que $\partial_t \|\vec{u}(t)\|_2^2 \in L^1(0, T)$, car s'écrit comme une somme de fonctions L^1 (grâce à la régularité connue sur chaque terme, d'après l'étude effectuée lors de l'application du point fixe). Contrôlons le terme de droite en utilisant ceux présents à gauche :

$$\forall A > 0 \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}_\epsilon|^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon) \, dx \leq \int \frac{A}{2} |\vec{u}_\epsilon|^4 \, dx + \int \frac{1}{2A} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon|^2 \, dx$$

Lorsque $A = 2\alpha$, nous avons, sous la contrainte $\eta < 8\alpha$:

$$\partial_t \|\vec{u}(t)\|_2^2 + 2 \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \, dx + \left(\frac{2}{\eta} - \frac{1}{4\alpha}\right) \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon|^2 \, dx + \alpha \int |\vec{u}_\epsilon|^4 \, dx \leq 0. \quad (3.19)$$

Intégrons cette inégalité en temps : grâce à la continuité de $t \mapsto \|\vec{u}(t)\|^2$, nous obtenons le résultat souhaité. \square

Comme la norme $\|\vec{u}\|_{E_T}$ est bornée pour tout T par $\|\vec{u}_0\|_2$ alors $T^* = \infty$. Il existe donc une unique solution globale en temps satisfaisant les équations modifiées et convolées de Vishik et Fursikov. Cette solution, régulière, appartient à $(L^\infty L^2)^3 \cap (L^2 \dot{H}^1)^3 \cap (L^4 L^4)^3$ avec des contrôles uniformes dans $L^2 \dot{H}^1$ et $L^\infty L^2$ et une majoration en $\alpha^{-\frac{1}{4}}$ dans la dernière norme.

3.3 Existence d'une solution aux équations modifiées de Vishik et Fursikov

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser le passage à la limite faible de Leray (lorsque ϵ tend vers 0) afin de construire la solution souhaitée. Dans cette partie, \vec{u}_ϵ désignera la solution des équations modifiées et convolées de Vishik et Fursikov, montrant sa dépendance en ϵ . Nous rappelons le lemme essentiel qui nous servira pour contrôler les termes non linéaires (version vectorielle du lemme (2.2.7), la démonstration étant la même).

Lemme 3.3.1. *Soit $z \in \mathcal{D}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ et \vec{u} une distribution telle que $z\vec{u}(t, x) \in (L^2 H^1)^3$ et $\partial_t(z\vec{u}) \in (L^2 H^{-b})^3$ (avec $b > 0$), alors il existe $a \in (0, 1)$ tel que $z\vec{u}_\epsilon \in H^a(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)^3$.*

3.3. SOLUTION DES ÉQUATIONS MODIFIÉES

La proposition suivante sera utile pour montrer la convergence du modèle modifié et convolé vers les équations modifiées de Vishik et Fursikov :

Proposition 3.3.2. *Soit $\vec{u} \in (L^\infty((0, +\infty), (L^2)^3) \cap L^2((0, +\infty), (\dot{H}^1)^3) \cap L^4((0, +\infty), (L^4)^3)$ solution globale des équations modifiées de Vishik et Fursikov :*

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \alpha |\vec{u}|^2 \vec{u} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

Alors \vec{u} satisfait l'égalité d'énergie suivante, vraie dans $\mathcal{D}'(0, +\infty)$:

$$\partial_t \|\vec{u}\|_2^2 = -2 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_2^2 - 2\alpha \|\vec{u}\|_4^4 - \frac{2}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_2^2 + \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) |\vec{u}|^2 \, dx. \quad (3.20)$$

Démonstration. Comme $\partial_t \vec{u} \in (L^2(0, +\infty), \dot{H}^{-1})^3 + (L^{\frac{4}{3}}(0, +\infty), L^{\frac{4}{3}})^3$ (nous utilisons ici $\vec{u} * w_\epsilon \in (L^2 L^2)^3$ et $L^4 L^4 \times L^2 L^2 \in L^{\frac{4}{3}} L^{\frac{4}{3}}$) et $\vec{u} \in (L^2((0, +\infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)))^3 \cap (L^4((0, +\infty), (L^4)^3))^3$, on peut écrire $\partial_t |\vec{u}|^2 = 2 \langle \partial_t \vec{u}, \vec{u} \rangle$ dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$.

On en déduit dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned} \partial_t |\vec{u}|^2 + 2 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_2^2 &= \Delta |\vec{u}|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) |\vec{u}|^2 \\ &\quad - 2\alpha |\vec{u}|^4 - \frac{2}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_2^2 + \frac{2}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \vec{u}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Fixons $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ égal à 1 au voisinage de 0 et intégrons l'égalité précédente contre $h(\frac{x}{A})r(t)$ où $r \in \mathcal{D}(0, \infty)$ puis faisons tendre A vers ∞ . Comme tous les termes $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ (avec $\vec{F} \in (L^1((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3))^3$) ont une contribution nulle, nous obtenons l'égalité avancée. \square

Remarque :

Nous avons $\partial_t \|\vec{u}\|_2^2 \in L^1((0, +\infty), L^1)$ étant donné que tous les termes présents à droite dans les égalités d'énergie sont L_t^1 , grâce à la régularité $L^4 L^4$ de la solution. Ainsi, $t \mapsto \|\vec{u}\|_2$ est continu sur $[0, +\infty)$.

Théorème 3.3.3. *Soit $\vec{u}_0 \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$. Il existe une distribution $\vec{u}(t, x)$ dans $(\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3))^3$, solution globale des équations modifiées de Vishik et Fursikov. Plus précisément, sous la contrainte $\eta < 8\alpha$, nous avons :*

i) $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \alpha |\vec{u}|^2 \vec{u} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$.

ii) $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$.

iii) $t \mapsto \vec{u}(t, \cdot)$ est continu de $[0, +\infty)$ dans $(L^2)^3$

iv) $\vec{u} \in (L^\infty((0, +\infty), (L^2)^3) \cap L^2((0, +\infty), (\dot{H}^1)^3) \cap L^4((0, +\infty), (L^4)^3))$

v)

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \|\vec{u}(t)\|_2^2 &+ 2 \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \, dx \, ds \\ &+ \left(\frac{2}{\eta} - \frac{1}{4\alpha}\right) \int_0^t \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \, dx \, ds + \alpha \int_0^t \int |\vec{u}(x, s)|^4 \, dx \, ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

CHAPITRE 3. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2

Démonstration. i) Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, \vec{u}_ϵ est uniformément borné (en ϵ) dans $(L^\infty((0, \infty), L^2))^3$ (dual d'un espace séparable) : grâce au théorème de Banach-Alaoglü, il est possible d'extraire une suite \vec{u}_{ϵ_n} convergeant faiblement* vers une fonction \vec{u} dans $(L^\infty((0, \infty), L^2))^3$. De plus, nous avons aussi (à une sous-suite près) convergence faible de $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\epsilon_n}$ vers $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ dans $L^2((0, \infty), L^2)^{3 \times 3}$ (car elle converge dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)^{3 \times 3}$ et nous avons un contrôle uniforme en ϵ_n et T pour tout $T > 0$ dans $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3)$).

Fixons $\rho \in \mathcal{D}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$. Nous avons immédiatement

$$\langle \partial_t \vec{u}_{\epsilon_n}, \rho \rangle \rightarrow \langle \partial_t \vec{u}, \rho \rangle \quad \text{et} \quad \langle \Delta \vec{u}_{\epsilon_n}, \rho \rangle \rightarrow \langle \Delta \vec{u}, \rho \rangle. \quad (3.23)$$

Étudions la convergence du terme $\langle \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{u}_\epsilon), \rho \rangle$. Il suffit de montrer que $\langle w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{u}_\epsilon, \rho \rangle \rightarrow \langle \vec{u}, \rho \rangle$ (quitte à changer de fonction test pour conclure)

Appelons $\tilde{\rho}(t, x) = \rho(t, -x)$.

$$\begin{aligned} \langle w_\epsilon * \vec{u}_\epsilon, \rho \rangle &= \langle \vec{u}_\epsilon * (w_\epsilon - \delta_0), \rho \rangle + \langle \vec{u}_{\epsilon_n} * \delta_0, \rho \rangle \\ &= [\vec{u}_\epsilon * (w_\epsilon - \delta_0) * \tilde{\rho}](0) + \langle \vec{u}_\epsilon, \rho \rangle \\ &\rightarrow \langle \vec{u}, \rho \rangle \quad \text{car } \vec{u}_\epsilon \text{ converge faiblement vers } \vec{u} \end{aligned}$$

et $[\vec{u}_\epsilon * (w_\epsilon - \delta_0) * \tilde{\rho}](0) \leq \|\vec{u}_\epsilon\|_{L^\infty L^2} \|w_\epsilon * \tilde{\rho} - \tilde{\rho}\|_2 \leq \|\vec{u}_0\|_2 \|w_\epsilon * \tilde{\rho} - \tilde{\rho}\|_2$.

On termine en écrivant

$$\langle w_\epsilon * w_\epsilon * \vec{u}_\epsilon, \rho \rangle = \langle w_\epsilon * \vec{u}_\epsilon * (w_\epsilon - \delta_0), \rho \rangle + \langle w_\epsilon * \vec{u}_\epsilon, \rho \rangle, \quad (3.24)$$

la convergence faible de $w_\epsilon * \vec{u}_\epsilon$ et le contrôle uniforme de $w_\epsilon * \vec{u}_\epsilon \in L^\infty L^2$ permettent de conclure.

Pour faire converger les deux termes non linéaires, nous avons besoin d'une convergence forte.

Pour toute fonction test ϕ , d'un côté, $\phi \vec{u}_\epsilon$ est uniformément contrôlé dans $(L^2 \dot{H}^1)^3$ et de l'autre $\partial_t \phi \vec{u}_\epsilon$ l'est dans $(L^2 H^{-s})^3$ (avec $s > \frac{3}{2}$) : en effet,

$$\begin{aligned} \|\phi w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon * w_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon * w_\epsilon)\|_{L^2 H^{-s}} &\leq C \|w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon * w_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\epsilon * w_\epsilon)\|_{L^2 L^1} \\ &\leq C \|\vec{u}_\epsilon\|_{L^\infty L^2} \|\vec{u}_\epsilon\|_{L^2 \dot{H}^1} \\ &\leq C (\|\vec{u}_0\|_2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\phi \alpha w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon * w_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon * w_\epsilon)\|_{L^2 H^{-s}} &\leq C \alpha \|\vec{u}_\epsilon\|_{L^4 L^4}^2 \|\vec{u}_\epsilon\|_{L^\infty L^2} \\ &\leq C (\|\vec{u}_0\|_2) \alpha^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ajoutés aux contrôles (uniformes en ϵ) évidents de $\phi \Delta \vec{u}$ et $\phi \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\epsilon * w_\epsilon * w_\epsilon)$ dans $L^2 H^{-1}$.

3.3. SOLUTION DES ÉQUATIONS MODIFIÉES

Nous pouvons de nouveau appliquer le lemme (3.3.1) et les critères de compacité de Rellich : il existe une sous-suite de \vec{u}_{ϵ_k} convergeant fortement vers \vec{u} dans $L^2_{loc}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$.

On écrit alors (pour $\tilde{\rho}$ valant 1 sur $\text{Supp}\rho + \overline{B}(0, 2)$)

$$\langle w_\epsilon * ((\vec{u}_\epsilon * w_\epsilon \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\epsilon * w_\epsilon), \rho \rangle = \langle ((\tilde{\rho}\vec{u}_\epsilon) * w_\epsilon \cdot \vec{\nabla})(\tilde{\rho}\vec{u}_\epsilon) * w_\epsilon, w_\epsilon * \rho \rangle \quad (3.25)$$

Comme $(\tilde{\rho}\vec{u}_\epsilon) * w_\epsilon$ converge fortement vers $\tilde{\rho}\vec{u}$ dans $(L^2L^2)^3$ alors le produit $((\vec{u}_\epsilon * w_\epsilon \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\epsilon * w_\epsilon)$ converge faiblement vers $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ dans $(L^1L^1)^3$; contre la convergence forte de $w_\epsilon * \rho \rightarrow \rho$ dans $L^\infty L^\infty$, nous avons bien la convergence du terme bilinéaire.

Pour le terme $w_\epsilon * (|\vec{u}_\epsilon * w_\epsilon|^2 \vec{u}_\epsilon * w_\epsilon)$, on utilise la convergence forte de \vec{u}_{ϵ_n} vers \vec{u} dans $(L^3L^3)_{loc}$. En effet, \vec{u}_{ϵ_n} converge fortement vers \vec{u} dans $(L^2L^2)_{loc}^3$ et \vec{u}_{ϵ_n} est bornée dans $(L^\infty L^2)^3$: par interpolation complexe, cette suite converge fortement dans $(L^6L^2)_{loc}^3$. D'autre part, \vec{u}_{ϵ_n} est bornée dans $(L^2L^6)^3$, donc \vec{u}_{ϵ_n} converge fortement vers \vec{u} dans $(L^3L^3)_{loc}^3$. Il en va de même pour $(\bar{\rho}\vec{u}) * w_\epsilon$ où $\bar{\rho}$ vaut 1 sur $\text{Supp}\rho + \overline{B}(0, 3)$: ceci assure la convergence du dernier terme non linéaire. Nous avons donc prouvé

$$\langle \partial_t \vec{u}, \rho \rangle = \langle \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \alpha |\vec{u}|^2 \vec{u} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \rho \rangle .$$

iv) Prouvons la régularité souhaitée sur \vec{u} . De la suite \vec{u}_{ϵ_n} convergeant fortement dans $(L^2L^2)_{loc}^3$, il est toujours possible (via le procédé d'extraction diagonal de Cantor) d'en extraire une autre qui converge presque partout vers \vec{u} (il suffit, par exemple, de recouvrir $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ sous la forme d'une réunion dénombrable de $[i; i+1] \times C_k$ où C_0 est la boule unité et $C_k = \{x : 2^k < |x| \leq 2^{k+1}\}$).

Nous savons déjà que $\vec{u} \in (L^\infty L^2)^3$. Remarquons que nous pouvons aussi prouver que $\vec{u} \in (L^\infty L^2)^3 \cap L^4((0, +\infty), (L^4)^3)$ en utilisant le même argument.

Pour $v \in L^1[0, +\infty)$, le lemme de Fatou permet d'écrire (comme $|v||\vec{u}_{\epsilon_n}|^2$ est une suite de fonctions mesurables positives convergeant p.p. vers $|v||\vec{u}|^2$) :

$$\int \int |v||\vec{u}|^2 dx dt \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int \int |v||\vec{u}_{\epsilon_n}|^2 dx dt \leq \|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^\infty L^2}^2 \|v\|_1$$

Ainsi $t \mapsto \int |\vec{u}(x, t)|^2 dx \in L^\infty$ avec $\|\vec{u}\|_{L^\infty L^2} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^\infty L^2}$.

De même, de cette suite \vec{u}_{ϵ_n} , on extrait une autre sous-suite (toujours notée de la même façon) telle que $\vec{u}_{\epsilon_n} * w_\epsilon$ converge p.p. vers \vec{u} . Ainsi $|\vec{u}_{\epsilon_n} * w_\epsilon|^4$ est une suite de fonctions positives, mesurables qui convergent p.p. vers $|\vec{u}|^4$. Une deuxième application du lemme de Fatou permet de conclure :

$$\forall T > 0, \int_0^T \int |\vec{u}(t, x)|^4 dx dt \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int |\vec{u}_{\epsilon_n} * w_\epsilon(t, x)|^4 dx dt.$$

CHAPITRE 3. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2

Ceci montre que $\vec{u} \in L^4((0, +\infty), (L^4)^3)$.

v) Inégalité d'énergie vérifiée par la limite.

C'est une conséquence de la proposition 3.3.2. La solution \vec{u} vérifie l'égalité d'énergie suivante, vraie dans $\mathcal{D}'(0, +\infty)$:

$$\partial_t \|\vec{u}\|_2^2 = -2\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_2^2 - 2\alpha \|\vec{u}\|_4^4 - \frac{2}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_2^2 + \int \vec{\nabla} \cdot \vec{u} |\vec{u}|^2 \, dx. \quad (3.26)$$

que nous intégrons entre 0 et t :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \|\vec{u}(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \, dx \, ds + \frac{2}{\eta} \int_0^t \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \, dx \, ds \\ + 2\alpha \int_0^t \int |\vec{u}(x, s)|^4 \, dx \, ds = \|\vec{u}_0\|_2^2 + \int_0^t \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) |\vec{u}|^2 \, dx \, ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sachant que $\int_0^t \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) |\vec{u}|^2 \, dx \, ds \leq \alpha \int_0^t \int |\vec{u}(x, s)|^4 \, dx \, ds + \frac{\alpha}{4} \int_0^t \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \, dx \, ds$, nous obtenons $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \, dx \, ds + \left(\frac{2}{\eta} - \frac{\alpha}{4}\right) \int_0^t \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \, dx \, ds \\ + \alpha \int_0^t \int |\vec{u}(x, s)|^4 \, dx \, ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2. \end{aligned}$$

Nous avons déjà prouvé iii), conséquence de l'égalité d'énergie vérifiée par $\partial_t \|\vec{u}\|_2^2$. Il nous reste à montrer ii), c'est-à-dire vérifier que \vec{u} a la bonne donnée initiale.

Soit $a \in \mathcal{D}[0, +\infty)$ tel que $a(0) = 1$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

$\int_0^{+\infty} \langle \vec{u}_\epsilon(t), \rho \rangle \partial_t a(t) \, dt = - \langle \vec{u}_\epsilon(0), \rho \rangle - \int_0^{+\infty} \langle \partial_t \vec{u}_\epsilon(t), \rho \rangle a(t) \, dt$. Faisons tendre ϵ_n vers 0. Comme $\vec{u}_\epsilon(0) = \vec{u}_0$ (la solution issue de l'algorithme du point fixe a pour donnée initiale \vec{u}_0), \vec{u}_ϵ et $\partial_t \vec{u}_\epsilon(t)$ convergent faiblement respectivement vers \vec{u} et $\partial_t \vec{u}$ dans $(L^2 \dot{H}^1)^3$ et $(L^2 H^{-s})^3$ ($s > \frac{3}{2}$), le passage à la limite est licite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_0^{+\infty} \langle \vec{u}(t), \rho \rangle \partial_t a(t) \, dt = - \langle \vec{u}_0, \rho \rangle - \int_0^{+\infty} \langle \partial_t \vec{u}(t), \rho \rangle a(t) \, dt.$$

$\langle \vec{u}(0, \cdot), \rho \rangle = \langle \vec{u}_0, \rho \rangle$ étant vrai pour toute fonction-test, nous avons $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$. \square

3.4 Convergence vers les équations de Navier Stokes

A cet instant, étant donné $\vec{u}_0 \in (L^2)^3$ vérifiant $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, il existe un champ de vecteurs $\vec{u}_{\alpha, \eta}$ dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ tel que :

$$\partial_t \vec{u}_{\alpha, \eta} = \Delta \vec{u}_{\alpha, \eta} - (\vec{u}_{\alpha, \eta} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\alpha, \eta} - \alpha |\vec{u}_{\alpha, \eta}|^2 \vec{u}_{\alpha, \eta} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha, \eta}).$$

Les paramètres α et η sont liés par la condition $\eta < 8\alpha$ afin de satisfaire l'inégalité d'énergie :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \|\vec{u}_{\alpha, \eta}(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha, \eta}|^2 \, dx \, ds + \left(\frac{2}{\eta} - \frac{1}{4\alpha}\right) \int_0^t \int |\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\epsilon * \vec{u}_{\alpha, \eta})|^2 \, dx \, ds \\ + \alpha \int_0^t \int |\vec{u}_{\alpha, \eta}(x, s)|^4 \, dx \, ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2. \end{aligned}$$

3.4. CONVERGENCE VERS LES ÉQUATIONS DE NAVIER STOKES

3.4.1 Passage à la limite

Faisons tendre α vers 0 (nécessairement $\eta \rightarrow 0$) : pour cette raison, nous noterons simplement le champ de vitesse \vec{u}_α . De même, par un autre abus de langage, $\alpha_k \rightarrow 0$ signifiera toujours le couple $(\alpha_k, \eta_k) \rightarrow (0, 0)$.

L'inégalité d'énergie montre que nous avons des contrôles uniformes (en α et η et T) de \vec{u}_α dans $L^\infty((0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ et $L^2((0, T), (\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))^3)$ pour tout $T > 0$. De ces estimations, il existe donc une sous suite α_k telle que $\vec{u}_{\alpha_k} \rightarrow \vec{u}$ converge faiblement* vers une fonction $\vec{u} \in L^\infty((0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ et $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}$ faiblement vers $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ dans $L^2((0, \infty), L^2)^{3 \times 3}$.

Restreignons la condition portant sur α et η à $\eta < 4\alpha$: sous cette nouvelle contrainte, non seulement nous avons un contrôle uniforme de $\|\alpha^{\frac{1}{4}} \vec{u}_\alpha\|_{L^4 L^4}$ mais aussi de $\|\frac{1}{\sqrt{\eta}} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha\|_{L^2 L^2}$ (en effet $\frac{2}{\eta} - \frac{1}{4\alpha} > \frac{1}{\eta}$).

Néanmoins, il nous manque une majoration uniforme en η du dernier terme $\frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha)$: la seule connue est en $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ dans $L^2((0, +\infty), (L^2(\mathbb{R}^3))^3)$.

Pour appliquer le passage à la limite de Leray, nous devons contrôler $\partial_t(\rho \vec{u}_\alpha)$ dans $(L^2 H^{-s})^3$ où ρ est une fonction test. La proposition suivante nous montre qu'il n'est pas nécessaire de majorer uniformément $\frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha)$ pour l'obtenir. L'utilisation du projecteur de Leray \mathbb{P} (continu de L^p dans L^p pour $1 < p < \infty$ et dans les espaces de Sobolev) permet de contourner cette difficulté.

Proposition 3.4.1. *De \vec{u}_{α_k} , il existe une sous-suite (toujours notée \vec{u}_{α_k}) qui converge fortement vers \vec{u} dans $(L^2_{loc}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))^3$.*

Démonstration. Soit $\rho \in \mathcal{D}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$.

a) $\rho \mathbb{P} \vec{u}_\alpha$ est uniformément borné dans $(L^2(\mathbb{R}), H^1(\mathbb{R}^3))^3$ (par continuité de \mathbb{P} de $(H^1)^3$ dans lui-même).

b) $\partial_t(\rho \mathbb{P} \vec{u}_\alpha)$ est uniformément borné dans $(L^2(\mathbb{R}, H^{-\sigma}(\mathbb{R}^3)))^3$ pour $\sigma > \frac{3}{2}$.

Pour cela, nous écrivons $\partial_t(\rho \mathbb{P} \vec{u}_\alpha) = \mathbb{P} \vec{u}_\alpha \partial_t \rho + \rho \partial_t(\mathbb{P} \vec{u}_\alpha)$.

Le terme $\mathbb{P} \vec{u}_\alpha \partial_t \rho$ est évidemment contrôlé dans $(L^2(\mathbb{R}), H^1(\mathbb{R}^3))^3$.

Étudions le deuxième : $\rho \partial_t(\mathbb{P} \vec{u}_\alpha) = \rho \mathbb{P} \partial_t \vec{u}_\alpha = \rho \Delta \mathbb{P} \vec{u}_\alpha - \rho \mathbb{P}((\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha) - \alpha \rho \mathbb{P}(|\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha)$. Les deux termes $\rho \mathbb{P}(\Delta \vec{u}_\alpha)$ et $\rho \mathbb{P}((\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha)$ sont respectivement contrôlés dans $(L^2 H^{-1})^3$ et $(L^2 H^{-\sigma})^3$ ($L^2 L^1 \subset L^2 H^{-\sigma}$ pour $\sigma > \frac{3}{2}$, toujours par continuité du projecteur de H^s dans lui-même).

Le dernier terme $\alpha \rho |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha$ est majoré dans $(L^2 L^1)^3$ en $\alpha^{\frac{1}{2}}$, étant donné que $\||\vec{u}_\alpha|^2\|_{L^2 L^2} \leq C \alpha^{-\frac{1}{2}}$ et $\|\vec{u}_\alpha\|_{L^\infty L^2} \leq C$; ainsi, nous avons une majoration uniforme de $\alpha \rho \mathbb{P}(|\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha)$

CHAPITRE 3. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2

dans $(L^2 H^{-\sigma})^3$ en $\alpha^{\frac{1}{2}}$ (et donc uniforme lorsque $\alpha \leq 1$).

Nous pouvons de nouveau utiliser le lemme 3.3.1 : $\rho \mathbb{P} \vec{u}_\alpha$ est donc uniformément contrôlé dans $(H^a(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3))^3$ pour un petit $a > 0$.

c) Montrons que $(Id - \mathbb{P}) \vec{u}_\alpha = \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha$ converge vers 0 dans $L^2((0, +\infty), L^6(\mathbb{R}^3)^3)$. Comme $\|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha\|_{L^2 L^2} \leq C \sqrt{\eta}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha$ converge vers 0 dans $L^2((0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^3)^3)$, donc $(Id - \mathbb{P}) \vec{u}_\alpha = \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha$ converge vers 0 dans $L^2((0, +\infty), L^6(\mathbb{R}^3)^3)$, de par les inégalités de Sobolev dans \mathbb{R}^3 .

Terminons la preuve : en écrivant $\rho \vec{u}_\alpha = \rho \mathbb{P} \vec{u}_\alpha + \rho (Id - \mathbb{P}) \vec{u}_\alpha$, de par le point c), $\rho (Id - \mathbb{P}) \vec{u}_{\alpha_k} \rightarrow 0$ fortement dans $(L^2 L^2)_{loc}^3$. De b), nous savons qu'il est possible d'extraire une sous-suite de \vec{u}_{α_k} telle que $\mathbb{P} \vec{u}_{\alpha_k}$ converge fortement dans $(L_{loc}^2(t, x))^3$, nécessairement vers \vec{u} (vu qu'il y a convergence faible vers \vec{u} et par unicité de la limite dans \mathcal{D}'). Nous avons donc le résultat annoncé. Remarquons que nous obtenons de plus $\vec{u} = \mathbb{P} \vec{u}$ (par continuité de \mathbb{P} de $(L^2)^3$ dans $(L^2)^3$ et convergence faible de \vec{u}_{α_k} vers \vec{u}). \square

La proposition suivante est la clé de ce chapitre, vu qu'elle fournit un contrôle uniforme de la pression du modèle approché.

Proposition 3.4.2. *Il est possible d'écrire $p_\alpha = -\frac{1}{\eta}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha) = R_\alpha + S_\alpha$ tel que $\|R_\alpha\|_{L^{\frac{4}{3}} L^2} \leq C$ et pour $p \in [3; 4[$, $\|S_\alpha\|_{L^{\frac{p}{3}} L^{\frac{6p}{7p-12}}} \leq C\alpha$ où C est une constante uniforme en α et η .*

Démonstration. Comme nous ne pouvons avoir de contrôle via l'inégalité d'énergie, l'idée est d'injecter p_α dans l'équation aux dérivées partielles vérifiée par \vec{u}_α en prenant la divergence de celle-ci

$$\partial_t p_\alpha = \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \Delta p_\alpha + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha + \frac{\alpha}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha). \quad (3.28)$$

Regardons-la comme solution de l'équation intégrale suivante

$$p_\alpha(t) = e^{t(1+\frac{1}{\eta})\Delta} p_0 + \int_0^t e^{(t-s)(1+\frac{1}{\eta})\Delta} \left[\frac{1}{\eta} A(s) + \frac{\alpha}{\eta} B(s) \right] ds \quad (3.29)$$

où $A = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha$ et $B = \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha)$.

Rappelons d'abord que $p_0 = 0$ vu que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\vec{u}_\alpha(0, \cdot) = \vec{u}_0$.

Considérons le changement de variable suivant en temps $\sigma = s(1 + \frac{1}{\eta})$ et $\tau = t(1 + \frac{1}{\eta})$, nous obtenons :

$$p_\alpha\left(\frac{\tau}{1 + \frac{1}{\eta}}\right) = \int_0^\tau e^{(\tau-\sigma)\Delta} \left[A\left(\frac{\sigma}{1 + \frac{1}{\eta}}\right) + \alpha B\left(\frac{\sigma}{1 + \frac{1}{\eta}}\right) \right] \frac{d\sigma}{1 + \eta} \quad (3.30)$$

3.4. CONVERGENCE VERS LES ÉQUATIONS DE NAVIER STOKES

Notre but est d'utiliser la régularité maximale $L^p L^q$ du noyau de la chaleur : écrivons donc l'équation intégrale dans ce sens

$$p_\alpha\left(\frac{\tau}{1+\frac{1}{\eta}}\right) = \int_0^\tau e^{(\tau-\sigma)\Delta} \Delta \left[\frac{1}{\Delta} A\left(\frac{\sigma}{1+\frac{1}{\eta}}\right) + \alpha \frac{1}{\Delta} B\left(\frac{\sigma}{1+\frac{1}{\eta}}\right) \right] \frac{d\sigma}{1+\eta}. \quad (3.31)$$

i) Premier terme $\frac{1}{\Delta} A$.

Comme \vec{u}_α est contrôlé dans $(L^4 L^3)^3$ (par interpolation complexe entre $L^\infty L^2$ et $L^2 L^6$) alors $(\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha \in (L^{\frac{4}{3}} L^{\frac{6}{5}})^3$.

Grâce aux inégalités de Sobolev dans \mathbb{R}^3 ($\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, par dualité de $H^1 \hookrightarrow L^6$), nous obtenons un contrôle de $\frac{1}{\Delta} A$ dans $(L^{\frac{4}{3}} L^2)^3$. Ainsi

$$\left\| \frac{1}{\Delta} A\left(\frac{\sigma}{1+\frac{1}{\eta}}\right) \right\|_{L^{\frac{4}{3}} L^2} \leq C \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)^{\frac{3}{4}}. \quad (3.32)$$

ii) Deuxième terme $\frac{1}{\Delta} B$.

Ici, nous ne pouvons utiliser un contrôle $(L^4 L^3)^3$. En effet, nous arriverions à une majoration de $|\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha$ dans $(L^{\frac{4}{3}} L^1)^3$, cas prohibé pour majorer $\frac{1}{\Delta} B$ puisque nous sommes confrontés au cas limite des injections de Sobolev.

Utilisons donc une autre interpolation.

Comme \vec{u}_α est uniformément borné dans $(L^\infty L^2)^3 \cap (L^2 L^6)^3$ alors \vec{u}_α l'est aussi dans $(L^p L^q)^3$ où

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{2} + (1-\lambda)0 \text{ et } \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{6} + \frac{1-\lambda}{2} : \text{ ainsi } \frac{1}{q} + \frac{2}{3p} = \frac{1}{2}.$$

Puisque $\frac{3}{q} - \frac{1}{3} = \frac{7p-12}{6p}$, nous trouvons $\frac{1}{\Delta} B \in L^{\frac{p}{3}}((0, +\infty), (L^{\frac{6p}{7p-12}}(\mathbb{R}^3))^3)$. Ce contrôle est valable pour $p \in [3; 4[$, d'où $\lambda \in]\frac{1}{2}; \frac{2}{3}]$.

Donc

$$\left\| \frac{1}{\Delta} B\left(\frac{\sigma}{1+\frac{1}{\eta}}\right) \right\|_{L^{\frac{p}{3}} L^{\frac{6p}{7p-12}}} \leq C \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)^{\frac{3}{p}}. \quad (3.33)$$

Finissons la preuve : définissons R_α et S_α :

$$\begin{aligned} R_\alpha\left(\frac{\tau}{1+\frac{1}{\eta}}\right) &= \int_0^\tau e^{(\tau-\sigma)\Delta} \Delta \frac{1}{\Delta} A\left(\frac{\sigma}{1+\frac{1}{\eta}}\right) \frac{d\sigma}{1+\eta} \text{ and} \\ S_\alpha\left(\frac{\tau}{1+\frac{1}{\eta}}\right) &= \alpha \int_0^\tau e^{(\tau-\sigma)\Delta} \Delta \frac{1}{\Delta} B\left(\frac{\sigma}{1+\frac{1}{\eta}}\right) \frac{d\sigma}{1+\eta}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

par la régularité maximale du noyau de la chaleur 1.3.3 ($3 \leq p < 4$) :

$$\|R_\alpha\left(\frac{\tau}{1+\frac{1}{\eta}}\right)\|_{L^{\frac{4}{3}} L^2} \leq C \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)^{\frac{3}{4}}, \text{ nous obtenons donc } \|R_\alpha\|_{L^{\frac{4}{3}} L^2} \leq C \text{ et } \|S_\alpha\|_{L^{\frac{p}{3}} L^{\frac{6p}{7p-12}}} \leq C\alpha.$$

Par exemple, si $\lambda = \frac{7}{12}$, nous avons $p = \frac{24}{7}$ et un contrôle de S_α dans $L^{\frac{8}{7}} L^{\frac{12}{7}}$. \square

Remarques :

1) Nous aurions pu majorer les deux termes $\frac{1}{\Delta} A$ et $\alpha \frac{1}{\Delta} B$ de la même façon. En effet, $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\alpha$ et $\alpha^{\frac{1}{2}} |u_\alpha|^2$ sont tous deux contrôlés dans $L^2((0, T), L^2(\mathbb{R}^3)^3)$.

CHAPITRE 3. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2

Comme $\vec{u}_\alpha \in (L^p L^q)^3$ ($\frac{1}{q} + \frac{2}{3p} = \frac{1}{2}$), le produit $(\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\alpha$ est majoré dans $(L^r L^s)^3$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} = \frac{1}{r}$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{2} = \frac{1}{s}$ donc $\frac{1}{\Delta}A$ et $\alpha \frac{1}{\Delta}B$ le sont dans $L^r L^t$ où $\frac{2}{3r} + \frac{1}{t} = 1$, ($r \in [1; 2[$, donc $s \in]1; \frac{3}{2}]$ et $t \in]\frac{3}{2}; 3]$) : nous avons donc une majoration uniforme sur p_α dans $L^r L^t$, mais ce contrôle ne montre pas que l'un des deux termes tend vers 0 dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$.

2) Il est intéressant de constater que la proposition 3.4.2 donne un contrôle de la pression dans certains espaces $L^r L^t$ mais la contrainte $r < 2$ doit être respectée. Ainsi, même avec le contrôle obtenu sur p_α , nous n'aurions pu montrer la proposition 3.4.1 sans passer par le projecteur de Leray.

Nous avons maintenant tous les outils pour prouver la convergence.

Théorème 3.4.3. (*convergence vers les équations de Navier-Stokes*)

Soit $\vec{u}_0 \in (L^2)^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. Les solutions des équations modifiées de Vishik et Fursikov convergent vers celles des équations de Navier-Stokes (au sens de Leray) lorsque $(\alpha, \eta) \rightarrow (0, 0)$:

Il existe un champ de vitesse $\vec{u} \in \mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ satisfaisant :

1) $\vec{u} \in L^\infty((0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^3))^3 \cap L^2((0, +\infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))^3$

2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

3) il existe $p \in \mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ tel que $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p$. De plus, $p \in L^2 L^{\frac{3}{2}}$.

Démonstration.

1) Nous avons déjà prouvé 1). Remarquons que nous pouvons aussi obtenir $\vec{u} \in (L^\infty(0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^3))^3$ par utilisation du lemme de Fatou.

2) La convergence faible (à extraction près) de $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}$ vers $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ dans $L^2 L^2$, nous assure que

$$\int \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \leq \liminf_{\alpha_k \rightarrow 0} \int \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}|^2 \leq \liminf_{\eta_k \rightarrow 0} \eta_k \|\vec{u}_0\|_2^2$$

(par l'inégalité d'énergie vérifiée par \vec{u}_α sous la contrainte $\alpha < 4\eta$) qui tend vers 0 lorsque $\eta_k \rightarrow 0$. Nous aurions aussi pu utiliser le fait que $\mathbb{P}\vec{u} = \vec{u}$.

3) Nous avons les convergences suivantes dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$:

$$\partial_t \vec{u}_{\alpha_k} \rightarrow \partial_t \vec{u}, \quad \Delta \vec{u}_{\alpha_k} \rightarrow \Delta \vec{u} \tag{3.35}$$

La convergence forte de \vec{u}_{α_k} vers \vec{u} dans $(L^2 L^2)_{loc}^3$ assure aussi celle de

$$(\vec{u}_{\alpha_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_{\alpha_k} \rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}. \tag{3.36}$$

Enfin $\alpha |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha$ est contrôlé dans $(L^2 L^1)^3$ par $\alpha^{\frac{1}{2}}$, il tend donc vers 0 dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$.

La proposition 3.4.2 nous assure un passage à la limite licite pour le dernier terme

$$\frac{1}{\eta_k} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}) = \vec{\nabla} (R_{\alpha_k} + S_{\alpha_k}).$$

3.4. CONVERGENCE VERS LES ÉQUATIONS DE NAVIER STOKES

Comme $\|R_\alpha\|_{L^{\frac{4}{3}}L^2} \leq C$, nous pouvons extraire une sous-suite (appelée R_{α_k}) qui converge faiblement vers une distribution $p \in L^{\frac{4}{3}}L^2$. Donc $\vec{\nabla}R_{\alpha_k} \rightarrow \vec{\nabla}p$ dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$.

Lorsque $q \in [3; 4[$, $\|S_{\alpha_k}\|_{L^{\frac{q}{3}}L^{\frac{6q}{7q-12}}} \leq C\alpha_k$, il advient que $\vec{\nabla}S_{\alpha_k} \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$.

Nous retrouvons bien les équations de Navier-Stokes vu que $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})$ lorsque $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{u} \in L^2H^1$.

Le fait que $p \in L^2L^{\frac{3}{2}}$ vient du fait qu'il peut être déduit de $\vec{u} \in (L^4L^3)^3$ par la formule $p = -\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j (u_i u_j)$ car $\frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j$ est un opérateur de Calderón-Zygmund. \square

Remarque : Comment pouvons-nous retrouver l'expression habituelle de la pression ?

Nous avons une expression locale de p comme limite (lorsque $\alpha \rightarrow 0$ donc $\eta \rightarrow 0$) de $p_\alpha = -\frac{1}{\eta}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha)$. Nous souhaitons voir comment retrouver (qualitativement) $p = -\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ à partir de celle-ci.

Rappelons que p_α a été injecté dans l'équation $\partial_t \vec{u}_\alpha = \Delta \vec{u}_\alpha - (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\alpha + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha)$. Nous obtenons (en omettant le terme $\alpha |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha$ car nous avons vu qu'il avait une contribution nulle lors du passage à la limite lorsque $\alpha \rightarrow 0$) :

$$\partial_t p_\alpha = (1 + \frac{1}{\eta}) \Delta p_\alpha + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha.$$

Ainsi p_α vérifie l'équation intégrale :

$$p_\alpha = \int_0^t e^{(t-s)(1+\frac{1}{\eta})\Delta} (1 + \frac{1}{\eta}) \Delta \left(\frac{1}{1 + \eta} \right) \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha \, ds \quad (3.37)$$

Faisons tendre α vers 0 : nous retrouvons alors l'expression habituelle de la pression si nous considérons une sorte de phase stationnaire où le temps serait concentré en t .

En effet, supposons $\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha$ constant et mettons tout le poids de l'intégrale en $s = t$, nous retrouvons alors $p = -\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$.

3.4.2 Inégalité d'énergie (de Leray) vérifiée par la limite.

Pour montrer totalement que la solution construite est une solution au sens de Leray, vérifions qu'elle satisfait l'inégalité d'énergie. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4.4. *La fonction $t \mapsto \|\vec{u}\|_2$ est continue de $[0, \infty)$ dans $(L^2)^3$ muni de la topologie faible.*

Démonstration. Nous savons que $p \in L^{\frac{4}{3}}L^2$.

De $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p$, nous avons $\partial_t \vec{u} \in L^1((0, T), (H^{-s})^3)$ pour tout $T < +\infty$ et $s > \frac{3}{2}$ (en effet $\vec{\nabla}p \in L^{\frac{4}{3}}((0, T), (H^{-1})^3) \subset L^1((0, T), (H^{-s})^3)$). Alors \vec{u} est continu de $[0, T)$ dans $(H^{-s})^3$. De plus, comme $\vec{u}(t, \cdot)$ est borné dans $(L^2)^3$, $t \mapsto \vec{u}$ est continu de $[0, +\infty)$ dans $(L^2)^3$ muni de la topologie faible (ceci étant vrai pour tout $T > 0$ et la continuité est une propriété locale). \square

Proposition 3.4.5.

$$\forall t > 0, \|\vec{u}(t, x)\|_2^2 + 2 \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx dt \leq \|\vec{u}_0\|_2^2. \quad (3.38)$$

Démonstration. Nous savons que sous la contrainte $0 < \eta < 4\alpha$ \vec{u}_α vérifie

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \|\vec{u}_\alpha(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\alpha|^2 dx ds + \frac{1}{\eta} \int_0^t \int |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha|^2 dx ds \\ + \alpha \int_0^t \int |u_\alpha(x, s)|^4 dx ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2. \end{aligned}$$

Soit $a(t)$ une fonction test de $\mathcal{D}(0, \infty)$: nous savons qu'il existe une suite α_k telle que $a\vec{u}_{\alpha_k}$ converge faiblement vers $a(t)\vec{u}$ dans $(L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))^3$ (convergence dans $(\mathcal{D}')^3$ et borne uniforme dans $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3)^3$ pour tout $T > 0$) et $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}$ faiblement vers $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}$ dans $(L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))^{3 \times 3}$.

De l'inégalité d'énergie précédente, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \int \int |a(t)|^2 |\vec{u}(t)|^2 dt dx + 2 \int |a(t)|^2 \left(\int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s)|^2 ds dx \right) dt \\ \leq \liminf_{\alpha_k \rightarrow 0} \int \int |a(t)|^2 |\vec{u}_{\alpha_k}(t)|^2 dt dx + 2 \int |a(t)|^2 \left(\int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}|^2 ds dx \right) dt \\ \leq \|\vec{u}_0\|_2^2 \int |\alpha(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.39)$$

On choisit $\forall t_0 > 0$ $a(t) = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \Theta(\frac{t-t_0}{\eta})$ avec $\Theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int |\Theta|^2 dt = 1$. On obtient alors :

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \int \frac{1}{\eta} |\Theta(\frac{t-t_0}{\eta})|^2 \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 dt + 2 \int_0^{t_0} \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s)|^2 dx ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2. \quad (3.40)$$

On termine la preuve : - si $t_0 > 0$ est un point de Lebesgue de la fonction mesurable $t \mapsto \|\vec{u}\|_{L^2}$ alors la limite sup précédente est égale à $\|\vec{u}(t_0)\|_{L^2}^2$. Donc l'inégalité d'énergie est vérifiée p.p. $t_0 > 0$.

- sinon, on considère une suite t_n de points de Lebesgue qui converge vers t_0 ; dans ce cas $\|u(t_0)\|_2^2 \leq \liminf_{t_n \rightarrow t_0} \|u(t_n)\|_2^2$ par continuité faible pour $t > 0$ de $t \mapsto \|u(t)\|_2^2$ (d'après le lemme 3.4.4) et $\int_0^{t_0} \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s)|^2 ds dx = \lim_{t_n \rightarrow t_0} \int_0^{t_n} \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s)|^2 dx ds$.

Ceci assure l'inégalité d'énergie pour tout t_0 . \square

3.4.3 Donnée initiale

Pour clore ce paragraphe, il nous reste à montrer que $\vec{u}(0, \cdot)$ a la bonne donnée initiale. Nous savons déjà que la donnée initiale est bien définie d'après le lemme 3.4.4.

Proposition 3.4.6.

La solution \vec{u} vérifie à l'origine :

a) $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$

b) $\|\vec{u} - \vec{u}_0\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$.

3.5. SOLUTIONS ADAPTÉES AU SENS DE CKN

Démonstration.

a) Pour montrer que $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$, fixons $a \in \mathcal{D}([0, +\infty))$ tel que $a(0) = 1$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

$$\int_0^{+\infty} \langle \vec{u}_\alpha(t), \rho \rangle \partial_t a(t) dt = - \langle \vec{u}_\alpha(0), \rho \rangle - \int_0^{+\infty} \langle \partial_t \vec{u}_\alpha(t), \rho \rangle a(t) dt.$$

Faisons tendre α vers 0. Comme $\vec{u}_\alpha(0) = \vec{u}_0$, les convergences faibles de \vec{u}_α et $\partial_t \vec{u}_\alpha(t)$ respectivement dans $(L^2 \dot{H}^1)^3$ et $(L^{\frac{4}{3}}((0, T), H^{-1}))^3$ (pour tout $T > 0$) donnent :

$$\int_0^{+\infty} \langle \vec{u}(t), \rho \rangle \partial_t a(t) dt = - \langle \vec{u}_0, \rho \rangle - \int_0^{+\infty} \langle \partial_t \vec{u}(t), \rho \rangle a(t) dt.$$

Ainsi, $\langle \vec{u}(0, \cdot), \rho \rangle = \langle \vec{u}_0, \rho \rangle$ est vrai pour toute fonction-test, donc $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$.

b) Il suffit de prouver que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\vec{u}\|_2 = \|\vec{u}_0\|_2$ vu que $\vec{u}(t)$ converge faiblement vers \vec{u}_0 dans L^2 . D'une part, la continuité faible assure que $\liminf_{t \rightarrow 0^+} \|\vec{u}\|_2 \geq \|\vec{u}_0\|_2$ et d'autre part la proposition 3.4.5 donne l'inégalité manquante : $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|\vec{u}\|_2 \leq \|\vec{u}_0\|_2$. \square

3.5 Solutions adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg

Il nous reste à vérifier que la solution obtenue vérifie l'égalité d'énergie locale de Scheffer pour s'assurer qu'elle est adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. En effet, les conditions locales de régularité sur \vec{u} et p sont largement assurées vu que nous sommes dans le cas L^2 et que nous avons obtenu des conditions globales.

Proposition 3.5.1. *La solution $\vec{u} \in \mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$, construite dans le théorème (3.4.3), vérifie l'égalité d'énergie locale de Scheffer :*

il existe une mesure μ , positive et localement finie, telle que l'égalité suivante soit vérifiée dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$:

$$\partial_t |\vec{u}|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 = \Delta |\vec{u}|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\vec{\nabla} \cdot (p\vec{u}) - \mu. \quad (3.41)$$

Démonstration. Nous partons de l'égalité d'énergie vérifiée par \vec{u}_α (3.3.2), vraie dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned} \partial_t |\vec{u}_\alpha|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\alpha|^2 &= \Delta |\vec{u}_\alpha|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|u_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) |\vec{u}_\alpha|^2 \\ &\quad - 2\alpha |\vec{u}_\alpha|^4 - \frac{2}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha|^2 + \frac{2}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) \end{aligned}$$

et nous faisons tendre $\alpha \rightarrow 0$ (nous rappelons que cela induit que le couple $(\alpha, \eta) \rightarrow (0, 0)$).

a) Nous savons déjà qu'il existe une sous-suite \vec{u}_{α_k} qui converge fortement vers \vec{u} dans $(L^2_{loc}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))^3$ et faiblement dans $(L^2 \dot{H}^1)^3$ (nous avons une borne uniforme dans cet espace), ainsi le passage à la limite des termes $\partial_t |\vec{u}_{\alpha_k}|^2$, $\Delta |u_{\alpha_k}|^2$ ne pose pas problème.

CHAPITRE 3. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2

b) La sous-suite \vec{u}_{α_k} converge fortement vers \vec{u} dans $(L^2_{loc}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))^3$. Comme \vec{u}_{α_k} est uniformément bornée dans $(L^\infty L^2)^3$, elle converge dans $(L^6 L^2)^3_{loc}$. D'autre part, par les inégalités de Sobolev, \vec{u}_{α_k} est uniformément contrôlée dans $(L^2 L^6)^3$, alors \vec{u}_{α_k} converge fortement vers \vec{u} dans $(L^3 L^3)^3_{loc}$: nous avons donc dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$, $\vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}_{\alpha_k}|^2 \vec{u}_{\alpha_k}) \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u})$.

c) Étudions la convergence de $|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}|^2$ dans \mathcal{D}' .

Nous allons montrer que nous n'avons qu'une convergence vers $|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 + \mu$ où μ est une mesure positive localement finie.

D'une part, $|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}|^2$ est une suite bornée de $(L^1 L^1)^3_{loc}$, elle converge donc (à extraction près) dans \mathcal{D}' vers une distribution T .

D'autre part, $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ est limite faible dans $(L^2 L^2)^3_{loc}$ de la suite $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}$ (car elle l'était déjà pour la première suite α_k donc l'est toujours après plusieurs extractions).

Soit ϕ une fonction-test positive $\phi \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3)$:

Considérons l'ouvert $O = \{(x, t), \phi(x, t) > 0\}$ (car ϕ est continue) et l'espace $L^2(O, \phi dx dt)$, muni de la mesure $\phi(t, x) dt dx$. Nous avons

$$| \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}|^2, \phi \rangle = \int \int_O |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}(t, x)|^2 \phi(t, x) dx dt = \| \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k} \|_{L^2(O, \phi dx dt)}^2$$

Par isométrie de $L^2(O, \phi dx dt)$ dans $L^2(O, dx dt)$ via $\vec{f} \rightarrow \vec{f} \sqrt{\phi}$, on obtient que $\sqrt{\phi} \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}$ converge faiblement vers $\sqrt{\phi} \vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ dans $L^2(O, dx dt)$.

Ainsi $\| \sqrt{\phi} \vec{\nabla} \otimes \vec{u} \|_{L^2 L^2} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| \sqrt{\phi} \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k} \|_{L^2 L^2}$

Par passage à la limite, nous obtenons $\langle T, \phi \rangle \geq \| \sqrt{\phi} \vec{\nabla} \otimes \vec{u} \|_{L^2 L^2}^2 = \langle |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2, \phi \rangle$.

Ainsi $\langle T - |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2, \phi \rangle \geq 0$ et nous pouvons conclure que $T = |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 + \mu$ (une distribution positive est d'ordre 0 et le théorème de représentation de Riesz permet de l'identifier à une mesure positive localement finie).

d) Sous la contrainte $\eta < 4\alpha$, la somme $-(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}) |\vec{u}_{\alpha_k}|^2 + 2\alpha_k |\vec{u}_{\alpha_k}|^4 + \frac{2}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}|^2$ est positive. De plus, elle peut être contrôlée (à une constante près) par la somme de deux distributions positives $\alpha |\vec{u}_{\alpha_k}|^4 + \frac{1}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}|^2$.

Celles-ci sont uniformément contrôlées dans $(L^1 L^1)_{loc}$ contenu dans l'espace des mesures localement finies (dual de \mathcal{C}_0 , espace de Banach séparable). A une sous-suite près, la somme $-(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}) |\vec{u}_{\alpha_k}|^2 + 2\alpha_k |\vec{u}_{\alpha_k}|^4 + \frac{2}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}|^2$ converge donc (par application du théorème de Banach-Alaoglü) vers une mesure μ' positive localement finie.

e) Comme toutes les distributions convergent, il en va de même pour la dernière $\frac{2}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k} \vec{u}_{\alpha_k}) = 2 \vec{\nabla} \cdot (p_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})$ (ce que nous savions déjà, par les contrôles obtenus sur la

3.5. SOLUTIONS ADAPTÉES AU SENS DE CKN

pression approchée).

Nous allons utiliser les critères définis par la proposition (3.4.2) :

$$p_\alpha = R_\alpha + S_\alpha \text{ avec } \|R_\alpha\|_{L^{\frac{4}{3}}L^2} \leq C \text{ et pour } q \in [3; 4[, \|S_\alpha\|_{L^{\frac{q}{3}}L^{\frac{6q}{7q-12}}} \leq C\alpha.$$

De l'estimation précédente, nous pouvons extraire une sous-suite R_{α_k} qui converge faiblement vers p dans $L^{\frac{4}{3}}L^2$ et telle que \vec{u}_{α_k} converge fortement vers $\vec{u} \in ((L_t^4 L_x^2)_{loc})^3$ (de par la convergence forte dans $(L_{loc}^2(t, x))^3$ et la borne uniforme dans $(L^\infty L^2)^3$: le produit $\vec{u}_{\alpha_k} R_{\alpha_k}$ converge donc faiblement vers $p\vec{u}$ dans $(L_{loc}^1(t, x))^3$).

D'autre part, S_α est borné et tend vers 0 dans $L^{\frac{8}{7}}L^{\frac{12}{7}}$ (prendre $q = \frac{24}{7}$). Intégré contre \vec{u}_α uniformément contrôlé dans $(L^8 L^{\frac{12}{5}})^3$ (car $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times 0 = \frac{1}{8}$ et $\frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$), nous obtenons pour tout $\rho \in \mathcal{D}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$

$$\int \int |\vec{\nabla} \rho(t, x) \cdot \vec{u}_\alpha(t, x) S_\alpha(t, x)| \, dt dx \leq C(\rho) \|\vec{u}_\alpha\|_{L^8 L^{\frac{12}{7}}} \|S_\alpha\|_{L^{\frac{8}{7}} L^{\frac{12}{7}}} \text{ qui tend vers 0 lorsque } \alpha \rightarrow 0.$$

Pour être plus précis, nous avons $\|S_\alpha\|_{L^{\frac{8}{7}} L^{\frac{12}{7}}} \leq \|\vec{u}_\alpha\|_{L^\infty L^2}^{\frac{5}{4}} \|\vec{u}_\alpha\|_{L^2 \dot{H}^1}^{\frac{7}{4}}$: d'où

$$\int \int |\vec{\nabla} \rho(t, x) \cdot \vec{u}_\alpha(t, x) S_\alpha(t, x)| \, dt dx \leq C(\rho) \alpha \|\vec{u}_\alpha\|_{L^\infty L^2}^2 \|\vec{u}_\alpha\|_{L^2 \dot{H}^1}^2.$$

En regroupant a) à e), nous avons donc prouvé dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$:

$$\partial_t |\vec{u}|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 = \Delta |\vec{u}|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\vec{\nabla} \cdot p\vec{u} - \mu. \quad (3.42)$$

□

Chapitre 4

Équations modifiées de Vishik et Fursikov - Donnée initiale dans L^2_{uloc}

4.1 Approximation de la donnée initiale

Étant donné $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc})^3$ à divergence nulle, nous souhaitons utiliser les résultats du chapitre précédent pour établir une estimation a priori du champ de vitesse dans L^2_{uloc} . Pour ce faire, nous devons nous ramener à une donnée initiale dans $(L^2)^3$: dans ce paragraphe, nous allons construire une suite $\vec{u}_0^n \in (L^2)^3$ préservant cette condition sur la divergence et vérifiant à la fois $\|\vec{u}_0^n\|_{L^2_{uloc}} \leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}$ ainsi que $\vec{u}_0^n \rightharpoonup \vec{u}_0$ dans $(L^2_{uloc})^3$ faible*. Dans le cas scalaire, il suffisait de considérer $\vec{u}_0^n = \mathbb{1}_{B(0;2^n)}\vec{u}_0$, vu qu'aucune condition sur la divergence n'existait. Dans le cas vectoriel, l'idée de Basson [3] fut de projeter (par le projecteur de Leray-Hopf) une suite de troncatures de la donnée initiale puis d'ajuster à une constante près : la principale difficulté vient du fait que \mathbb{P} n'est pas continu de $(L^2_{uloc})^3$ dans $(L^2_{uloc})^3$, ni même privé des constantes (voir annexe A). Nous reprenons ici sa démonstration.

Soit θ une fonction C^∞ telle que $\theta(x) = \theta(|x|)$ (à symétrie radiale), valant 1 pour $|x| < 1$ et nulle pour $|x| > 2$. Posons $\tilde{u}_0^R = \mathbb{P}[\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0]$ lorsque $R > 1$.

Proposition 4.1.1. *Il existe une constante $C > 0$ (dépendant uniquement de θ) telle que pour tout $\vec{u}_0 \in L^2_{uloc}$ à divergence nulle, et tout $R > 1$, on ait $\|\tilde{u}_0^R\|_{L^2_{uloc}} \leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}$.*

Démonstration. On écrit $\tilde{u}_0^R = \theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0 - (I - \mathbb{P})[\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0]$.

Le premier terme ne pose pas de problème vu que $\|\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}} \leq \|\theta\|_\infty\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}$. Pour

4.1. APPROXIMATION DE LA DONNÉE INITIALE

le second, nous écrivons :

$$(Id - \mathbb{P})[\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0] = \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0).$$

Comme $\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0$ est à support compact, alors $\vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0)$ est bien défini dans $(L^2)^3$. Sachant que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, on peut donc écrire, en notant K le noyau de l'opérateur $\vec{\nabla} \frac{1}{\Delta}$:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0) = \frac{1}{R} \int K(x-y) \vec{\nabla} \theta(\frac{y}{R}) \cdot \vec{u}_0(y) \, dy \quad (4.1)$$

Sachant que $|K(x)| \leq C|x|^{-2}$ (car homogène de degré (-1) en Fourier), nous allons couper l'intégrale en deux selon que $|x-y| < R$ et $|x-y| \geq R$. D'une part,

$$\frac{1}{R} \int_{|x-y| < R} K(x-y) \vec{\nabla} \theta(\frac{y}{R}) \cdot \vec{u}_0(y) \, dy = (\frac{K}{R} \mathbb{1}_{|x| < R}) * (\vec{\nabla} \theta(\frac{x}{R}) \cdot \vec{u}_0) \quad (4.2)$$

Comme $\|\frac{K}{R} \mathbb{1}_{|x| < R}\|_1 \leq \frac{C}{R} \int_{|x| < R} \frac{1}{|x|^2} \, dx \leq C'$ et $L^1 * L^2_{uloc} \in L^2_{uloc}$, nous avons un contrôle du premier terme dans L^2_{uloc} :

$$\begin{aligned} |\frac{1}{R} \int_{|x-y| < R} K(x-y) \vec{\nabla} \theta(\frac{y}{R}) \cdot \vec{u}_0(y) \, dy| &\leq \|\vec{\nabla} \theta(\frac{x}{R}) \cdot \vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}} \\ &\leq \|\vec{\nabla} \theta\|_{\infty} \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}} = C \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}} \end{aligned}$$

D'autre part, lorsque $|x-y| \geq R$, le support de $\vec{\nabla} \theta(\frac{x}{R})$ étant contenu dans $\{x; R < |x| < 2R\}$, on a :

$$\begin{aligned} |\frac{1}{R} \int_{|x-y| \geq R} K(x-y) \vec{\nabla} \theta(\frac{y}{R}) \cdot \vec{u}_0(y) \, dy| &\leq \frac{C}{R^3} \int_{|y| < 2R} |\vec{u}_0(y)| \, dy \\ &\leq C \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}} \end{aligned}$$

En conséquence, la proposition est prouvée. □

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème :

Théorème 4.1.2. *Il existe une constante C (indépendante de n) telle que toute fonction $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc})^3$ à divergence nulle soit limite faible* dans $(L^2_{uloc})^3$ d'une suite \vec{u}_0^n de fonctions L^2 à divergence nulle, vérifiant $\|\vec{u}_0^n\|_{L^2_{uloc}} \leq C \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}$.*

Démonstration. Soit $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc})^3$ à divergence nulle.

1) Commençons par construire une suite \vec{u}_0^n , à divergence nulle et bornée dans L^2_{uloc} , qui converge uniformément vers \vec{u}_0 sur tout compact de \mathbb{R}^3 .

Fixons un compact Q et étudions plus précisément l'expression \vec{u}_0^n , en commençant par calculer $(I - \mathbb{P})[\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0]$. En reprenant les notations de la proposition précédente, nous savons (le volume de la boule unité dans \mathbb{R}^3 étant égal à $\frac{4\pi}{3}$) que $K(x) = \vec{\nabla} \frac{-1}{4\pi|x|} = \frac{x}{4\pi|x|^3}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0) &= \frac{1}{4\pi R} \int \frac{x-y}{|x-y|^3} \vec{\nabla} \theta(\frac{y}{R}) \cdot \vec{u}_0(y) \, dy \\ &= \frac{1}{4\pi R} \int \frac{-y}{|y|^3} \vec{\nabla} \theta(\frac{y}{R}) \cdot \vec{u}_0(y) \, dy + \frac{1}{4\pi R} \int (\frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{y}{|y|^3}) \vec{\nabla} \theta(\frac{y}{R}) \cdot \vec{u}_0(y) \, dy \end{aligned}$$

CHAPITRE 4. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2_{ULOC}

Montrons que la deuxième intégrale tend vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$. En effet, lorsque $|x| \leq A$ ($x \in Q$), comme $R < |y| < 2R$ (θ vaut 1 sur $\overline{B}(0, R)$), il suffit de prendre R grand devant A (par exemple $R > 10A$ pour s'assurer que $|x - y| > \frac{9R}{10}$) et on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4\pi R} \int \left(\frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{y}{|y|^3} \right) \vec{\nabla} \theta \left(\frac{y}{R} \right) \cdot \vec{u}_0(y) \, dy \right| &\leq \frac{C(\theta)}{R^4} \int_{R < |y| < 2R} |x| |\vec{u}_0(y)| \, dy \\ &\leq \frac{CA}{R} \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}} \end{aligned}$$

en utilisant toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en réalisant une partition de $\overline{B}(0, 2R)$.

Notons la première intégrale

$$\rho_R \vec{u}_0 = \frac{1}{4\pi R} \int \frac{-y}{|y|^3} \vec{\nabla} \theta \left(\frac{y}{R} \right) \cdot \vec{u}_0(y) \, dy. \quad (4.3)$$

Étant indépendante de x , c'est une constante bornée par $C \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}$.

Regardons le cas où \vec{u}_0 est un vecteur \vec{a} constant de \mathbb{R}^3 (que nous noterons simplement a par la suite).

Par abus de langage, nous notons donc

$$\rho_R a = \frac{1}{4\pi R} \int \frac{-y}{|y|^3} \vec{\nabla} \theta \left(\frac{y}{R} \right) \cdot a \, dy.$$

En utilisant le fait que θ est à symétrie radiale, nous pouvons calculer $\rho_R a$:

$$\begin{aligned} \rho_R a &= \frac{1}{4\pi R} \int \frac{-y}{|y|^3} \vec{\nabla} \cdot \theta' \left(\frac{|y|}{R} \right) \frac{y}{|y|} \cdot a \, dy \\ &= \frac{1}{4\pi R} \int_0^\infty -\theta' \left(\frac{r}{R} \right) \, dr \int_{|y|=1} y(y \cdot a) \, d\sigma(y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

On peut choisir une base de \mathbb{R}^3 telle que $a = |a|e_1$. Ainsi, nous obtenons :

$$\int_{|y|=1} y(y \cdot a) \, d\sigma = \int_{|y|=1} y_1^2 |a| e_1 \, d\sigma(y)$$

Par symétrie, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{|y|=1} y(y \cdot a) \, d\sigma &= \frac{|a|e_1}{3} \int (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) |a| e_1 \, d\sigma \\ &= \frac{4\pi}{3} a \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et ∞ , on a $\rho_R a = \frac{a}{3}$.

Finalement, nous avons montré que

$$\begin{aligned} \tilde{a}^R &= \mathbb{P} \left[\theta \left(\frac{x}{R} \right) a \right] \\ &= \theta \left(\frac{x}{R} \right) a - \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot \left(\theta \left(\frac{x}{R} \right) \vec{u}_0 \right) \\ &\rightarrow \frac{2}{3} a \text{ lorsque } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

4.2. ESTIMATIONS A PRIORI DU CHAMP DE VITESSE

Pour revenir au cas général, nous écrivons :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0^R - \vec{u}_0^R &= (\theta(\frac{x}{R}) - 1)\vec{u}_0 - \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\theta(\frac{x}{R})\vec{u}_0) \\ &= -\rho_R(\vec{u}_0) + o(1) \text{ lorsque } R \rightarrow \infty\end{aligned}$$

La constante $\rho_R(\vec{u}_0)$ étant bornée quand $R \rightarrow \infty$, elle admet au moins une valeur d'adhérence $\lambda = \lim \rho_{R_n}(\vec{u}_0)$ pour une certaine suite $R_n \rightarrow \infty$. De plus, le calcul précédent nous donne $\tilde{\lambda}^R \rightarrow \frac{2}{3}\lambda$ lorsque $R \rightarrow \infty$.

Posons désormais la suite $\vec{u}_0^n = \tilde{u}_0^{R_n} + \frac{3}{2}\tilde{\lambda}^{R_n}$: c'est celle-ci qui conviendra. En effet, chaque terme de cette suite a une divergence nulle puisqu'il est somme de deux projections de Leray. Par construction, sur le compact Q , elle tend vers \vec{u}_0 .

2) Montrons qu'elle converge faiblement* vers \vec{u}_0 dans $(L^2_{uloc})^3$ et qu'elle est bornée dans cette norme.

D'après la proposition précédente, la suite \vec{u}_0^n est bornée dans $(L^2_{uloc})^3$ et converge fortement vers \vec{u}_0 sur tout compact de \mathbb{R}^3 , alors elle converge faiblement vers \vec{u}_0 dans $(L^2_{uloc})^3$ muni de la topologie faible*.

Enfin

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_0^n\|_{L^2_{uloc}} &\leq \|\tilde{u}_0^{R_n}\|_{L^2_{uloc}} + \frac{3}{2}\|\tilde{\lambda}^{R_n}\|_{L^2_{uloc}} \\ &\leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}} + C\lambda\end{aligned}$$

Comme $\lambda = \lim_{R_n \rightarrow \infty} \rho_{R_n}(\vec{u}_0)$ et $\rho_R \vec{u}_0$ est uniformément bornée par $C\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}$, nous obtenons aussi un contrôle de λ en fonction de $\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}$. Ceci achève la preuve. \square

4.2 Estimations a priori du champ de vitesse

Soit $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc})^3$. Considérons la suite $\vec{u}_0^n \in (L^2 \cap L^2_{uloc})^3$ approchant (au sens faible*) \vec{u}_0 dans L^2_{uloc} et vérifiant $\|\vec{u}_0^n\|_{L^2_{uloc}} \leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une solution

$\vec{u}_{\alpha,\eta}^n \in L^\infty((0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3)^3) \cap L^2((0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)^3) \cap L^4((0, +\infty), (L^4)^3)$ résolvant l'équation :

$$\partial_t \vec{g} = \Delta \vec{g} - (\vec{g} \cdot \vec{\nabla}) \vec{g} - \alpha |\vec{g}|^2 \vec{g} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g})$$

avec donnée initiale $\vec{u}_0^n \in (L^2)^3$.

Nous partons de la solution des équations de Vishik et Fursikov et non pas de l'approximation convolée car celle-ci ne se prête pas aux estimations L^2_{uloc} , selon la méthode développée par Lemarié et exposée dans le premier chapitre. Nous rappelons que celle-ci est basée sur une estimation a priori de la vitesse et de son gradient via une égalité d'énergie locale.

CHAPITRE 4. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2_{ULOC}

Nous utiliserons les mêmes notations que celles utilisées dans le deuxième chapitre :

Soit χ une fonction test positive, égale à 1 sur $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]^3$ et non nulle sur $[-1; 1]^3$ telle que $\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \chi(x - k) = 1$. Nous appellerons $\chi_k(x) = \chi(x - k)$ et désignerons par Q_k le cube $k + [-1; 1]^3$. Nous utiliserons aussi Q'_k le cube $k + [-2; 2]^3$.

Nous rappelons que les normes $\sup_k \|f\|_{L^2(Q_k)}$, $\sup_k \|f\|_{L^2(Q'_k)}$ et $\sup_k \|\chi_k f\|_{L^2}$ sont équivalentes (car $\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \chi(x - k) \geq C$).

Dans les estimations, on considérera les normes suivantes :

$$\|\vec{f}\|_{(L^2(0,T)L^2)_{uloc}}^2 = \sup_k \int_0^t \int \chi_k(x) |\vec{f}(s, x)|^2 dx ds$$

et

$$\|\vec{f}\|_{(L^4(0,T)L^4)_{uloc}}^4 = \sup_k \int_0^t \int \chi_k(x) |\vec{f}(s, x)|^4 dx ds$$

Dans les démonstrations (afin d'alléger les notations), nous noterons la vitesse \vec{u} et non plus $\vec{u}_{\alpha, \eta}^n$.

Lemme 4.2.1. *La solution $\vec{u}_{\alpha, \eta}^n$ vérifie l'égalité d'énergie suivante, valable dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$:*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \chi_k |\vec{u}_{\alpha, \eta}^n|^2 dx + 2 \int \chi_k |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha, \eta}^n|^2 dx + 2\alpha \int \chi_k |\vec{u}_{\alpha, \eta}^n|^4 dx + \frac{2}{\eta} \int \chi_k |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha, \eta}^n|^2 dx = \\ & \int |\vec{u}_{\alpha, \eta}^n|^2 \Delta \chi_k dx + \int \chi_k |\vec{u}_{\alpha, \eta}^n|^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha, \eta}^n) dx + \int |\vec{u}_{\alpha, \eta}^n|^2 \vec{\nabla} \chi_k \cdot \vec{u}_{\alpha, \eta}^n dx \\ & - \frac{2}{\eta} \int (\vec{u}_{\alpha, \eta}^n \cdot \vec{\nabla}) \chi_k (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha, \eta}^n) dx = (1) + (2) + (3) + (4). \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle effectuée dans le paragraphe portant sur les égalités d'énergie (lorsque la donnée initiale appartenait à $(L^2)^3$). On part de l'équation suivante

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \alpha |\vec{u}|^2 \vec{u} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

On prend le produit scalaire avec $\chi_k \vec{u}$.

D'une part $\partial_t \vec{u} \in (L^2 H^{-1})^3 + (L^{\frac{4}{3}} L^{\frac{4}{3}})^3$ et d'autre part $\chi_k \vec{u} \in (L^2 H^1)^3 \cap (L^4 L^4)^3$.

L'égalité $\partial_t \chi_k |\vec{u}|^2 = 2 < \partial_t \chi_k \vec{u}, \vec{u} >$ a donc un sens dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$, et on a :

$$\partial_t \chi_k |\vec{u}|^2 + 2 \chi_k |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 = \chi_k \Delta |\vec{u}|^2 - 2 \chi_k \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - 2\alpha \chi_k |\vec{u}|^4 + \frac{2}{\eta} \chi_k \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}).$$

Fixons désormais $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ valant 1 au voisinage de 0 ; nous intégrons l'égalité précédente contre $h(\frac{x}{A}) r(t)$ avec $r \in \mathcal{D}(0, \infty)$ et faisons tendre A vers $+\infty$.

Le terme bilinéaire est antisymétrique, donc :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -2 \int_{\mathbb{R}^3} h\left(\frac{x}{A}\right) \chi_k(x) \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_k |\vec{u}|^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \vec{\nabla} \chi_k \cdot \vec{u} dx.$$

4.2. ESTIMATIONS A PRIORI DU CHAMP DE VITESSE

D'autre part :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} h\left(\frac{x}{A}\right) \chi_k(x) \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \chi_k |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \chi_k (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \, dx$$

Nous obtenons donc l'égalité d'énergie avancée. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de ce paragraphe :

Proposition 4.2.2. *Soit $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc}(\mathbb{R}^3))^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $0 < \eta < 4\alpha$. Il existe une constante $K_\eta > 1$ (dépendant uniquement de η , donc uniforme en n , R et ϵ) et un temps $T_0(\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}, \eta) = \frac{1}{2K_\eta^3(1+\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2}$ tel que pour tout $t \leq T_0$:*

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{\alpha,\eta}^n(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha,\eta}^n\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}^2 + \alpha \|\vec{u}_{\alpha,\eta}^n\|_{(L^4_t L^4_x)_{uloc}}^4 \\ + \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}^n\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}^2 \leq \sqrt{\frac{1}{(1+\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2 - 2K_\eta^3 t}} - 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Démonstration. Reprenons les notations du lemme (4.2.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \chi_k |\vec{u}|^2 \, dx + 2 \int \chi_k |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \, dx + 2\alpha \int \chi_k |\vec{u}|^4 \, dx + \frac{2}{\eta} \int \chi_k |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \, dx = \\ \int |\vec{u}|^2 \Delta \chi_k \, dx + \int \chi_k |\vec{u}|^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \, dx + \int |\vec{u}|^2 \vec{\nabla} \chi_k \cdot \vec{u} \, dx - \frac{2}{\eta} \int (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \chi_k (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \, dx = \end{aligned} \quad (4.6)$$

(1) + (2) + (3) + (4).

Majorons les quatre termes de droite à l'aide de $\|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}}^2$ et de ceux présents à gauche.

Le premier est évident

$$|(1)| \leq C \|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}}^2$$

Le deuxième terme se majore par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et nécessite la relation de dépendance entre α et η .

$$\begin{aligned} |(2)| &\leq \int \alpha \chi_k |\vec{u}|^4 \, dx + \int \frac{1}{4\alpha} \chi_k |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \, dx \\ &\leq \int \alpha \chi_k |\vec{u}|^4 \, dx + \int \frac{1}{4\alpha} \chi_k |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \, dx \end{aligned}$$

Le contrôle du troisième terme s'effectue à l'aide des injections de Sobolev. On a (pour ρ valant 1 sur $\text{Supp} \chi$ et à valeurs dans $[-2; 2]^3$)

$$\begin{aligned} |(3)| &\leq \|\vec{u}\|_{L^3(Q_k)}^3 \leq \|\rho_k \vec{u}\|_{L^3}^3 \\ &\leq C(\|\rho_k \vec{u}\|_2 \|\vec{\nabla} \otimes (\rho_k \vec{u})\|_2)^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C(\|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}}^3 + \|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}}^{\frac{3}{2}} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2(Q'_k)}^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

après utilisations successives de $\|\vec{\nabla} \otimes (\rho_k \vec{u})\|_2 \leq C(\|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}} + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2(Q'_k)})$ puis $(a+b)^{\frac{3}{2}} \leq C(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}})$. Enfin,

$$\begin{aligned} |(4)| &\leq \frac{C}{\eta} \|\chi_k \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{L^2(Q_k)} \|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}} \\ &\leq \frac{C}{\eta} \|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2(Q_k)} \end{aligned}$$

Nous privilégions le contrôle des termes par $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2(Q_k)}$ plutôt que par $\|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{L^2(Q_k)}$ uniquement pour garder la même relation de dépendance entre α et η .

On intègre maintenant en temps (à chaque k fixé $t \mapsto \chi_k \vec{u}$ est $(C[0, \infty)L^2)^3$) puis on prend la borne supérieure sur $k \in \mathbb{Z}^3$. On obtient alors (en tenant compte du fait que $0 < \eta < 4\alpha$)

$$\begin{aligned} & \|\vec{u}(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + 2\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}^2 + \alpha \|\vec{u}\|_{(L^4_t L^4_x)_{uloc}}^4 + \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}^2 \\ & \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2 + C \sup_k \int_0^t \|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}}^{\frac{3}{2}} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2(Q'_k)}^{\frac{3}{2}} ds + \\ & \quad C \left(\frac{1}{\eta} \sup_k \int_0^t \|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2(Q'_k)} + \int_0^t (\|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}}^3) ds \right) \\ & \leq C \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t)\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}^2 + C \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right) \int_0^t [\|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{u}\|_{L^2_{uloc}}^6] ds \end{aligned}$$

Dans la dernière majoration, nous avons successivement utilisé les inégalités de Cauchy-Schwarz et de convexité

$$(C(ab))^{\frac{3}{2}} \leq C'a^2 + C''b^6 \text{ avec } C' \text{ aussi petit que souhaité ainsi que } a^3 \leq \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^6.$$

Ainsi, en notant $K_\eta = C(1 + \frac{1}{\eta^2}) > 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\vec{u}(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}^2 + \alpha \|\vec{u}\|_{(L^4_t L^4_x)_{uloc}}^4 + \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}^2 \\ & \leq K_\eta (\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2 + \int_0^t [\|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^6] ds \end{aligned}$$

La fin de la preuve est similaire à celle effectuée dans le cas scalaire :

soit $y(t) = \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2 + \int_0^t (\|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^6) ds$. Cette fonction vérifie l'inéquation différentielle $(1+y)' \leq K_\eta^3(1+y)^3$ (avec $K_\eta > 1$, quitte à prendre $C \geq 1$), qui se résout en $\frac{1}{(1+y(0))^2} - \frac{1}{(1+y(t))^2} \leq 2K_\eta^3 t$. En remarquant que $y(0) = \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2$, nous obtenons donc un contrôle de y pour $t \leq \frac{1}{2K_\eta^3(1+\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2}$ avec $y(t) \leq \sqrt{\frac{1}{(1+\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2} - 2K_\eta^3 t} - 1$. \square

4.3 Passage à la limite

Faisons tendre $n \rightarrow \infty$: nous notons \vec{u}^n la solution contrôlée dans le paragraphe précédent. La proposition précédente fournit les majorations nécessaires à la construction d'une solution $L^\infty L^2_{uloc}$ des équations modifiées de Vishik et Fursikov.

4.3.1 Equation vérifiée par la limite

Pour tout $T < T_0(\eta)$, on a des estimations uniformes de \vec{u}^n dans $(L^2(0, T)L^2)_{uloc}^3$ et de $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}^n$ dans $(L^2(0, T)L^2)_{uloc}^{3 \times 3}$. L'espace $(L^2(0, T)L^2)_{uloc}$ étant le dual de l'espace de Banach séparable

$$\{f \in L^2_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^3) / \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \|f\|_{L^2((0, T) \times (k+[0;1]^3))} < \infty\}$$

4.3. PASSAGE À LA LIMITE

on peut extraire, par le procédé diagonal de Cantor, une sous-suite (notée de la même façon) telle \vec{u}^n converge faiblement* vers $\vec{u} \in \cap_{0 < T < T_0} (L^2(0, T)L^2)_{uloc}$ tout comme $\vec{\nabla} \otimes u^n$ (nécessairement) vers $\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in \cap_{0 < T < T_0} (L^2(0, T)L^2)^{3 \times 3}_{uloc}$.

Fixons $\rho \in \mathcal{D}((0, T_0) \times \mathbb{R}^3)$. Montrons que :

$$\langle \partial_t \vec{u}, \rho \rangle = \langle \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \alpha |\vec{u}|^2 \vec{u} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \rho \rangle. \quad (4.7)$$

Nous savons déjà que $\langle \partial_t \vec{u}^n, \rho \rangle \rightarrow \langle \partial_t \vec{u}, \rho \rangle$ ainsi que $\langle \Delta \vec{u}^n, \rho \rangle \rightarrow \langle \Delta \vec{u}, \rho \rangle$ et $\langle \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^n), \rho \rangle \rightarrow \langle \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \rho \rangle$. Le passage à la limite pose réellement problème pour les termes non linéaires où nous avons besoin d'une convergence forte.

Pour toute fonction test $z \in \mathcal{D}((0, T_0) \times \mathbb{R}^3)$, nous savons que $z \vec{u}^n \in (L^2 L^2)^3$ et $\partial_t(z \vec{u}^n) \in (L^2 H^{-2})^3$ uniformément en n :

d'une part, les contrôles $(L^\infty L^2_{uloc})^3$ et $(L^2 H^1)_{uloc}^3$ de \vec{u}^n impliquent un contrôle (uniforme en n) $(L^2 L^1)^3$ de $z(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ et d'autre part les contrôles $(L^4 L^4)_{uloc}^3$ et $(L^\infty L^2_{uloc})^3$ de \vec{u}^n induisent un contrôle $(L^2 L^1)^3$ (en $\alpha^{\frac{1}{2}}$) de $\alpha z |\vec{u}|^2 \vec{u}$. Les autres termes sont au pire contrôlés dans $(L^2 H^{-2})^3$ si l'on ne tient compte que du contrôle $(L^2 L^2)_{uloc}$ de \vec{u}^n .

Ces estimations permettent donc d'extraire une sous-suite de \vec{u}^n convergeant fortement vers \vec{u} dans $(L^2)_{loc}^3((0, T_0) \times \mathbb{R}^3)$.

On termine la démonstration comme d'habitude : le produit d'une convergence forte par une convergence faible montre que

$$\langle (\vec{u}^n \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}^n, \rho \rangle \rightarrow \langle (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}, \rho \rangle.$$

Enfin, nous pouvons aussi contrôler le dernier terme $\alpha \langle |\vec{u}^n|^2 \vec{u}^n, \rho \rangle$: la convergence forte de \vec{u}^n dans $(L^2 L^2)_{loc}^3$ ajoutée à un contrôle dans $(L^\infty L^2)_{loc}^3$ donne une convergence forte dans $(L^6 L^2)_{loc}^3$. Couplée au contrôle uniforme dans $(L^2 L^6)_{loc}^3$ (injections de Sobolev), la suite $(\vec{u}^n)_n$ converge fortement vers \vec{u} dans $(L^3 L^3)_{loc}^3$. Donc

$$\alpha \langle |\vec{u}^n|^2 \vec{u}^n, \rho \rangle \rightarrow \alpha \langle |\vec{u}|^2 \vec{u}, \rho \rangle$$

Ceci montre que la solution \vec{u} vérifie les équations modifiées de Vishik et Fursikov.

4.3.2 Régularité de la limite et inégalité d'énergie

Rappelons que de la suite précédente, il est toujours possible d'en extraire une (par le procédé diagonal de Cantor) notée de la même façon et qui converge ponctuellement vers \vec{u} .

Montrons d'abord que $\vec{u} \in \cap_{0 < T < T_0} (L^\infty(0, T), L^2_{uloc})^3$.

CHAPITRE 4. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2_{ULOC}

Soit $v \in L^1[0, +\infty)$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}^3$, par le lemme de Fatou, nous avons

$$\int \int |v| \chi_k |\vec{u}|^2 \, dx \, dt \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int \int |v| \chi_k |\vec{u}^n|^2 \, dx \, dt \leq \|\vec{u}^n\|_{(L^\infty L^2_{uloc})^3}^2 \|v\|_1.$$

Ainsi, $t \mapsto \int \chi_k |\vec{u}(x, t)|^2 \, dx \in L^\infty$ avec $\|\vec{u}\|_{L^\infty(0, t) L^2_{uloc}} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\vec{u}^n\|_{L^\infty(0, t) L^2_{uloc}}$.

Toujours par le lemme de Fatou, on obtient aussi la majoration dans $(L^4 L^4)_{uloc}^3$.

Pour tout $0 < T < T_0$, on a

$$\int_0^T \int \chi_k |\vec{u}(t, x)|^4 \, dx \, dt \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int \chi_k |\vec{u}^n(t, x)|^4 \, dx \, dt$$

soit, par passage à la borne supérieure sur k : $\|\vec{u}\|_{(L^4_T L^4_x)_{uloc}}^4 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\vec{u}^n\|_{(L^4_T L^4_x)_{uloc}}^4$.

Pour les termes de gradient, nous utilisons la convergence faible de $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}^n$ vers $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ dans $(L^2 L^2)_{uloc}^{3 \times 3}$, ainsi :

$$\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{(L^2(0, T) L^2)_{uloc}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}^n\|_{(L^2(0, T) L^2)_{uloc}}.$$

Il en va de même pour

$$\|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{(L^2 L^2)_{uloc}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^n\|_{(L^2(0, T) L^2)_{uloc}}.$$

Ainsi, nous avons, pour tout $0 < T < T_0$:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(T)\|_{L^2_{uloc}}^2 &+ \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{(L^2_T L^2_x)_{uloc}}^2 + \alpha \|\vec{u}\|_{(L^4_T L^4_x)_{uloc}}^4 \\ &+ \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{(L^2_T L^2_x)_{uloc}}^2 \leq \sqrt{\frac{1}{(1 + \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2 - 2K_\eta^3 T}}. \end{aligned}$$

4.3.3 Donnée initiale.

Nous devons montrer que la solution construite a la bonne donnée initiale.

Proposition 4.3.1. *La solution \vec{u} précédemment construite converge vers \vec{u}_0 dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$.*

Démonstration. Nous partons de la solution \vec{u}^n . Soit $a \in \mathcal{D}[0, +\infty)$ telle que $a(0) = 1$.

Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

$$\int_0^{+\infty} \langle \vec{u}^n(t), \rho \rangle \partial_t a(t) \, dt = - \langle \vec{u}^n(0), \rho \rangle - \int_0^{+\infty} \langle \partial_t \vec{u}^n(t), \rho \rangle a(t) \, dt.$$

Faisons tendre $n \rightarrow \infty$.

Pour tout $R > 0$, nous savons que \vec{u}^n et $\partial_t \vec{u}^n(t)$ sont respectivement uniformément bornés dans $(L^2 H^1(B_R))^3$ et $(L^2 H^{-2}(B_R))^3$ alors (à une sous-suite près) convergent faiblement nécessairement vers \vec{u} et $\partial_t \vec{u}$. Ainsi, nous avons déjà que $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T_0], H_{loc}^{-2}(\mathbb{R}^3))^3$ et $\vec{u}(0, \cdot)$ a un sens. De plus \vec{u}_0^n converge faiblement vers \vec{u}_0 .

Alors par passage à la limite

$$\int_0^{+\infty} \langle \vec{u}(t), \rho \rangle \partial_t a(t) \, dt = - \langle \vec{u}_0, \rho \rangle - \int_0^{+\infty} \langle \partial_t \vec{u}(t), \rho \rangle a(t) \, dt$$

4.3. PASSAGE À LA LIMITE

et donc $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$.

De plus, nous pouvons immédiatement remarquer que la fonction $t \mapsto \vec{u}(t)$ est continue dans $L^2(B_R)$ pour toute boule B_R (espace muni de la topologie faible) : en effet, elle est bornée dans $L^2(B_R)$ et continue dans $H^{-2}(B_R)$. Montrons que cette convergence est en fait une convergence forte.

Revenons sur les estimations a priori uniformes de $\|\vec{u}^n(t)\|_{L^2_{uloc}}$ et de $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{(L^2_t L^2_x)_{uloc}}$.

Nous obtenons que, pour t petit,

$$\int \chi_k |\vec{u}^n(t, x)|^2 dx - \int \chi_k |\vec{u}_0^n|^2 dx \leq Ct.$$

Soit t_0 assez petit et $\delta_m(t)$ une suite régularisante (en particulier d'intégrale égale à 1).

Nous avons donc que

$$\int_0^T \int \delta_m(t - t_0) \chi_k |\vec{u}^n|^2 dx dt - \int \chi_k |\vec{u}_0^n|^2 dx \leq C \int_0^T \delta_m(t - t_0) t dt.$$

Comme \vec{u}^n converge faiblement vers \vec{u} dans $(L^2 L^2(Q_k))^3$ et \vec{u}_0^n converge vers \vec{u}_0 dans L^∞_{loc} alors

$$\int_0^T \int \delta_m(t - t_0) \chi_k |\vec{u}(t, x)|^2 dx dt - \int \chi_k |\vec{u}_0|^2 dx \leq C \int_0^T \delta_m(t - t_0) t dt.$$

Il nous reste à faire tendre $m \rightarrow \infty$.

Si t_0 est un point de Lebesgue de la fonction $t \mapsto \int |\chi_k \vec{u}|^2 dx$ alors il vient

$$\int \chi_k |\vec{u}(t_0)|^2 dx - \int \chi_k |\vec{u}_0|^2 dx \leq Ct_0$$

Sinon, nous l'approchons par une suite de points de Lebesgue qui converge vers t_0 , le résultat restant vrai par passage à la limite étant donné que $\chi_k \vec{u}(t)$ est faiblement continue dans L^2 . Ainsi, d'après l'inégalité précédente, quand $t \rightarrow 0$, nous avons

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|\sqrt{\chi_k} \vec{u}(t)\|_{L^2} \leq \|\sqrt{\chi_k} \vec{u}_0\|_{L^2}$$

Comme par continuité faible, nous savons déjà que $\|\sqrt{\chi_k} \vec{u}_0\|_{L^2} \leq \liminf_{t \rightarrow 0} \|\sqrt{\chi_k} \vec{u}(t)\|_{L^2}$ alors $\lim_{t \rightarrow 0} \|\sqrt{\chi_k} \vec{u}(t)\|_{L^2} = \|\sqrt{\chi_k} \vec{u}_0\|_{L^2}$ condition suffisante pour prouver la convergence forte (lorsqu'il y a continuité faible). \square

Dans cette partie, nous obtenons donc le résultat suivant :

Théorème 4.3.2. *Soit $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc}(\mathbb{R}^3))^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\eta < 4\alpha$. Les équations modifiées de Vishik et Fursikov admettent une solution locale : il existe une distribution $\vec{u}(t, x) \in (D'((0, T) \times \mathbb{R}^3))^3$ telle que*

CHAPITRE 4. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2_{ULOC}

i) $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \alpha |\vec{u}|^2 \vec{u} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$

ii) $\vec{u} = \vec{u}_0$ (avec convergence forte dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$).

iii) Plus précisément, \vec{u} a la régularité suivante :

$\forall 0 < t < T_0$, on a $\vec{u} \in (L^\infty(0, t)L^2_{uloc})^3 \cap (L^2(0, t)\dot{H}^1)_{uloc}^3 \cap (L^4(0, t)L^4)_{uloc}^3$ avec

$$\begin{aligned} & \|\vec{u}(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}}^2 + \alpha \|\vec{u}\|_{(L^4(0,t)L^4)_{uloc}}^4 \\ & + \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}}^2 \leq \sqrt{\frac{1}{(1+\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2 - 2K_\eta^3 t}} - 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Remarque : Comme mentionné lors de l'introduction, la condition de divergence nulle n'intervient pas ici étant donné qu'elle n'est utile que pour la convergence vers les équations de Navier-Stokes.

Néanmoins, le temps dépend de η et tend vers 0 lorsque $\eta \rightarrow 0$. Comme il n'y a pas de contrôle uniforme en η sur le terme de pression, cette méthode devient inopérante pour prouver la convergence vers les équations de Navier-Stokes.

Pour faire face à ce problème, l'idée serait d'utiliser une nouvelle fois le théorème de régularité maximale du noyau de la chaleur : cependant, dans L^2_{uloc} , nous ne pouvons l'exploiter. En effet, lorsque une fonction $f \in L^2_{uloc}$, nous n'avons aucun contrôle de $\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta f(s, \cdot) ds$ dans L^2_{uloc} indépendamment de t .

Notons $W(t-s, x-y)$ le noyau de l'opérateur $e^{(t-s)\Delta} \Delta$ et partageons $f = f \mathbb{1}_{3B} + f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3 - 3B} = f_1 + f_2$ où B est une boule de rayon 1 centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

Pour la partie bornée, nous pouvons utiliser le théorème de régularité maximale et conclure positivement

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta f_1(s, \cdot) ds \right\|_{L^2(B)L^2_t} \leq C \|f\|_{(L^2 L^2)_{uloc}}.$$

Le second terme est celui qui pose problème étant donné que $|W(t-s, x-y)| \leq C \frac{1}{|x-y|^5}$. Nous obtenons donc, pour $x \in B$, et en notant Q_k le cube $k + [0; 1]^3$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta f_2(s, \cdot) ds \right| & \leq C \int_0^t \int \frac{1}{|x-y|^5} f_2(s, y) dy ds \\ & \leq C \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}^3, |k| > 0} \frac{1}{|k|^5} \left(\int_{Q_k} |f_2(s, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \sqrt{t} \|f\|_{(L^2 L^2)_{uloc}} \quad (\text{d'après le théorème de Cauchy-Schwarz}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

En allant plus loin, nous devrions en fait contrôler l'expression

$$\int_0^t e^{(t-s)\frac{\Delta}{\epsilon}} \frac{\Delta}{\epsilon} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3 - B} f(s, \cdot) ds$$

4.4. UN RÉSULTAT PARTIEL D'UNICITÉ

comme cela avait été fait lors de l'étude de la pression approchée dans le cas L^2 . D'une part, nous ne pouvons contrôler directement le noyau de l'opérateur de $e^{(t-s)\frac{\Delta}{\epsilon}} \frac{\Delta}{\epsilon}$: soit il est contrôlé en $\frac{1}{\epsilon}$, soit en $\frac{1}{t-s}$. Dans le premier cas, il diverge au passage à la limite et dans le deuxième, il diverge dans l'intégrale en temps.

Il reste à tester le changement de variables (qui avait été salvateur lors de ladite étude de la pression approchée) : posons $s = \sigma\epsilon$ et utilisons de nouveau un contrôle du noyau de $e^{(\frac{t}{\epsilon}-\sigma)\Delta} \Delta$ en $\frac{1}{|x-y|^5}$, nous obtenons pour toute boule B de rayon 1 :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_B \left| \int_0^t e^{(\frac{t-s}{\epsilon})\Delta} \frac{\Delta}{\epsilon} f_2(s, \cdot) ds \right|^2 dx dt &= \int_0^T \int_B \left| \int_0^{\frac{t}{\epsilon}} e^{(\frac{t}{\epsilon}-\sigma)\Delta} \Delta f_2(\sigma\epsilon, \cdot) d\sigma \right|^2 dx dt \\ &\leq C \int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon} \|f\|_{(L^2 L^2)_{uloc}} \right)^2 dt \end{aligned}$$

qui ne converge toujours pas. Nous verrons dans le prochain chapitre qu'il faut jouer sur la taille des boules intégrées pour pouvoir utiliser le théorème de régularité maximale.

4.4 Un résultat partiel d'unicité

Dans cette partie, nous nous intéressons à la question de l'unicité des solutions du modèle modifié de Vishik et Fursikov. Nous obtenons seulement un résultat partiel : en effet, comme nous n'avons ajouté qu'une régularité $L^4 L^4$ aux termes pénalisés (pour préserver le changement d'échelle), il paraissait difficile d'obtenir une réponse positive quand le critère de Serrin nécessite une régularité $L^8 L^4$ [58]. Toutefois, nous avançons le résultat suivant pour les grandes valeurs de α :

Proposition 4.4.1. *Soient \vec{u} et \vec{v} deux solutions des équations modifiées de Vishik et Fursikov avec la même donnée initiale $\vec{u}_0 \in L^2_{uloc}$ (à divergence nulle), telles que $\vec{u} \in L^\infty((0, T), (L^2_{uloc})^3) \cap L^2((0, T), \dot{H}^1_{uloc})^3 \cap L^4((0, T), L^4_{uloc})^3$ et $\vec{v} \in L^\infty((0, T), (L^2_{uloc})^3) \cap L^2((0, T), \dot{H}^1_{uloc})^3 \cap L^4((0, T), L^4_{uloc})^3$ pour $T < T_0$. Sous la double contrainte $\alpha > 6$ et $\eta < \frac{\alpha}{6}$, $\vec{u} = \vec{v}$ sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$.*

Nous savons que pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a - b)(a^3 - b^3) &= (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a - b)^2\left(\frac{3}{4}(a + b)^2 + \frac{1}{4}(a - b)^2\right) \end{aligned}$$

L'idée de la preuve est simple : elle consiste à adapter cette égalité au cas vectoriel pour contrôler le terme bilinéaire grâce à la régularité $L^4 L^4$.

CHAPITRE 4. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS L^2_{ULOC}

Démonstration. Notons $\vec{f} = \vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{g} = \vec{u} + \vec{v}$. Let $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Nous partons de l'égalité suivante vraie dans $\mathcal{D}'(0, T)$ (obtenue en prenant le produit scalaire $\langle \vec{f}, \partial_t(\vec{u} - \vec{v}) \rangle$) :

$$\begin{aligned} \partial_t \int \rho |\vec{f}|^2 dx + 2 \int \rho |\nabla \otimes \vec{f}|^2 dx + \frac{2}{\eta} \int \rho |\vec{\nabla} \cdot \vec{f}|^2 dx + 2\alpha \int \rho \vec{f} (|\vec{u}|^2 \vec{u} - |\vec{v}|^2 \vec{v}) dx = \\ \int \Delta \rho |\vec{f}|^2 dx - 2 \int \rho \vec{f} \cdot [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (v \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] dx - \frac{2}{\eta} \int \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{f} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

En effet, les intégrales sont toutes dans $L^1(0, T)$ grâce à la régularité $(L^2 \dot{H}^1)_{uloc}^3 \cap (L^4 L^4)_{uloc}^3$ des fonctions considérées. Nous appliquons cette égalité à $\rho = \chi_k$ en remarquant que $\partial_t \int \chi_k |\vec{f}|^2 dx \in L^1(0, T)$ comme somme de fonctions L^1 .

Nous avons, tout d'abord :

$$\begin{aligned} \vec{f} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u} - |\vec{v}|^2 \vec{v}) &= \frac{1}{8} \vec{f} \cdot (|\vec{f} + \vec{g}|^2 (\vec{f} + \vec{g}) - \frac{1}{8} |\vec{g} - \vec{f}|^2 (\vec{g} - \vec{f})) \\ &= \frac{1}{4} [|\vec{u} + \vec{v}|^2 |\vec{f}|^2 + |\vec{f}|^4] + \frac{1}{2} |(\vec{f}, \vec{u} + \vec{v})|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} |\vec{f}|^2 [|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2] \\ &\geq \frac{1}{2} |\vec{f}|^2 |\vec{u}|^2 + \frac{1}{2} |\vec{f}|^2 |\vec{v}|^2 \\ &= \frac{1}{2} |\vec{f} \otimes \vec{u}|^2 + \frac{1}{2} |\vec{f} \otimes \vec{v}|^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

L'inégalité suivante en découle :

$$\begin{aligned} \partial_t \int \chi_k |\vec{f}|^2 dx + 2 \int \chi_k |\nabla \otimes \vec{f}|^2 dx + \frac{2}{\eta} \int \chi_k |\vec{\nabla} \cdot \vec{f}|^2 dx + \alpha \int \chi_k (|\vec{f} \otimes \vec{u}|^2 + |\vec{f} \otimes \vec{v}|^2) dx \leq \\ \int \Delta \chi_k |\vec{f}|^2 dx - 2 \int \chi_k \vec{f} \cdot [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (v \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] dx - \frac{2}{\eta} \int \vec{\nabla} \chi_k \cdot \vec{f} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

En considérant

$$\begin{aligned} 2 \int \chi_k \vec{f} \cdot [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] dx &= 2 \int \chi_k \vec{f} \cdot (\vec{f} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} dx + 2 \int \chi_k \vec{f} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{f} dx \\ &= -2 \int (\vec{f} \cdot \vec{u}) (\vec{f} \cdot \vec{\nabla}) \chi_k dx - 2 \int \chi_k \vec{u} \cdot (\vec{f} \cdot \vec{\nabla}) \vec{f} dx \\ &\quad - 2 \int \chi_k (\vec{u} \cdot \vec{f}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) dx + 2 \int \chi_k \vec{f} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{f} dx \\ &\leq C \|\vec{f}\|_{L^2_{uloc}} \|\vec{f} \otimes \vec{u}\|_{L^2(Q_k)} + \frac{\alpha}{6} \int \chi_k |\vec{f} \otimes \vec{u}|^2 dx \\ &\quad + \frac{6}{\alpha} \int \chi_k |\vec{\nabla} \otimes \vec{f}|^2 dx + \frac{6}{\alpha} \int \chi_k |\vec{\nabla} \cdot \vec{f}|^2 dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{6} \int \chi_k |\vec{f} \otimes \vec{u}|^2 dx + \frac{6}{\alpha} \int \chi_k |\vec{\nabla} \otimes \vec{f}|^2 dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{6} \int \chi_k |\vec{f} \otimes \vec{v}|^2 dx \end{aligned}$$

et

$$\frac{2}{\eta} \int \vec{\nabla} \chi_k \cdot \vec{f} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dx \leq \frac{C}{\eta} \|\vec{f}\|_{L^2_{uloc}} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{f}\|_{L^2(Q_k)}$$

4.4. UN RÉSULTAT PARTIEL D'UNICITÉ

nous pouvons maintenant intégrer l'inéquation en temps et prendre la borne supérieure sur les valeurs de k .

Comme

$$\sup_k \int_0^t \|\vec{f}(s)\|_{L^2_{uloc}} \|\vec{f} \otimes \vec{u}(s)\|_{L^2(Q_k)} \, ds \leq \frac{C}{\alpha} \int_0^t \|\vec{f}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 \, ds + \frac{\alpha}{6} \|\vec{f} \otimes \vec{u}\|_{L^2_{uloc}L^2(0,t)}$$

et

$$\sup_k \int_0^t \frac{C}{\eta} \|\vec{f}(s)\|_{L^2_{uloc}} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(s)\|_{L^2(Q_k)} \, ds \leq \frac{C'}{\eta} \int_0^t \|\vec{f}(s)\|_{L^2_{uloc}} \, ds + \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{f}\|_{L^2_{uloc}L^2(0,t)}$$

nous obtenons (vu que $\partial_t \int \chi_k |\vec{f}|^2 \, dx \in L^1(0, T)$ et $\|\sqrt{\chi_k} \vec{f}(0)\|_2 = 0$) :

$$\begin{aligned} & \|\vec{f}(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + (1 - \frac{12}{\alpha}) \|\vec{\nabla} \otimes \vec{f}\|_{L^2_{uloc}L^2[0,t]}^2 + (\frac{1}{\eta} - \frac{6}{\alpha}) \|\vec{\nabla} \cdot \vec{f}\|_{L^2_{uloc}L^2[0,t]}^2 + \\ & \frac{\alpha}{2} \|\vec{f} \otimes \vec{u}\|_{L^2_{uloc}L^2(0,t)}^2 + \frac{5\alpha}{6} \|\vec{f} \otimes \vec{v}\|_{L^2_{uloc}L^2(0,t)}^2 \leq C(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\eta}) \int_0^t \|\vec{f}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 \, ds \quad . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Sous la double contrainte $\alpha > 6$ et $\eta < \frac{\alpha}{6}$ (elles ne sont évidemment pas optimales mais α doit être minoré) et en notant $y(t) = \int_0^t \|\vec{f}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 \, ds$, nous devons résoudre l'inéquation différentielle $y'(t) \leq C(\alpha, \eta)y(t)$:

$\|\vec{f}(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 \leq y(t) \leq y(0)e^{C(\alpha, \eta)t}$. Comme $y(0) = 0$, l'unicité pour les grandes valeurs de α est montrée. \square

Nous obtenons donc un résultat partiel d'auto-similarité (pour les grandes valeurs de α).

Corollaire 4.4.2. *Soit $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc})^3$ (à divergence nulle). Si $\alpha > 6$ et $\eta < \frac{\alpha}{6}$ et si \vec{u}_0 est homogène alors la solution \vec{u}_α des équations de Vishik et Fursikov est auto-similaire.*

Démonstration. Tout d'abord, comme $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc})^3$ est homogène alors $\vec{u}_0 \in \dot{M}^{2,3}$ (car $\sup_{\lambda > 0} \|\lambda \vec{u}_0(\lambda x)\|_{L^2_{uloc}} = \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$).

Si \vec{u} est l'unique solution des équations de Vishik et Fursikov définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ de donnée initiale homogène \vec{u}_0 alors on peut étendre \vec{u} à $[0, \lambda^{-2}T]$ par $\vec{u}_\alpha(t, x) = \lambda \vec{u}_\alpha(\lambda^2 t, \lambda x)$: en effet, pour vérifier que $\lambda \vec{u}_\alpha(\lambda^2 t, \lambda x) = \mu \vec{u}_\alpha(\mu^2 t, \mu x)$ lorsque $t < \lambda^{-2}T$ et $t < \mu^2 T$, on pose (si $\lambda < \mu$) $\theta = \mu^2 t$, $y = \mu x$ et $r = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, nous devons alors prouver, lorsque $\theta < T$ et $y \in \mathbb{R}^3$, que $\vec{u}_\alpha(\theta, y) = r \vec{u}_\alpha(r^2 \theta, ry)$. Comme ce sont deux solutions des équations modifiées de Vishik et Fursikov avec la même donnée initiale (homogène) dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3$, l'unicité prouvée dans la proposition précédente permet de conclure. \square

Chapitre 5

Équations modifiées de Vishik et Fursikov - Donnée initiale dans $\dot{M}^{2,3}$

5.1 Construction d'une solution globale

Soit $\vec{u}_0 \in (\dot{M}^{2,3})^3$ (donc $\vec{u}_0 \in (L^2_{uloc})^3$) tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. Nous avons vu dans le chapitre précédent que nous pouvons approcher cette donnée initiale par une suite $\vec{u}_0^n \in (L^2_{uloc} \cap L^2)^3$ telle que les équations

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \alpha |\vec{u}|^2 \vec{u} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) . \quad (5.1)$$

admettaient une solution $\vec{u}_{\alpha,\eta}^n$ associée à la donnée initiale \vec{u}_0^n . Celle-ci vérifie, sous la contrainte $0 < \eta < 4\alpha$, lorsque $t \leq T_0(\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}, \eta) = \frac{1}{2K_\eta^3(1+\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2}$

le contrôle uniforme suivant :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{\alpha,\eta}(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha,\eta}\|_{(L_t^2 L_x^2)_{uloc}}^2 + \alpha \|\vec{u}_{\alpha,\eta}\|_{(L_t^4 L_x^4)_{uloc}}^4 \\ + \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}\|_{(L_t^2 L_x^2)_{uloc}}^2 &\leq \sqrt{\frac{1}{(1+\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2)^2 - 2K_\eta^3 t}} - 1. \\ &\leq (1 + \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2) \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{\frac{-1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous allons adapter la preuve de Lemarié [35] pour construire des solutions globales sachant que nous n'avons pas d'unicité dans L^2_{uloc} (pour toutes les valeurs de α et η).

Néanmoins, celles-ci préservent le changement d'échelle.

Théorème 5.1.1. *Soit $\vec{u}_0 \in (\dot{M}^{2,3})^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $0 < \eta < 4\alpha$. Il existe une solution globale $\vec{u}_{\alpha,\eta} \in \mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ vérifiant les équations modifiées de Vishik et Fursikov et satisfaisant :*

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0, R > 0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}_{\alpha,\eta}(t)|^2 dx < +\infty.$$

5.1. CONSTRUCTION D'UNE SOLUTION GLOBALE

$$\begin{aligned} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0, R > 0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha, \eta}(s, x)|^2 dx ds < +\infty. \\ \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0, R > 0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq R} \alpha |\vec{u}_{\alpha, \eta}(s, x)|^4 dx ds < +\infty. \\ \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0, R > 0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq R} \frac{1}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha, \eta}|^2 dx ds < +\infty. \end{aligned}$$

Démonstration. 1) A partir de la donnée initiale $\vec{u}_0 \in \dot{M}^{2,3}$, il existe une suite $\vec{u}_0^n \in (L^2)^3$, à divergence nulle, approchant \vec{u}_0 dans $(L^2_{uloc})^3$ muni de la topologie faible * et dont la norme $(L^2_{uloc})^3$ est contrôlée par celle de \vec{u}_0 . On remarquera aussi que cette suite, construite, à une constante près, par projection de la troncature de la donnée initiale est dans $(\dot{M}^{2,3})^3$ (car le projecteur de Leray est continu de $(\dot{M}^{2,3})^3$ dans lui-même) et converge faiblement* vers \vec{u}_0 dans $(\dot{M}^{2,3})^3$.

2) Pour $\lambda = 2^N$ fixé, soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq j \leq 2N$. Considérons simultanément les $(2N + 1)$ changements d'échelle sur la donnée initiale approchée :

$$\vec{u}_{0, \lambda, j}^n(x) = \frac{\lambda}{2^j} \vec{u}_0^n\left(\frac{\lambda}{2^j} x\right).$$

3) Pour ces $2N + 1$ données initiales (qui sont en particulier L^2), nous avons vu dans le chapitre 3 qu'il était possible de construire $2N + 1$ solutions globales aux équations modifiées et convolées de Vishik & Fursikov $E_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon}$

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{v}_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon} &= \Delta \vec{v}_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon} - w_{2^j \epsilon} * ((\vec{v}_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon} * w_{2^j \epsilon} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon} * w_{2^j \epsilon}) \\ &\quad - \alpha w_{2^j \epsilon} * (|\vec{v}_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon} * w_{2^j \epsilon}|^2 \vec{v}_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon} * w_{2^j \epsilon}) + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (w_{2^j \epsilon} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon} * w_{2^j \epsilon})) \end{aligned}$$

avec donnée initiale $\vec{u}_{0, \lambda, j}^n(x) = \frac{\lambda}{2^j} \vec{u}_0^n\left(\frac{\lambda}{2^j} x\right)$.

Ces solutions sont construites de telle sorte qu'elles vérifient

$$\vec{v}_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon}(t, x) = 2^{-j} \vec{v}_{\lambda, 0, n, \epsilon}(4^{-j} t, 2^{-j} x) \tag{5.2}$$

En effet, si $\vec{v}_{\lambda, 0, n, \epsilon}$ est solution de $E_{\lambda, 0, n, \epsilon}$ avec donnée initiale $\vec{u}_{0, \lambda, n}$ alors $\frac{1}{2^j} \vec{v}_{\lambda, 0, n, \epsilon}(4^{-j} t, 2^{-j} x)$ est solution de $E_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon}$ avec donnée initiale $\frac{\lambda}{2^j} \vec{u}_0^n\left(\frac{\lambda}{2^j} x\right)$. Cette dernière coïncide donc avec l'unique solution globale $\vec{v}_{\lambda, j, n, 2^j \epsilon}$ ayant pour donnée initiale $\vec{u}_{0, \lambda, j}^n \in L^2$.

4) A partir de ces $2N + 1$ solutions, nous pouvons extraire $2N + 1$ solutions des équations modifiées de Vishik et Fursikov, pour la même suite $\epsilon_k \rightarrow 0$ (pour $j = 0$, il existe une suite ϵ_{k_1} telle que $\vec{v}_{\lambda, 0, n, \epsilon_{k_1}}$ converge vers une solution $\vec{v}_{\lambda, 0, n}$, puis par extractions successives de ϵ_{k_1} , nous construisons $2N$ autres solutions jusqu'à définir $\vec{v}_{\lambda, 2N, n}$: la suite

ϵ_k qui conviendra est la dernière extraction). Autrement dit, il existe $(\vec{v}_{\lambda,j,n})_{j \in \mathbb{N}; j \in [2^{-N}; 2^N]}$ tels que :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v}_{\lambda,j,n} &= \Delta \vec{v}_{\lambda,j,n} - (\vec{v}_{\lambda,j,n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_{\lambda,j,n} - \alpha |\vec{v}_{\lambda,j,n}|^2 \vec{v}_{\lambda,j,n} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\lambda,j,n}) \\ \vec{v}_{0,\lambda,j}^n(x) &= \frac{\lambda}{2^j} \vec{u}_0^n(\frac{\lambda}{2^j} x) \end{cases} \quad (5.3)$$

satisfaisant $\vec{v}_{\lambda,j,n}(t, x) = 2^{-j} \vec{v}_{\lambda,0,n}(4^{-j}t, 2^{-j}x)$; le chapitre précédent nous donne un contrôle sur chaque solution $v_{\lambda,j,n}$:

lorsque $0 < t < T_0 = \frac{1}{2K_\eta^3(1 + \|\frac{\lambda}{2^j} \vec{u}_0(\frac{\lambda}{2^j} x)\|_{L_{uloc}^2}^2)^2}$:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_{\lambda,j,n}(t)\|_{L_{uloc}^2}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_{\lambda,j,n}\|_{(L_t^2 L_x^2)_{uloc}}^2 + \alpha \|\vec{v}_{\lambda,j,n}\|_{(L_t^4 L_x^4)_{uloc}}^4 \\ + \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\lambda,j,n}\|_{(L_t^2 L_x^2)_{uloc}}^2 \leq (1 + \|\frac{\lambda}{2^j} \vec{u}_0(\frac{\lambda}{2^j} x)\|_{L_{uloc}^2}^2) (1 - \frac{t}{T_0})^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sachant que $\frac{1}{2K_\eta^3(1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)^2} \leq \frac{1}{2K_\eta^3(1 + \|\frac{\lambda}{2^j} \vec{u}_0(\frac{\lambda}{2^j} x)\|_{L_{uloc}^2}^2)^2}$, pour tous $\lambda = 2^N$ et tous $j \in [2^{-N}; 2^N]$, quitte à prendre T_0 plus petit, nous obtenons donc l'estimation suivante, valable pour tout t tel que $0 < t < T_0(\eta, \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}})$:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_{\lambda,j,n}(t)\|_{L_{uloc}^2}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_{\lambda,j,n}\|_{(L_t^2 L_x^2)_{uloc}}^2 + \alpha \|\vec{v}_{\lambda,j,n}\|_{(L_t^4 L_x^4)_{uloc}}^4 \\ + \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\lambda,j,n}\|_{(L_t^2 L_x^2)_{uloc}}^2 \leq (1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2) (1 - \frac{t}{T_0})^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

5) On pose $\vec{u}_{\lambda,n} = \frac{1}{\lambda} v_{\lambda,0,n}(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda})$: nous pouvons étendre $\vec{u}_{\lambda,n}$ sur $(0, 4^N T_0)$. A l'échelle $j = 0$, nous pouvons estimer $\vec{u}_{\lambda,n}$: Comme

$$\|\vec{v}_{\lambda,0,n}(t)\|_{L_{uloc}^2}^2 \leq (1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2) (1 - \frac{t}{T_0})^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.4)$$

par changement de variables $(t = \frac{t'}{\lambda^2}, x = \frac{x'}{\lambda})$, on obtient, pour tout $0 < t < 4^N T_0$:

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \int_{|x-x_0| \leq 2^N} |\vec{u}_{\lambda,n}(t)|^2 dt \leq 2^N (1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2) (1 - \frac{t}{4^N T_0})^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.5)$$

Nous avons aussi un contrôle pour les $2N$ autres changements d'échelle.

De $v_{\lambda,j,n}(t, x) = 2^{-j} \vec{v}_{\lambda,0,n}(4^{-j}t, 2^{-j}x)$, il vient pour tout $0 < t < 4^{N-j}$:

$$\vec{u}_{\lambda,n} = 2^{j-N} \vec{v}_{\lambda,j,n}(\frac{4^j t}{\lambda^2}, \frac{2^j x}{\lambda}).$$

Grâce au contrôle de $\|\vec{v}_{\lambda,j,n}(t)\|_{L_{uloc}^2}^2$, nous obtenons par le changement de variables $(t = \frac{4^j t'}{\lambda^2}, x = \frac{2^j x'}{\lambda})$ avec $\lambda = 2^N$) pour tout $0 < t < 4^{N-j} T_{0,\eta}$ où $j \in \mathbb{N}$ est tel que $j \in [0; 2N]$:

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \int_{|x-x_0| \leq 2^{N-j}} |\vec{u}_{\lambda,n}(t)|^2 dt \leq 2^{N-j} (1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2) (1 - \frac{t}{4^{N-j} T_0})^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.6)$$

6) Nous souhaitons maintenant estimer $\int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}_{\lambda,n}(t)|^2 dt$ lorsque R est un réel contenu dans $[2^{-N}; 2^N]$.

5.1. CONSTRUCTION D'UNE SOLUTION GLOBALE

Pour $R \in [1, 2^N]$, il existe j_0 tel que $2^{j_0} \leq R \leq 2^{j_0+1}$.

Si $t \leq \frac{1}{4}R^2T_0$ alors le contrôle obtenu en (5) fournit :

$$\begin{aligned} \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}_{\lambda,n}(t)|^2 dx &\leq 2^{j_0+1} (1 + \|\vec{u}_0\|_{M^{2,3}}^2) \left(1 - \frac{t}{4^{j_0+1}T_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} 2^{j_0+1} (1 + \|\vec{u}_0\|_{M^{2,3}}^2) \\ &\leq \frac{4R}{\sqrt{3}} (1 + \|\vec{u}_0\|_{M^{2,3}}^2) \end{aligned}$$

Si $t > \frac{1}{4}R^2T_0$ alors $4t > 4^{j_0}T_0$ donc il existe k entier ($0 < j < k < N$) tel que $4^k \leq \frac{4t}{T_0} \leq 4^{k+1}$

$$\begin{aligned} \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}_{\lambda,n}(t)|^2 dx &\leq 2^{k+1} (1 + \|\vec{u}_0\|_{M^{2,3}}^2) \left(1 - \frac{t}{4^{k+1}T_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{8}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{t}{T_0}} (1 + \|\vec{u}_0\|_{M^{2,3}}^2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

La démonstration est similaire dans le cas $R \in [2^{-N}; 1]$ où les rôles de 2^{j_0} et 2^{j_0+1} sont inversés. Autrement dit :

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{\lambda=2^N} \sup_{R \in [2^{-N}; 2^N], t \leq 4^N T_0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}_{\lambda,n}(t)|^2 dx < C(1 + T_0^{-\frac{1}{2}}) (1 + \|\vec{u}_0\|_{M^{2,3}}^2) \quad (5.8)$$

De la même façon, les majorations des autres termes suivent :

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{\lambda=2^N} \sup_{R \in [2^{-N}; 2^N], t \leq 4^N T_0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\lambda,n}(s, x)|^2 dx ds < +\infty.$$

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{\lambda=2^N} \sup_{R \in [2^{-N}; 2^N], t \leq 4^N T_0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq R} \alpha |\vec{u}_{\lambda,n}(s, x)|^4 dx ds < +\infty.$$

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{\lambda=2^N} \sup_{R \in [2^{-N}; 2^N], t \leq 4^N T_0} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq R} \frac{1}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 dx ds < +\infty.$$

7) Nous pouvons maintenant passer à la limite lorsque $N \rightarrow \infty$ puis lorsque $n \rightarrow \infty$. Par un procédé d'extraction diagonale, nous construisons une solution $\vec{u}_{\alpha,\eta}$ vérifiant les équations modifiées de Vishik et Fursikov ainsi que les majorations avancées dans le théorème. Le passage à la limite reprend exactement les mêmes arguments que ceux exposés dans le chapitre L_{uloc}^2 . \square

Remarque : Pour construire des solutions globales, il suffisait de considérer $N+1$ équations (correspondant aux grandes boules). L'intérêt de considérer les $2N+1$ équations réside dans les majorations obtenues, valables pour tout $R > 0$.

5.2 Majorations uniformes en η et α

Étant donné $\vec{u}_0 \in (\dot{M}^{2,3})^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $0 < \eta < 4\alpha$, nous partons de la solution $\vec{u}_{\alpha,\eta}$ définie sur $(0, +\infty)$ (que nous noterons, dans ce paragraphe, simplement \vec{u}) et vérifiant l'équation modifiée de Vishik et Fursikov :

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \alpha |\vec{u}|^2 \vec{u} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

Cette solution est $(L^\infty((0, T), L^2_{uloc}))^3 \cap (L^2((0, T), H^1))^3_{uloc} \cap (L^4((0, T), L^4))^3_{uloc}$ pour tout $T > 0$ et vérifie les estimations du théorème (5.1.1).

L'idée est, via une égalité d'énergie, de trouver un espace de Banach X contenant $\dot{M}^{2,3}$ tel que l'on ait des majorations uniformes en α et η sur une bande $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ de $\|\vec{u}\|_X$ et $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2 X}$.

Considérons $w(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\lambda}{2}}$ avec $\lambda \in]1; 2[$ et posons $X = L^2(w dx)$, espace L^2 à poids.

Lemme 5.2.1. *On a l'inclusion : $\dot{M}^{2,3} \subset X$.*

Démonstration. Soit $\vec{u} \in \dot{M}^{2,3}$. Décomposons l'intégrale sur une somme de couronnes.

Pour $x \in B(0, 1)$, on a : $\int_{B(0,1)} |\vec{u}(x)|^2 w(x) dx \leq \|\vec{u}\|_{\dot{M}^{2,3}}^2$.

Pour $2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}$ (on note C_j cette couronne), on écrit

$$\int_{C_j} |\vec{u}(t, x)|^2 w(x) dx \leq 2^{-\lambda j} \int_{C_j} |\vec{u}(t, x)|^2 dx \leq 2^{(1-\lambda)j} \|\vec{u}\|_{\dot{M}^{2,3}}^2.$$

On somme sur $j \in \mathbb{N}$ et comme $\lambda > 1$, on obtient que $\int |\vec{u}(t, x)|^2 w(x) dx < +\infty$. \square

Dans la suite de ce paragraphe, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\rho(t) = \int |\vec{u}(t, x)|^2 w(x) dx$$

$$\beta(t) = \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 w(x) dx ds.$$

$$\gamma(t) = \int_0^t \int \alpha |\vec{u}(s, x)|^4 w(x) dx ds.$$

$$\delta(t) = \int_0^t \int \frac{1}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(s, x)|^2 w(x) dx ds.$$

Lemme 5.2.2. *Soit $T > 0$. Pour tout $t < T$, les quatre intégrales précédentes sont finies.*

Démonstration. Soit $T > 0$ fixé et $0 < t < T$.

Pour $\rho(t)$, nous décomposons w sur la boule unité et une somme de couronnes $C_j = \{x \in \mathbb{R}^3, 2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$ en utilisant la majoration suivante :

$$\sup_{R>0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \frac{1}{R + \sqrt{t}} \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}(t, x)|^2 dx < +\infty. \quad (5.9)$$

5.2. MAJORATIONS UNIFORMES EN η ET α

D'une part

$$\rho(t) \leq \int_{B(0,1)} |\vec{u}(t,x)|^2 dx \leq C(\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}, \eta)(1 + \sqrt{T}) < \infty \quad (5.10)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \rho(t) &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-\lambda j} \int_{C_j} |\vec{u}(t,x)|^2 dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{(1-\lambda)j} 2^{-j} \int_{B(0;2^j)} |\vec{u}(t,x)|^2 dx \\ &< \infty \end{aligned} \quad (5.11)$$

En effet, nous appliquons (5.9) à $R = 2^j$ sur $(0, T)$:

$$2^{-j} \int_{B(0;2^j)} |\vec{u}(t,x)|^2 dx \leq C(1 + 2^{-j}\sqrt{T}) < +\infty. \quad (5.12)$$

Les trois autres intégrales se traitent de la même façon (les estimations étant les mêmes). \square

Comme les estimations doivent provenir d'une égalité d'énergie, les inégalités de Sobolev impliquent que l'espace naturel pour contrôler la pression est $L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(w^{\frac{3}{2}} dx)$. Pour des raisons techniques qui apparaîtront lors de la preuve de la proposition suivante, nous introduisons la fonction $w_1(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\mu}{2}}$ avec $\mu \in]\frac{3\lambda}{2}; \frac{3}{2} + \frac{3\lambda}{4}[\subset]\frac{3}{2}; 3[$; nous allons alors estimer $p \in L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(w_1 dx)$ (nous verrons en fait que l'exposant $\mu = \frac{3\lambda}{2}$ ne convient pas pour assurer la convergence des intégrales, d'où la petite marge choisie). On cherchera de nouveau à la contrôler par le théorème de régularité maximale du noyau de la chaleur : pour ce faire, nous utiliserons les p-classes de Muckenhoupt et le fait que $w \in \mathcal{A}_{\frac{3}{2}}$ (voir annexe B).

Proposition 5.2.3. *Soit $T > 0$ fixé. Pour $t \in (0, T)$ définissons*

$$a(t) = \int_0^t \int \frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}}} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^{\frac{3}{2}} w_1(x) dx ds = \int_0^t \int |p(x,s)|^{\frac{3}{2}} w_1(x) dx ds.$$

Il existe une constante C (indépendante de α , η et T) et un exposant $R > 1$ tels que :

$$a(t) \leq \frac{1}{2}\beta(t) + \frac{1}{2}\gamma(t) + C \int_0^t (\rho(s) + (\rho(s))^3 + (\rho(s))^R) ds. \quad (5.13)$$

Autrement dit, nous avons un contrôle uniforme de la pression dans $L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(w_1 dx)$.

Démonstration. On note $p = -\frac{1}{\eta}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$. On a déjà vu que :

$$p(t) = -\frac{1}{1+\eta} \int_0^t e^{(t-s)(1+\frac{1}{\eta})\Delta} (1 + \frac{1}{\eta}) \Delta \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \alpha |\vec{u}|^2 \vec{u}) ds \quad (5.14)$$

CHAPITRE 5. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS $\dot{M}^{2,3}$

Par le théorème de régularité maximale dans $L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(w_1 dx)$ (ce résultat est prouvé dans l'annexe B) , en notant $f_1 = |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|$, $f_2 = \sqrt{\alpha} |\vec{u}|^2$ et $g = \vec{u}$, il existe une constante C telle que :

$$a(t) \leq C \int_0^t \int \left| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(f_1 g) \right|^{\frac{3}{2}} w_1(x) \, dx \, ds + C \sqrt{\alpha} \int_0^t \int \left| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(f_2 g) \right|^{\frac{3}{2}} w_1(x) \, dx \, ds$$

Nous allons traiter les deux termes $(f_i g)$ de la même façon vu que nous souhaitons le même contrôle $L^2(w dx)$ sur chacun des termes f_i .

En décomposant w_1 sur la boule unité et une somme de couronnes $C_j = \{x \in \mathbb{R}^3, 2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$, on a :

$$\left| w_1^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(f_i g) \right| \leq C \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-\frac{2\mu j}{3}} \mathbb{1}_{B(0,2^j)} \left| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(f_i g) \right|$$

On décompose maintenant la convolution suivant les valeurs de y proches de x et celles éloignées :

$$\begin{aligned} \left| 2^{-\frac{2\mu j}{3}} \mathbb{1}_{B(0,2^j)} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(f_i g) \right| &\leq 2^{-\frac{2\mu j}{3}} \mathbb{1}_{B(0,2^j)} \left| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\mathbb{1}_{B(0,3 \times 2^j)} f_i g) \right| + 2^{-\frac{2\mu j}{3}} \mathbb{1}_{B(0,2^j)} \left| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\mathbb{1}_{B(0,3 \times 2^j)^c} f_i g) \right| \\ &= A_j + B_j \end{aligned}$$

Nous allons d'abord estimer les normes $L_x^{\frac{3}{2}}$ de A_j et B_j .

Pour A_j , on écrit que : $A_j \leq 2^{j(\lambda - \frac{2\mu}{3})} \mathbb{1}_{B(0,2^j)} \left| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(w f_i g) \right|$

En effet, lorsque $y \in B(0, 3 \times 2^j)$, on a : $C^\lambda 2^{-j\lambda} \leq w(y)$ avec $C = \sqrt{18}^{-\lambda} < 1$.

Comme $\sqrt{w} g \in L^2 \cap L^6$ d'après les inégalités de Sobolev, alors pour tout $q \in]2; 6[$, $\sqrt{w} g \in L^q$. Ainsi : $\sqrt{w} f_i g \in L^r$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{2}$. Comme $r > 1$, de nouveau par les inégalités de Sobolev, on a : $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(w f_i g) \in L^\rho$ où $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{1}{3} = \frac{1}{q} + \frac{1}{6}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|A_j\|_{L^{\frac{3}{2}}} &\leq C \|\mathbb{1}_{B(0,2^j)}\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}} \left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(w f_i g) \right\|_{L^\rho} \\ &\leq C 2^{j(\lambda - \frac{2\mu}{3} + \frac{3}{2} - \frac{3}{q})} \|\sqrt{w} f_i\|_2 \|\sqrt{w} g\|_q. \end{aligned} \quad (5.15)$$

On pose $\theta = \lambda - \frac{2\mu}{3} + \frac{3}{2} - \frac{3}{q}$. En choisissant q proche de 2, on peut toujours supposer $\theta < 0$ (étant donné que $\lambda < \frac{2\mu}{3}$, d'où le choix de w_1).

On obtient alors, par l'inégalité triangulaire de la norme $L_x^{\frac{3}{2}}$:

$$\int_0^t \int \left| \sum_{j=0}^{+\infty} A_j \right|^{\frac{3}{2}} \, ds \, dx \leq C \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{\theta j} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^t \|\sqrt{w} f_i(s)\|_2^{\frac{3}{2}} \|\sqrt{w} g(s)\|_q^{\frac{3}{2}} \, ds. \quad (5.16)$$

En remarquant que $\|\sqrt{w} g\|_q \leq \|\sqrt{w} g\|_2^b \|\sqrt{w} g\|_6^{1-b}$ pour tout $b \in]0, 1[$ et en utilisant la

5.2. MAJORATIONS UNIFORMES EN η ET α

majoration valable pour tout $\kappa > 0$: $(ab)^{\frac{3}{2}} \leq \kappa a^2 + C_\kappa b^6$, on a :

$$\begin{aligned} \|\sqrt{w}f_i\|_2^{\frac{3}{2}}\|\sqrt{w}g\|_q^{\frac{3}{2}} &\leq \kappa\|\sqrt{w}f_i\|_2^2 + C_\kappa\|\sqrt{w}g\|_q^6 \\ &\leq \kappa\|\sqrt{w}f_i\|_2^2 + C_\kappa\|\sqrt{w}g\|_2^{6b}\|\sqrt{w}g\|_6^{6(1-b)} \\ &\leq \kappa\|\sqrt{w}f_i\|_2^2 + \kappa\|\sqrt{w}g\|_6^2 + C_{\kappa,b}\|\sqrt{w}g\|_2^{\frac{6b}{3b-2}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

la dernière inégalité ayant un sens lorsque $b \in]\frac{2}{3}; 1[$ id est $q \in]2; \frac{18}{7}[$.

Lorsque $q \in]2; \frac{18}{7}[$, on peut trouver un exposant $R = \frac{3b}{3b-2} > 1$ tel que pour tout $\kappa > 0$:

$$\int_0^t \int |\sum_{j=0}^{+\infty} A_j|^{\frac{3}{2}} ds dx \leq C \int_0^t (\kappa\|\sqrt{w}f_i(s)\|_2^2 + \kappa\|\sqrt{w}g(s)\|_6^2 + C_{\kappa,q}\|\sqrt{w}g(s)\|_2^{2R}) ds \quad (5.18)$$

D'après les inégalités de Sobolev, $\|\sqrt{w}g(s)\|_6^2 \leq C\|\sqrt{w}g(s)\|_{H^1}^2$.

Étant donné que $|\vec{\nabla}\sqrt{w}(x)| \leq \frac{\lambda}{2}(1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{w} \leq \sqrt{w}$ ($\lambda < 2$), il existe une constante C' telle que pour tout $\kappa > 0$:

$$\int_0^t \int |\sum_{j=0}^{+\infty} A_j|^{\frac{3}{2}} ds dx \leq C'\kappa(\beta(t) + \gamma(t)) + C' \int_0^t (\kappa\rho(s) ds + C'_{\kappa,q}(\rho(s))^R) ds \quad (5.19)$$

Estimons maintenant B_j : nous décomposons l'intégrale sur la boule unité et une somme de couronnes. En remarquant que, pour tout $k \in N$ lorsque $|x| \leq 2^j$ et $3 \times 2^{j+k} < |y| < 3 \times 2^{j+k+1}$ alors $|x - y| > 2 \times 2^{j+k}$, la norme infinie du noyau de $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$ (homogène de degré $(1 - 3)$ en espace) est majorée par $C2^{-2(j+k)}$, nous obtenons :

$$B_j \leq C2^{-\frac{2j\mu}{3}} \mathbb{1}_{B(0,2^j)} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{3 \times 2^{j+k} < |y| < 3 \times 2^{j+k+1}} 2^{-2(j+k)} 2^{-2(j+k)} 2^{\lambda(j+k)} (wf_i g) dy \quad (5.20)$$

Comme $\lambda < 2$, on a :

$$\begin{aligned} B_j &\leq C2^{-\frac{2j\mu}{3}} \mathbb{1}_{B(0,2^j)} \|\sqrt{w}f_i\|_2 \|\sqrt{w}g\|_2 \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(\lambda-2)(j+k)} \\ &\leq C'2^{(\lambda-2-\frac{2\mu}{3})j}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sachant que $\|B_j\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq C2^{2j}\|B_j\|_\infty$ et que $\lambda < \frac{2\mu}{3}$, on obtient :

$$\int_0^t \int |\sum_{j=0}^{+\infty} B_j|^{\frac{3}{2}} ds dx \leq C(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j(\lambda-\frac{2\mu}{3})})^{\frac{3}{2}} \int_0^t \|\sqrt{w}f_i(s)\|_2^{\frac{3}{2}} \|\sqrt{w}g(s)\|_2^{\frac{3}{2}} ds. \quad (5.22)$$

Par l'inégalité de convexité de Young, pour tout $\kappa > 0$, nous avons :

$$\|\sqrt{w}f_i\|_2^{\frac{3}{2}}\|\sqrt{w}g\|_2^{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{4}\kappa\|\sqrt{w}f_i\|_2^2 + \frac{1}{4\kappa^3}\|\sqrt{w}g\|_2^6$$

Finalement, pour tout $\kappa > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int |\sum_{j=0}^{+\infty} B_j|^{\frac{3}{2}} dx ds &\leq C \int_0^t \kappa\|\sqrt{w}f_i(s)\|_2^2 + C_\kappa\|\sqrt{w}g(s)\|_2^6 ds \\ &\leq C\kappa(\beta(t) + \gamma(t)) + C'_\kappa \int_0^t \rho(s)^3 ds \end{aligned} \quad (5.23)$$

CHAPITRE 5. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS $\dot{M}^{2,3}$

En regroupant les estimations obtenues sur A_j et B_j , nous pouvons maintenant fixer κ petit et l'exposant q (soit $R > 1$) tels que :

$$a(t) \leq \frac{1}{2}\beta(t) + \frac{1}{2}\gamma(t) + C \int_0^t (\rho(s) + \rho(s)^3 + \rho(s)^R) \, ds \quad (5.24)$$

ce qui termine la preuve. \square

Cette proposition montrée, nous allons maintenant estimer uniformément en η et α la somme des quatre intégrales $\rho(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ et $\delta(t)$.

Théorème 5.2.4. *Soit $0 < \eta < 4\alpha$. Soit $T > 0$ fixé. Il existe une constante C (indépendante de T , η , α et $\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$) et un exposant $R > 1$ tels que pour tout $t \in (0, T)$:*

$$\rho(t) + \beta(t) + \gamma(t) + \frac{3}{2}\delta(t) \leq C(\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2 + \int_0^t (\rho(s) + (\rho(s))^3 + (\rho(s))^R) \, ds)$$

Plus précisément, on a :

$$\rho(t) + \beta(t) + \gamma(t) + \frac{3}{2}\delta(t) \leq \alpha(0) + C \int_0^t (\rho(s) + (\rho(s))^3 + (\rho(s))^{\frac{93}{25}}) \, ds$$

Démonstration. Fixons $T > 0$. Tout d'abord, justifions l'égalité dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$:

$$\partial_t(|\vec{u}|^2 w) = 2w\vec{u} \cdot \Delta \vec{u} - 2w\vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) - 2\alpha w |\vec{u}|^4 + \frac{2}{\eta} w \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (5.25)$$

avec

$$2w\vec{u} \cdot \Delta \vec{u} = \Delta(w|\vec{u}|^2) - |\vec{u}|^2 \Delta w - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 w - 2 \sum_{i=0}^{i=3} \partial_i(|\vec{u}|^2 \partial_i w) \quad (5.26)$$

$$2w\vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot (w|\vec{u}|^2 \vec{u}) - w|\vec{u}|^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - |\vec{u}|^2 \sum_{i=0}^{i=3} u_i \partial_i w \quad (5.27)$$

et

$$\frac{2}{\eta} w \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot (w \frac{2}{\eta} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{u}) - \frac{2}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 w - \frac{2}{\eta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \sum_{i=0}^{i=3} u_i \partial_i w \quad (5.28)$$

On intègre chaque terme des membres de droite contre une fonction-test de $\mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3)$. Sachant que $|\vec{\nabla} w| \leq Cw$ et que $|\Delta w| \leq C'w$, chaque intégrale peut être majorée par une combinaison linéaire de deux des quatre intégrales $\rho(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ et $\delta(t)$ (combinaison linéaire dépendant éventuellement de η mais prouvant que chaque intégrale est finie). On a alors $\partial_t(|\vec{u}|^2 w) = 2w \langle \partial_t \vec{u}, \vec{u} \rangle$ et l'égalité d'énergie est vérifiée. En considérant comme fonction test $h(\frac{x}{A})r(t)$ où $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est égal à 1 au voisinage de 0 et $r \in \mathcal{D}(0, T)$ puis en faisant tendre A vers $+\infty$, on remarque que la contribution des termes de type $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ est nulle lorsque $F \in L_t^1 L_x^1(w dx)$.

5.2. MAJORATIONS UNIFORMES EN η ET α

D'autre part, on constate que $\partial_t \|\vec{u}\sqrt{w}\|_2$ s'écrit comme une somme de fonctions L^1_t . Ainsi $t \rightarrow \|\vec{u}\sqrt{w}\|_2^2$ est continue en 0. En intégrant en temps, on obtient :

$$\rho(t) + 2\beta(t) + 2\gamma(t) + 2\delta(t) = \alpha(0) + Z$$

avec

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^t \int w |\vec{u}|^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \, dx \, ds + \int_0^t \int |\vec{u}|^2 \Delta w \, dx \, ds \\ &\quad + \int_0^t \int |\vec{u}|^2 \sum_{i=0}^{i=3} u_i \partial_i w \, dx \, ds - \int_0^t \int \frac{2}{\eta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \sum_{i=0}^{i=3} u_i \partial_i w \, dx \, ds \\ &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \end{aligned}$$

Nous allons contrôler les quatre termes grâce à ceux du membre de gauche.

Z_1 se contrôle toujours grâce à la contrainte $0 < \eta < 4\alpha$.

Comme $|\vec{u}|^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \leq \frac{\alpha}{2} |\vec{u}|^4 + \frac{1}{2\alpha} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \leq \frac{\alpha}{2} |\vec{u}|^4 + \frac{\eta}{2} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2$, on a :

$$Z_1 \leq \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{2} \gamma(t)$$

Comme $|\Delta w| \leq C'w$ (λ est borné et $(1 + |x|^2)^{-1} \leq 1$), on a :

$$Z_2 \leq C \int_0^t \rho(s) \, ds.$$

Pour majorer Z_3 , on écrit que : $|\vec{\nabla} w(x)| \leq \lambda(1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} w(x) \leq \lambda w(x)^{\frac{3}{2}}$ (car $\lambda < 2$).

Alors

$$Z_3 \leq C \int_0^t \int |\vec{u}(s, x)|^3 w(x)^{\frac{3}{2}} \, dx \, ds.$$

En utilisant successivement $H^{\frac{1}{2}} \subset L^3$, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de convexité de Young, on a :

$$Z_3 \leq C' \int_0^t \alpha(s)^{\frac{3}{4}} \|\sqrt{w}\vec{u}(s)\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} \, ds \leq \frac{1}{4} \int_0^t \|\sqrt{w}\vec{u}(s)\|_{H^1}^2 \, ds + C'' \int_0^t \alpha(s)^6 \, ds$$

Nous avons déjà vu que $\|\sqrt{w}\vec{u}(t)\|_{H^1}^2 \leq \beta(t) + C\alpha(t)$.

Ainsi :

$$Z_3 \leq \frac{1}{4} \beta(t) + C' \left(\int_0^t \alpha(s) \, ds + \int_0^t \alpha^3(s) \, ds \right).$$

Pour Z_4 , on utilise le fait que $|\vec{\nabla} w(x)| \leq \lambda(1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} w(x) \leq \lambda w(x)^{\frac{1}{2}} w_1(x)^{\frac{2}{3}}$ (car $\frac{\mu}{3} \leq \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4}$).

Ainsi, de $L^3 \times L^{\frac{3}{2}} \in L^1$, il vient :

$$Z_4 \leq C \int_0^t \|\sqrt{w}\vec{u}(s)\|_3 \|w_1^{\frac{2}{3}} p(s)\|_{L^{\frac{3}{2}}}^2 \, ds.$$

CHAPITRE 5. EMVF - DONNÉE INITIALE DANS $\dot{M}^{2,3}$

Donc, par l'inégalité de convexité de Young, pour tout $\kappa > 0$:

$$\begin{aligned} Z_4 &\leq \frac{C}{3}\kappa \int_0^t \|\sqrt{w}\vec{u}\|_3^3 \, ds + \frac{2C}{3\sqrt{\kappa}} \|w_1^{\frac{2}{3}} p(s)\|_{L^{\frac{3}{2}}}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C\kappa \int_0^t \|\sqrt{w}\vec{u}\|_3^3 \, ds + \frac{C}{\sqrt{\kappa}} a(t) \end{aligned}$$

Pour κ suffisamment petit et grâce à la proposition précédente, on a :

$$Z_4 \leq \frac{3}{4}\beta(t) + \frac{1}{2}\gamma(t) + C' \int_0^t (\rho(s) + (\rho(s))^3 + (\rho(s))^R) \, ds$$

En regroupant tout (sachant que $\alpha(0) \leq C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2$ - cf le lemme (5.2.1)) , il existe une constante C (indépendante de T , η , α et $\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2$) satisfaisant :

$$\rho(t) + \beta(t) + \gamma(t) + \frac{3}{2}\delta(t) \leq C(\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2 + \int_0^t (\rho(s) + \rho(s)^3 + \rho(s)^R) \, ds) \quad (5.29)$$

Application numérique :

nous fixons $\lambda = \frac{3}{2}$ alors $\mu \in]\frac{9}{4}; \frac{21}{8}[$; posons $\mu = \frac{5}{2}$. Si $q = \frac{17}{8}$ alors $\theta = -\frac{4}{51} < 0$. On obtient $b = \frac{31}{34}$ et l'exposant $R = \frac{3b}{3b-2} = \frac{93}{25}$ convient. \square

Corollaire 5.2.5. Posons $K = \frac{68}{25} \max(\frac{100C}{93}; 1)$. Il existe un temps $T_0(\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}) = \frac{1}{K(1+\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)^{\frac{68}{25}}}$ tel que pour tout $0 < t < T_0$, on a :

$$\rho(t) + \beta(t) + \gamma(t) + \frac{3}{2}\delta(t) \leq (1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2) \left(\frac{1}{1 - \frac{68C'}{25}(1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)^{\frac{68}{25}} t} \right)^{\frac{25}{68}} \quad (5.30)$$

Démonstration. L'inégalité de convexité de Young permet d'écrire, pour tout $s \in (0, t)$: $\rho(s)^3 \leq \frac{18}{93} + \frac{75}{93}\rho(s)^{\frac{93}{25}}$. De même $\rho(s) \leq \frac{68}{93} + \frac{25}{93}\rho(s)^{\frac{93}{25}}$

On a alors :

$$\rho(t) + \beta(t) + \gamma(t) + \frac{3}{2}\delta(t) \leq C(\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2 + \int_0^t (\frac{86}{93} + \frac{100}{93}\rho(s)^{\frac{93}{25}}) \, ds) \quad (5.31)$$

Posons $C' = \max(\frac{100C}{93}; 1)$ et notons $y(t) = \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2 + \int_0^t (1 + \rho(s)^{\frac{93}{25}}) \, ds$. D'après le théorème précédent, on a : $y'(t) \leq 1 + C'y(t)^{\frac{93}{25}} \leq C'(1 + y(t))^{\frac{93}{25}}$ étant donné que $C' \geq 1$ et $1 + x^b \leq (1 + x)^b$ lorsque $x \geq 0$ et $b \geq 1$.

Cette inéquation différentielle se résout en $(1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)^{-\frac{68}{25}} - (1 + y(t))^{-\frac{68}{25}} \leq \frac{68C'}{25} t$.

Ainsi, en posant $K = \frac{68C'}{25}$:

$$\begin{aligned} y(t) &\leq 1 + y(t) \leq \left(\frac{1}{(1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)^{-\frac{68}{25}} - Kt} \right)^{\frac{25}{68}} \\ &= (1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2) \left(\frac{1}{1 - K(1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)^{\frac{68}{25}} t} \right)^{\frac{25}{68}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

inégalité valable pour tout $0 < t < T_0 = \frac{1}{K(1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)^{\frac{68}{25}}}$. \square

Nous avons maintenant tous les outils pour passer à la limite lorsque $(\alpha, \eta) \rightarrow (0, 0)$.

5.3 Passage à la limite

5.3.1 Construction d'une solution globale

Étant donné $\vec{u}_0 \in (\dot{M}^{2,3})^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $0 < \eta < 4\alpha$, nous savons qu'il existe une solution $\vec{u}_{\alpha,\eta}$ définie sur $(0, +\infty)$ vérifiant l'équation modifiée de Vishik et Fursikov :

$$\partial_t \vec{u}_{\alpha,\eta} = \Delta \vec{u}_{\alpha,\eta} - \vec{u}_{\alpha,\eta} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}_{\alpha,\eta} - \alpha |\vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 \vec{u}_{\alpha,\eta} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta})$$

Cette solution est $(L^\infty((0, T), L^2_{uloc}))^3 \cap (L^2((0, T), H^1))^3_{uloc} \cap (L^4((0, T), L^4))^3_{uloc}$ pour tout $T > 0$.

Dans la partie précédente, nous avons vu qu'il existait une constante K et un temps $T_0 = \frac{1}{K(1+\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)^{\frac{68}{25}}}$ tel que pour tout $0 < t < T_0$

$$\rho(t) + \beta(t) + \gamma(t) + \frac{3}{2}\delta(t) \leq (1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2) \left(\frac{1}{1 - K(1+\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)^{\frac{68}{25}} t} \right)^{\frac{25}{68}} \quad (5.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \int |\vec{u}_{\alpha,\eta}(t, x)|^2 w(x) \, dx \\ \beta(t) &= \int_0^t \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha,\eta}(s, x)|^2 w(x) \, dx \, ds. \\ \gamma(t) &= \int_0^t \int \alpha |\vec{u}_{\alpha,\eta}(s, x)|^4 w(x) \, dx \, ds. \\ \delta(t) &= \int_0^t \int \frac{1}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}(s, x)|^2 w(x) \, dx \, ds. \end{aligned}$$

où le poids est défini par $w(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\lambda}{2}}$ avec $\lambda \in]1; 2[$. Autrement dit, nous avons l'existence d'une solution $\vec{u}_{\alpha,\eta}$ des équations modifiées de Vishik et Fursikov sur la bande $(0, T_0)$ où le temps T_0 ne dépend que de la taille $\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$ avec des majorations uniformes en α et η .

On peut donc reprendre la démonstration effectuée lors du passage de L^2_{uloc} à $\dot{M}^{2,3}$: en effet, la donnée initiale peut être approchée par une suite \vec{u}_0^n dans $(\dot{M}^{2,3})^3$ (la suite construite dans L^2_{uloc} convient car le projecteur de Leray est continu de $(\dot{M}^{2,3})^3$ dans lui-même) puis les mêmes arguments permettent de construire une solution globale. Remarquons que l'on construit une solution sur $(0, \lambda^2 T_0)$ avec les mêmes estimations uniformes de ρ , β , γ et δ avec le poids $w_\lambda = w(\frac{x}{\lambda})$. Il suffit alors de remarquer pour $\lambda \geq 1$ (condition suffisante pour construire des solutions globales) les espaces $L^p(w_\lambda dx)$ donnent des conditions plus restrictives que $L^p(w dx)$ ($w \leq w_\lambda$). Ces estimations (ajoutées à un argument de compacité) permettent donc la construction d'une solution globale $\vec{u}_{\alpha,\eta}$ avec des bornes uniformes (en α et η) de $\vec{u}_{\alpha,\eta}$ dans $(L^\infty((0, T), L^2(w dx)))^3$, de $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha,\eta}$ et de $\frac{1}{\sqrt{\eta}} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}$ dans $(L^2((0, T), L^2(w dx)))^3$, pour tout $T > 0$. De plus, $\alpha^{\frac{1}{4}} \vec{u}_{\alpha,\eta}$ est uniformément borné dans $(L^4((0, T), L^4(w dx)))^3$ et la pression p est uniformément contrôlée dans $L^{\frac{3}{2}}((0, T), L^{\frac{3}{2}}(w_1 dx))$.

5.3.2 Construction de la solution des équations de Navier-Stokes

Nous allons nous inspirer de la démonstration effectuée dans le cas L^2 en utilisant de nouveau le projecteur de Leray. Notons simplement \vec{u}_α la solution du modèle modifié de Vishik et Fursikov (α et η étant liés). Nous savons déjà que nous pouvons extraire (via le procédé diagonal) une suite \vec{u}_{α_k} qui converge faiblement vers une limite \vec{u} dans $\bigcap_{0 < t < \infty} (L_t^\infty L_x^2(wdx))^3$ et telle que $\vec{\nabla} \otimes u_{\alpha_k}$ converge faiblement vers $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ dans $\bigcap_{0 < t < \infty} (L^2(wdx \, dt))^{3 \times 3}$ (sachant que $L_t^2 L_x^2(wdx)$ est le dual de l'espace de Banach séparable $L_t^2 L_x^2(w^{-1}dx)$ et $L_t^\infty L_x^2(wdx)$ celui de $L_t^1 L_x^2(wdx)$).

Nous aurons besoin du lemme suivant pour assurer la convergence forte localement dans $L^2 L^2$:

Lemme 5.3.1. *Soit $\phi \in \mathcal{D}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$. On a $\|\phi(Id - \mathbb{P})\vec{u}_{\alpha_k}\|_{L^2 L^2} \rightarrow 0$.*

Remarque : Comme

$$(Id - \mathbb{P})\vec{u}_{\alpha_k} = \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}, \quad (5.34)$$

la première idée est d'étudier directement l'expression

$$\int (1 + |y|^2)^{\frac{\lambda}{4}} \frac{f(y)}{|x - y|^2} \, dy$$

où f désigne une fonction $L^2 L^2$ tendant vers 0 dans cette norme (correspondant à $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}$).

Décomposons l'intégrale pour $y \in B(x; 1)$ et ailleurs.

Si $y \in B(x; 1)$ alors $(1 + |y|^2)^{\frac{\lambda}{4}} \leq 4(1 + |x|^2)^{\frac{\lambda}{4}}$. Comme $\frac{1}{|x|^2} \in L^{\frac{3}{2}, \infty}$ et $L^{\frac{3}{2}, \infty} * L^2 \subset L^{6,2}$ alors $\int_{B(x;1)} (1 + |y|^2)^{\frac{\lambda}{4}} \frac{f(y)}{|x-y|^2} \, dy \in L^{6,2} \subset L^6$.

Ailleurs, nous intégrons sur une somme de couronnes $C_j = \{y : 2^j \leq |x - y| \leq 2^{j+1}\}$.

Sur C_j , on a : $1 + |y|^2 \leq 1 + 2|x - y|^2 + 2|x|^2 \leq 2(1 + 2^{2j+2})(1 + |x|^2)$ et $\frac{1}{|x-y|^2} \leq 2^{-2j}$; ainsi

$$\begin{aligned} \int_{C_j} (1 + |y|^2)^{\frac{\lambda}{4}} \frac{f(y)}{|x-y|^2} \, dy &\leq C(1 + |x|^2)^{\frac{\lambda}{4}} 2^{j(\frac{\lambda}{2}-2)} \int_{C_j} |f(y)| \, dy \\ &\leq C(1 + |x|^2)^{\frac{\lambda}{4}} 2^{j(\frac{\lambda-1}{2})} \|f\|_2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Comme $\lambda > 1$, la somme ne converge pas et cette idée échoue.

Démonstration. Nous devons déjà nous assurer de la définition de

$$\phi(Id - \mathbb{P})\vec{u}_{\alpha_k} = \phi \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}. \quad (5.36)$$

Comme ϕ est à support compact, on peut se ramener à $Supp \phi \subset (0, T) \times B(x_0, 1)$. On considère $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ valant 1 sur la boule unité et à valeurs dans $B(0, 2)$ et $\tilde{\rho}_k = \rho(\frac{x-x_0}{R_k})$

où $R_k > 10|x_0|$ que l'on déterminera plus tard.

On écrit :

$$\begin{aligned}\phi_{\Delta}^{\vec{\nabla}} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k} &= \phi_{\Delta}^{\vec{\nabla}} (\tilde{\rho}_k \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}) + \phi_{\Delta}^{\vec{\nabla}} \vec{\nabla} \cdot ((1 - \tilde{\rho}_k) \vec{u}_{\alpha_k}) + \phi_{\Delta}^{\vec{\nabla}} (\vec{u}_{\alpha_k} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\rho}_k \\ &= (1) + (2) + (3)\end{aligned}$$

Cette expression montre que $(Id - \mathbb{P})\vec{u}_{\alpha_k}$ a un sens : comme on a un contrôle de $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}$ dans $L^2 L^2(wdx)$, nous en avons aussi un de $\tilde{\rho}_k \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}$ dans $L^2 L^2$ (car $w^{-\frac{1}{2}}$ est L_{loc}^{∞}), donc (1) a un sens dans $L^2 L^6$. De même, le contrôle de (3) vient de celui de $(\vec{u}_{\alpha_k} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\rho}_k$ dans $L^2 L^2$. Enfin, le terme (2) a un sens car les opérateurs de Calderón-Zygmund sont continus de $L^2 L^2(wdx)$ dans $L^2 L^2(wdx)$ (voir Annexe B).

Pour montrer que cette expression tend vers 0, l'idée est de prendre R_k grand et de comparer le poids w à un autre w' bien choisi.

Pour (1), on sait que

$$\begin{aligned}\|\sqrt{w^{-1}} \tilde{\rho}_k \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k} \sqrt{w}\|_{L^2 L^2} &\leq \|\sqrt{w^{-1}}\|_{L^{\infty}(B(x_0, 2R_k))} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}\|_{L^2 L^2(wdx)} \\ &\leq C_T \sqrt{\eta_k} (|x_0| + R_k)^{\frac{\lambda}{2}}\end{aligned}\quad (5.37)$$

donc

$$\begin{aligned}\|\phi_{\Delta}^{\vec{\nabla}} (\tilde{\rho}_k \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k})\|_{L^2 L^2} &\leq C(\phi) \|\phi_{\Delta}^{\vec{\nabla}} (\tilde{\rho}_k \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k})\|_{L^2 L^6} \\ &\leq C_T \sqrt{\eta_k} (|x_0| + R_k)^{\frac{\lambda}{2}} \quad C_T = C(T, \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}})\end{aligned}\quad (5.38)$$

Pour (2), on considère le poids $w' = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{\mu}{2}}}$ avec $2 > \mu > \lambda$ de telle sorte que $w' < w$.

On écrit :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_{\alpha_k} (1 - \tilde{\rho}_k)\|_{L_t^2 L_x^2(w'dx)} &\leq \|\vec{u}_{\alpha_k} (1 - \tilde{\phi}_k)\|_{L_t^2 L_x^2(wdx)} \|\sqrt{\frac{w'}{w}}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^3 - B(x_0, R_k))} \\ &\leq C_T (|x_0| + R_k)^{\frac{\lambda - \mu}{2}}\end{aligned}\quad (5.39)$$

En effet, de par le choix de R_k , on a : $|x| \geq |x - x_0| - |x_0| \geq \frac{9}{10} R_k$.

Sachant que le poids $w' \in \mathcal{A}_2$ et que les opérateurs de Calderón-Zygmund sont continus de $L^2(w'dtdx)$ dans lui-même, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\phi_{\Delta}^{\vec{\nabla}} \vec{\nabla} \cdot ((1 - \tilde{\rho}_k) \vec{u}_{\alpha_k})\|_{L_t^2 L_x^2} &\leq C_T (1 + |x_0|)^{\frac{\mu}{2}} \|\vec{u}_{\alpha_k} (1 - \tilde{\phi}_k)\|_{L_t^2 L_x^2(w'dx)} \\ &\leq C_T (|x_0| + R_k)^{\frac{\lambda - \mu}{2}}\end{aligned}\quad (5.40)$$

Pour (3), on procède comme dans (1) (sachant que $\|\vec{\nabla} \tilde{\rho}_k\|_{\infty} \leq \frac{C}{R_k}$) :

$$\|\phi_{\Delta}^{\vec{\nabla}} (\vec{u}_{\alpha_k} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\rho}_k\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C_T (|x_0| + R_k)^{\frac{\lambda}{2}} R_k^{-1}\quad (5.41)$$

Pour contrôler le premier terme, il suffit de poser $R_k = \eta_k^{-\frac{1}{2}}$: comme $\lambda < 2$, il tend vers 0 lorsque $\eta_k \rightarrow 0$. Les deuxième et troisième termes convergent aussi vers 0 étant donné que $\lambda < \mu < 2$. \square

Proposition 5.3.2. *De la sous-suite \vec{u}_{α_k} , il existe une sous-suite (notée de la même façon) qui converge fortement vers \vec{u} dans $(L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))_{loc}^3$.*

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{D}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$.

a) Montrons d'abord que $\phi \mathbb{P} \vec{u}_\alpha$ est uniformément borné dans $(L^2 H^1)^3$.

Comme \vec{u}_α est uniformément borné (en α et η) dans $(L^2((0, T), L^2(wdx)))^3$ pour tout $T > 0$, par continuité du projecteur de Leray dans cet espace, $\mathbb{P} \vec{u}_\alpha$ l'est aussi dans $L^2((0, T), L^2(wdx))^3$ pour tout $T > 0$. Donc $\phi \sqrt{w} \mathbb{P} \vec{u}_\alpha$ est uniformément contrôlé dans $L^2 L^2$, tout comme $\phi \mathbb{P} \vec{u}_\alpha$ (car $w^{-\frac{1}{2}}$ est de norme L^∞ sur le support de ϕ).

De même $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\alpha$ est (uniformément en α et η) borné dans $(L^2((0, T), L^2(wdx)))^{3 \times 3}$ pour tout $T > 0$, donc on obtient un contrôle de $\phi \mathbb{P} \vec{u}_\alpha$ dans $(L^2(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)))^3$ (les opérateurs ∂_j et \mathbb{P} commutent).

b) Montrons ensuite que $\partial_t(\phi \mathbb{P} \vec{u}_\alpha)$ est uniformément borné dans $(L^2 H^{-2})^3$ lorsque $\sigma > \frac{3}{2}$.

Le terme $\mathbb{P} \vec{u}_\alpha \partial_t \phi$ est uniformément borné dans $(L^2 L^2)^3$ d'après ce qui a été vu dans le point a).

Pour le terme $\phi \partial_t(\mathbb{P} \vec{u}_\alpha)$, on écrit :

$$\phi \partial_t(\mathbb{P} \vec{u}_\alpha) = \phi \Delta \mathbb{P} \vec{u}_\alpha - \phi \mathbb{P}((\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha) - \alpha \phi \mathbb{P}(|\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha). \quad (5.42)$$

Pour le premier terme, on écrit, pour $(0, T) \times K$ compact contenant le support de ϕ :

$$\begin{aligned} \|\phi \Delta \mathbb{P} \vec{u}_\alpha\|_{L^2 H^{-2}} &\leq \|\mathbb{P} \vec{u}_\alpha\|_{L^2((0, T) \times K)} \\ &\leq C(w, \phi) \|\mathbb{P} \vec{u}_\alpha\|_{L^2((0, T), L^2(wdx))} \leq C'_T \|\vec{u}_\alpha\|_{L^\infty((0, T) L^2(wdx))}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Pour les deuxième et troisième termes, nous n'avons que des contrôles uniformes dans $L^2 L^1(wdx)$, insuffisants pour conclure directement (le projecteur de Leray est "seulement" continu de $L^p(wdx)$ dans lui-même pour $1 < p < \infty$). Nous devons donc estimer $\phi \mathbb{P}(\vec{f} w^{-\frac{1}{2}})$ avec $\vec{f} \in (L^2 L^1)^3$: pour ce faire, nous décomposons $\phi \mathbb{P}(\vec{f} w^{-1}) = \phi \mathbb{P}(\tilde{\phi} \vec{f} w^{-1}) + \phi \mathbb{P}((1 - \tilde{\phi}) \vec{f} w^{-1})$ où $\tilde{\phi}$ vaut 1 sur un voisinage de $Supp \phi$. La partie locale est contrôlée car $\tilde{\phi} \vec{f} w^{-1} \in (L^2 L^1)^3$ d'où une borne uniforme dans $(L^2 H^{-s})^3$ ($s > \frac{3}{2}$) et, par continuité du projecteur de Leray dans $(H^s)^3$ (pour tout s réel), on obtient bien une borne uniforme de $\phi \mathbb{P}(\tilde{\phi} \vec{f} w^{-1})$ dans $(L^2 H^{-2})^3$.

Pour la partie non locale, on remarque que, pour $x \in Supp \phi$ on a (pour chaque composante, encore notée f)

$$\int_{|x-y| \geq 1} \frac{f(y)}{|x-y|^3} (1 + |x|^2)^{\frac{\lambda}{2}} dy \leq C(\phi) \int_{|x-y| \geq 1} \frac{f(y)}{|x-y|^{3-\lambda}} dy.$$

5.3. PASSAGE À LA LIMITE

Comme $\lambda \in (1; 2)$, nous avons une convolution de deux fonctions L^1 . Donc $\phi\mathbb{P}((1 - \tilde{\phi})fw^{-1})$ est contrôlé dans $(L^2L^1)^3$ d'où un contrôle dans $(L^2H^{-2})^3$. Par ailleurs, le terme $\alpha\phi\mathbb{P}(|\vec{u}_\alpha|^2\vec{u}_\alpha)$ est contrôlé en $\alpha^{\frac{1}{2}}$.

Nous avons donc le contrôle souhaité, ce qui implique un contrôle uniforme en η et α (pour $\alpha < 1$) de $\phi\mathbb{P}\vec{u}_\alpha$ dans $(H^a(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3))^3$ pour un petit $a > 0$.

Nous pouvons maintenant conclure : d'une part, $\phi(Id - \mathbb{P})\vec{u}_{\alpha_k} \rightarrow 0$ fortement dans $(L^2_{loc}(t, x))^3$ et d'autre part (à une extraction près), il existe une sous-suite (toujours notée \vec{u}_{α_k}) telle que $\mathbb{P}\vec{u}_{\alpha_k}$ converge fortement dans $(L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))_{loc}^3$, nécessairement vers \vec{u} (vu que \vec{u}_α converge faiblement vers \vec{u} dans $(L^2L^2(wdx))^3$ et par unicité de la limite dans \mathcal{D}'), d'où le résultat avancé.

De plus, nous avons $\vec{u} = \mathbb{P}\vec{u}$ (par continuité de \mathbb{P} dans $(L^2L^2(wdx))^3$ et convergence faible de \vec{u}_{α_k} vers \vec{u} dans cet espace.) \square

Une fois la convergence forte montrée, nous pouvons énoncer le théorème de convergence.

Théorème 5.3.3. *(convergence vers les équations de Navier-Stokes)*

Soit $\vec{u}_0 \in (\dot{M}^{2,3})^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $0 < \eta < 4\alpha$. Il existe une suite $\alpha_k \rightarrow 0$ telle que la solution $(\vec{u}_{\alpha_k}, p_{\alpha_k})$ des équations modifiées de Vishik et Fursikov converge au sens des distributions vers une solution (\vec{u}, p) globale des équations de Navier-Stokes vérifiant :

- 1) \vec{u} est localement en temps et en espace $(L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3))^3 \cap (L^2((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^3)))^3$
- 2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
- 3) $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p$ dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$
- 4) $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$.
- 5) Plus précisément, \vec{u} est localement $(L^3L^3)^3$ et la pression p est localement $L^{\frac{3}{2}}L^{\frac{3}{2}}$.

Démonstration. 1) et 5) Nous avons déjà vu que $\vec{u} \in \bigcap_{0 < t < \infty} (L_t^\infty L_x^2(w \, dx))^3$ et $\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in \bigcap_{0 < t < \infty} (L^2(w \, dxdt))^{3 \times 3}$; comme $w^{-\frac{1}{2}}$ est dans L_{loc}^∞ , nous avons la régularité souhaitée sur \vec{u} (la solution est aussi localement $(L^3L^3)^3$ car elle est localement $(L^6L^2)^3$ et $(L^2L^6)^3$ par les inégalités de Sobolev).

De plus, la pression approchée est contrôlée dans $L^{\frac{3}{2}}L^{\frac{3}{2}}(w_1 dx)$, donc (à une sous-suite près), converge faiblement vers une fonction $p \in L^{\frac{3}{2}}L^{\frac{3}{2}}(w_1 dx)$ (dual de l'espace de Banach séparable $L^{\frac{3}{2}}L^{\frac{3}{2}}(w_1^{-1} dx)$). Ainsi, p est localement $L^{\frac{3}{2}}L^{\frac{3}{2}}$.

2) Nous allons montrer que pour tout $T > 0$, $\vec{\nabla} \vec{u} = 0$ sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$. Soit $T > 0$. Comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ converge faiblement vers $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ dans $L^2((0, T), L^2(wdx))$, par passage à la

limite faible, on a :

$$\|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{L^2(0,T)L^2(wdx)} \leq \liminf \alpha \rightarrow 0 \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha\|_{L^2(0,T)L^2(wdx)} \rightarrow 0, \quad (5.44)$$

car $\|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha\|_{L^2(0,T)L^2(wdx)} \leq C_T \sqrt{\eta}$, d'où le résultat souhaité.

3) Soit $\rho \in \mathcal{D}((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$. On sait déjà qu'il existe une suite $(\alpha_k)_k$ telle que $\langle \vec{u}_{\alpha_k}, \partial_t \rho + \Delta \rho \rangle \rightarrow \langle \vec{u}, \partial_t \rho + \Delta \rho \rangle$ ainsi que $\langle p_{\alpha_k}, \vec{\nabla} \rho \rangle \rightarrow \langle p, \vec{\nabla} \rho \rangle$. Le produit se majore grâce à la convergence forte : de \vec{u}_{α_k} , on peut extraire une sous-suite (toujours notée de la même façon) qui converge fortement vers \vec{u} sur le support de ϕ dans $L^2 L^2$: contre la convergence faible de $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}$ sur ce même support, le produit converge faiblement.

Donc $\langle (\vec{u}_{\alpha_k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\alpha_k}, \rho \rangle \rightarrow \langle (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}, \rho \rangle$.

La régularité de \vec{u} et le fait qu'il soit à divergence nulle permettent d'écrire que $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})$. Il reste à traiter la convergence de $\alpha \langle |\vec{u}_{\alpha_k}|^2 \vec{u}_{\alpha_k}, \rho \rangle$:

sur le support de ρ , \vec{u}_{α_k} converge fortement vers \vec{u} dans $(L^2 L^2)^3$ donc converge fortement dans $(L^6 L^2)^3$ (elle est localement $(L^\infty L^2)^3$, de par le fait que $\vec{u}_{\alpha_k} \in (L^\infty((0, T), L^2(wdx)))^3$ pour tout $T > 0$). Comme \vec{u}_{α_k} est dans $(L^2 L^6)^3$ sur ce même support alors elle converge fortement localement vers \vec{u} dans $(L^3 L^3)^3$. Donc $\alpha \langle |\vec{u}_{\alpha_k}|^2 \vec{u}_{\alpha_k}, \rho \rangle \rightarrow 0$.

4) Pour montrer que $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$, nous procédons exactement comme nous l'avons déjà fait dans L^2_{uloc} . Soit $T > 0$ et B une boule de \mathbb{R}^3 . Étant donné que $\vec{u}_\alpha(0, \cdot) = \vec{u}_0$ et que \vec{u}_α est uniformément borné (en α et η) dans $(L^2((0, T) \times B))^3$, il suffit de montrer que $\partial_t \vec{u}_\alpha$ l'est dans $(L^{\frac{3}{2}}(0, T), H^{-2}(B))^3$.

Nous partons de $\partial_t \vec{u}_\alpha = \Delta \vec{u}_\alpha - (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha - \alpha |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha + \vec{\nabla} p_\alpha$.

Nous avons $\Delta \vec{u}_\alpha \in (L^2((0, T), H^{-2}(B)))^3$.

Les termes $(\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha$ et $\alpha |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha$ se traitent de la même façon, vu qu'ils sont tous deux $(L^2((0, T), L^1(wdx)))^3$ donc $\sqrt{w} (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha \in (L^2((0, T), H^{-s}))^3$ ($s > \frac{3}{2}$). Ainsi $(\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha \in (L^2((0, T), H^{-2}(B)))^3$, tout comme $\alpha |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha$. Il reste à étudier $\vec{\nabla} p_\alpha$:

Nous savons que $w_1^{\frac{2}{3}} p_\alpha \in L^{\frac{3}{2}} L^{\frac{3}{2}} \subset L^{\frac{3}{2}} H^{-\frac{1}{2}}$. Donc $w_1^{\frac{2}{3}} p_\alpha \in (L^{\frac{3}{2}}((0, T), H^{-1}(B)))^3$, donc $\vec{\nabla} p_\alpha \in (L^{\frac{3}{2}}((0, T), H^{-2}(B)))^3$.

On peut maintenant conclure : par convergence faible, la limite $\partial_t \vec{u} \in (L^{\frac{3}{2}}((0, T), H^{-2}(B)))^3$, donc $\vec{u} \in \mathcal{C}(H_{loc}^{-2})^3$ et $\vec{u}(0, \cdot)$ existe.

On fixe $a \in \mathcal{D}([0, T])$ telle que $a(0) = 1$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. On écrit

$$\int_0^T \langle \vec{u}_\alpha(t), \rho \rangle \partial_t a(t) dt = - \langle \vec{u}_\alpha(0), \rho \rangle - \int_0^T \langle \partial_t \vec{u}_\alpha(t), \rho \rangle a(t) dt. \quad (5.45)$$

On fait tendre α vers 0. Les passages à la limite (à une sous-suite près) sont licites grâce aux contrôles uniformes obtenus. Nous obtenons :

$$\int_0^T \langle \vec{u}(t), \rho \rangle \partial_t a(t) dt = - \langle \vec{u}_0, \rho \rangle - \int_0^T \langle \partial_t \vec{u}(t), \rho \rangle a(t) dt \quad (5.46)$$

soit $\langle \vec{u}(0, \cdot), \rho \rangle = \langle \vec{u}_0, \rho \rangle$. \square

Afin de vérifier que la solution construite est adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, il reste à montrer que celle-ci vérifie l'inégalité locale de Scheffer. Ceci est l'objet du dernier paragraphe de cette partie.

5.3.3 Solutions adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg

Comme dans le cas L^2 , nous avons désormais tous les outils pour vérifier l'inégalité d'énergie locale (autrement appelée égalité d'énergie de Scheffer).

Théorème 5.3.4. *Il existe une mesure μ positive et localement finie telle que*

$$\partial_t |\vec{u}|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 = \Delta |\vec{u}|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\vec{\nabla} \cdot p\vec{u} - \mu. \quad (5.47)$$

Démonstration. Nous partons de l'égalité, vraie dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$:

$$\partial_t |\vec{u}_\alpha|^2 + 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\alpha|^2 = \Delta |\vec{u}_\alpha|^2 - \vec{\nabla} \cdot (|\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) |\vec{u}_\alpha|^2 - 2\alpha |\vec{u}_\alpha|^4 - \frac{2}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha|^2 + \vec{\nabla} \cdot (2p_\alpha \vec{u}_\alpha)$$

Elle a bien un sens d'après les contrôles connus sur les intégrales $\rho(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ et $\delta(t)$, qui impliquent que $\vec{u}_\alpha \in (L^\infty L^2)_{loc}^3 \cap (L^2 L^6)_{loc}^3 \cap (L^4 L^4)_{loc}^3$ et $p_\alpha \in (L^{\frac{3}{2}} L^{\frac{3}{2}})_{loc}$

Faisons tendre $\alpha \rightarrow 0$.

a) Pour le passage à la limite, nous partons de la suite $(\alpha_k)_k$ qui converge vers 0 telle que \vec{u}_{α_k} converge fortement vers \vec{u} dans $(L^2 L^2)_{loc}^3$, avec des bornes uniformes dans $(L^\infty L^2)_{loc}^3 \cap (L^2 H^1)_{loc}^3$ (donc convergence forte dans $(L^3 L^3)_{loc}$) et telle que p_{α_k} converge faiblement vers $p \in (L^{\frac{3}{2}} L^{\frac{3}{2}})_{loc}$. On a alors les convergences suivantes dans $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$: $|\vec{u}_{\alpha_k}|^2 \rightarrow |\vec{u}|^2$, $|\vec{u}_{\alpha_k}|^2 \vec{u}_{\alpha_k} \rightarrow |\vec{u}|^2 \vec{u}$ et $p_{\alpha_k} \vec{u}_{\alpha_k} \rightarrow p\vec{u}$ (comme produit d'une convergence forte dans $(L^3 L^3)_{loc}$ par une convergence faible dans son dual).

b) Sous la contrainte $\eta < 4\alpha$, la somme $-(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}) |\vec{u}_{\alpha_k}|^2 + 2\alpha_k |\vec{u}_{\alpha_k}|^4 + \frac{2}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}|^2$ est positive. De plus, elle peut être contrôlée par la somme de deux distributions positives $\alpha |\vec{u}_{\alpha_k}|^4 + \frac{1}{\eta} |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}|^2$.

Celles-ci sont uniformément contrôlées dans $(L^1 L^1)_{loc}$ contenu dans l'espace des mesures localement finies (dual de \mathcal{C}_0 , espace de Banach séparable). A une sous-suite près, la somme $-(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k})|\vec{u}_{\alpha_k}|^2 + 2\alpha_k|\vec{u}_{\alpha_k}|^4 + \frac{2}{\eta}|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha_k}|^2$ converge donc (par application du théorème de Banach-Alaoglü) vers une mesure μ' positive localement finie.

c) Comme toutes les distributions convergent, il en va de même pour la dernière $|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha_k}|^2$ dans \mathcal{D}' .

La même démonstration que dans le cas L^2 montre qu'elle converge au sens des distributions vers $|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 + \mu$ où μ est une mesure positive localement finie.

Bilan : Soit $\phi \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3)$ telle que $\phi \geq 0$. Nous avons donc montré que

$$\begin{aligned} 2 \int \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi \, dt \, dx &\leq \int \int |\vec{u}|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) \, dt \, dx \\ &\quad + \int \int (|\vec{u}|^2 + 2p)(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \phi \, dt \, dx \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve : ces solutions, vérifiant l'égalité d'énergie de Scheffer, sont adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. \square

5.4 Quelques résultats sur les équations de Navier-Stokes

Nous terminons ce chapitre par quelques remarques sur les solutions de Navier-Stokes lorsque la donnée initiale est dans $\dot{M}^{2,3}$.

5.4.1 Donnée initiale petite

Lorsque la donnée initiale est petite (et à divergence nulle), nous savons qu'il est possible de construire des solutions auto-similaires (via le formalisme des solutions "mild" - les estimations sont données dans le chapitre 2) mais aussi de construire des solutions faibles globales adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg (grâce à l'approximation de Leray) telles que

$$\sup_{R>0, x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \frac{1}{R + \sqrt{\frac{t}{T_0}}} \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}(t, x)|^2 \, dx \leq C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2 \quad (5.48)$$

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \sqrt{\frac{T_0}{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{\frac{t}{T_0}}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 \, dx ds < C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2. \quad (5.49)$$

5.4. EQUATIONS DE NAVIER STOKES

où $T_0 = \frac{1}{C_0^4 \max(1, \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)}$ et C_0 une constante indépendante de \vec{u}_0 .

Ces estimations ont un intérêt certain car fournissent une "classe d'unicité" pour les équations de Navier-Stokes, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 5.4.1. *Soit $\vec{u}_0 \in (\dot{M}^{2,3}(\mathbb{R}^3))^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. Alors il existe quatre constantes C_0, C_1, C_2 et ϵ_0 indépendantes de \vec{u}_0 telles que si $\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq \epsilon_0$ alors :*

(A) (Existence) *Les équations de Navier-Stokes admettent des solutions adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg définies sur $(0, +\infty)$ et vérifiant les majorations suivantes :*

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0, t > s > 0} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} |\vec{u}(s, x)|^2 dx \leq C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2 \quad (5.50)$$

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 dx ds < C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2. \quad (5.51)$$

(B) (Pression) *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $t > 0$: quitte à modifier la pression p sur $(0, t) \times B(x_0, \sqrt{t})$, elle est contrôlée par*

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, R > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} |p(s, x)|^{\frac{3}{2}} dx ds < C_2 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^3.$$

(C) (Régularité) *La solution \vec{u} précédemment décrite vérifie*

$$\sup_{t > 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\infty} + \sup_{t > 0} \|\vec{u}\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq C_1 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}} \quad (5.52)$$

(D) (Unicité) *Si \vec{u} et \vec{v} sont deux solutions adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg satisfaisant les deux inégalités (5.50) et (5.51) alors $\vec{u} = \vec{v}$.*

(E) (Auto-similarité) *Si \vec{u}_0 est homogène alors \vec{u} est homogène.*

Démonstration.

(A) Lorsque $\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}} < 1$, le temps T_0 ne dépend que de C_0 et peut toujours être majoré par 1 (on peut toujours supposer $C_0 \geq 1$). D'une part, on applique l'inégalité (5.48) à $R = \sqrt{t'}$ où $0 < t < t'$: comme $(1 + \frac{1}{\sqrt{T_0}}) = 1 + C_0^2$, il vient

$$\sup_{R > 0, x_0 \in \mathbb{R}^3, 0 < t < t'} \frac{1}{\sqrt{t'}} \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t'}} |\vec{u}(t, x)|^2 dx \leq C_0(1 + C_0^2) \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2 \quad (5.53)$$

D'autre part, pour $u = \frac{t}{T_0}$ dans l'inégalité (5.49), sachant que $T_0 \leq 1$, la deuxième inégalité souhaitée en découle.

Ainsi, sur $(0, t) \times B(0, \sqrt{t})$, \vec{u} est contrôlé dans $(L^6 L^2)^3 \cap (L^2 L^6)^3$ avec un contrôle en $t^{\frac{5}{2}}$ dans $(L^6 L^2)^3$ et en $t^{\frac{1}{4}}$ dans $(L^2 L^6)^3$: alors il l'est dans $(L^3 L^3)^3$ avec un contrôle en $t^{\frac{1}{3}}$ d'où la majoration suivante

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \int_{|x-x_0| < \sqrt{t}} |\vec{u}(s, x)|^3 dx ds \leq C_2 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^3 \quad (5.54)$$

(B) Nous reprenons la démonstration du lemme 32.2 de [34].

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $t > 0$. Nous pouvons écrire la pression sous la forme $p(t, x) = p_1(t, x) + p_2(t, x)$ en deux parties (locale et non locale) comme suit :

$$p_1(t, x) = R \otimes R.(\phi_{x_0}^2(y)(\vec{u}(t, y) \otimes \vec{u}(t, y)))(x) \quad (5.55)$$

et

$$p_2(t, x) = \int (G(x, y) - G(x_0, y))(1 - \phi_{x_0}^2(y))(\vec{u}(t, y) \otimes \vec{u}(t, y)) \, dy \quad (5.56)$$

où G désigne (de façon compacte) le noyau de l'opérateur de convolution de Calderón-Zygmund (associé à $R \otimes R$) et ϕ_{x_0} une fonction régulière à support compact valant 1 sur $B(x_0, 2\sqrt{t})$ et à support dans $B(x_0, 3\sqrt{t})$ et $x \in B(x_0, \sqrt{t})$.

D'un côté, on effectue un pavage de l'espace en cubes d'arêtes 1 pour estimer $\|p_2\|_\infty$ en fonction de $\|\vec{u}\|_{L_{uloc}^2}$:

$$\|p_2\|_\infty \leq Ct^{-\frac{3}{2}} \|\vec{u}\|_{L_{uloc}^2}^2 \text{ soit } \|p_2\|_{L^{\frac{3}{2}}((0,t) \times B(0, \sqrt{t}))} \leq C't \|\vec{u}\|_{L_{uloc}^2}^2.$$

De l'autre, on utilise la continuité $L^{\frac{3}{2}}$ de l'opérateur associé aux transformées de Riesz et on obtient

$$\begin{aligned} \|p_1\|_{L^{\frac{3}{2}}((0,t) \times B(x_0, \sqrt{t}))} &\leq C \|\phi_{x_0}^2(\vec{u} \otimes \vec{u})\|_{L^{\frac{3}{2}}((0,3t) \times \mathbb{R}^3)} \\ &\leq C't^{\frac{2}{3}} \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2 \text{ d'après (5.54)} \end{aligned}$$

En regroupant les majorations obtenues sur p_1 et p_2 , on a (B).

(C) Lorsque \vec{u}_0 est suffisamment petit, (A) et (B) nous autorisent à utiliser le théorème de Caffarelli, Kohn et Nirenberg : en reprenant ses notations, pour presque tout x tel que $|x - x_0| < \frac{\sqrt{t}}{2}$ et presque tout s vérifiant $\frac{3t}{4} < s < t$, nous savons que : $|\vec{u}(s, x)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{t}} \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$. Donc

$$\sup_{0 < t} \sqrt{t} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_\infty \leq C_1 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}. \quad (5.57)$$

Contrôlons maintenant $\sup_{0 < t} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{M}^{2,3}}$.

D'une part, si $t < R^2$ alors $\frac{1}{R} \int_{|x-x_0| < R} |\vec{u}(t, x)|^2 \, dx \leq C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$.

D'autre part, si $t \geq R^2$ alors l'estimation (5.57) montre que

$$\frac{1}{R} \int_{|x-x_0| < R} |\vec{u}(t, x)|^2 \, dx \leq C_1 \frac{4\pi R^3}{3R^2 t} \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}} \leq C \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}} \quad (5.58)$$

Ceci prouve bien la régularité souhaitée sur \vec{u} .

(D) Soient (\vec{u}, p) et (\vec{v}, q) deux couples ayant même donnée initiale dans $(\dot{M}^{2,3})^3$ et vérifiant les estimations décrites en (A) (donc dans (B) pour la pression). Nous omettons la pression en utilisant le projecteur de Leray et notons

$$B(\vec{f}, \vec{g}) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \otimes \vec{g}) \, ds \quad (5.59)$$

5.4. EQUATIONS DE NAVIER STOKES

De $\vec{f} = \vec{u} - \vec{v}$, avec $\vec{u} = e^{t\Delta}\vec{u}_0 - B(\vec{u}, \vec{u})$ et $\vec{v} = e^{t\Delta}\vec{u}_0 - B(\vec{v}, \vec{v})$.

Alors

$$\vec{f} = -B(\vec{f}, \vec{v}) - B(\vec{u}, \vec{f}). \quad (5.60)$$

Lorsque $T \in (0, \infty)$, nous avons l'estimation L^2_{uloc} suivante ($L^1 * L^2_{uloc} \in L^2_{uloc}$)

$$\sup_{0 < t < T} \|B(\vec{a}, \vec{b})\|_{L^2_{uloc}} + \sup_{0 < t < T} \|B(\vec{a}, \vec{b})\|_{L^2_{uloc}} \leq C_3 \sup_{0 < t < T} \|\vec{a}(t, \cdot)\|_{L^2_{uloc}} \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{b}(t, \cdot)\|_{\infty} \quad (5.61)$$

Ajoutée à

$$\sup_{0 < t} \sqrt{t} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\infty} \leq C_1 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}, \quad (5.62)$$

il vient $\sup_{0 < t < T} \|\vec{f}\|_{L^2_{uloc}} \leq 2C_1 C_3 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}} \sup_{0 < t < T} \|\vec{f}\|_{L^2_{uloc}}$, ce qui assure l'unicité dès lors que $2C_1 C_3 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}} < 1$.

(E) Si \vec{u}_0 est homogène et \vec{u} est une solution des équations de Navier-Stokes vérifiant (A) alors $\lambda\vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x)$ est solution des mêmes équations et vérifie toujours les mêmes estimations décrites en (A) (par le changement de variables habituel). Par l'unicité précédemment décrite, ces deux solutions coïncident. \square

Dans le cas de notre approximation, nous avons vu que si $\vec{u}_{\alpha, \eta}$ désignait la solution des équations modifiées de Vishik et Fursikov alors (voir le paragraphe 1 de ce chapitre)

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0, t > s > 0} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} |\vec{u}(t)|^2 dx \leq C_0(1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2)$$

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 dx ds < C_0(1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2).$$

Comme nous travaillions pour des données initiales grandes, cette majoration suffisait. Bien entendu, nous aurions pu en obtenir de la forme $C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2$ étant donné que l'inéquation différentielle (en temps) vérifiée par la solution L^2_{uloc} était la même que celle obtenue par Lemarié dans [34], chapitre 32 (ici \vec{u} désigne la solution issue du point fixe de Picard) :

$$\begin{aligned} & \|\vec{u}(t)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t)\|_{(L_t^2 L_x^2)_{uloc}}^2 + \alpha \|\vec{u}\|_{(L_t^4 L_x^4)_{uloc}}^4 + \frac{1}{\eta} \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{(L_t^2 L_x^2)_{uloc}}^2 \\ & \leq K_\eta (\|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2 + \int_0^t [\|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 + \|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^6] ds. \end{aligned}$$

Rappelons que pour cela, il suffit de contrôler le terme

$$\|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}}^2 + \frac{\|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^6}{\min(1, \|\vec{u}_0\|_{L^2_{uloc}})}. \quad (5.63)$$

Néanmoins, rien ne nous assure que la solution construite converge vers la solution \vec{u} construite dans le théorème précédent. En effet, nous ne pouvons directement passer à la limite dans le cas L^2_{uloc} . Par contre, dans le cas des approximations de Leray, la solution L^2_{uloc} des approximations de Leray converge vers la limite précédemment décrite : en effet, par passage à la limite faible, celle-ci vérifie automatiquement les inégalités (5.48) et (5.49) et est adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, conditions suffisantes d'unicité lorsque la donnée initiale est petite.

5.4.2 Donnée initiale grande

Nous avons beaucoup moins de résultats connus lorsque la donnée initiale est grande. Nous savons désormais qu' (au moins) deux approximations (de Leray et de Vishik et Fursikov modifié) convergent vers une solution \vec{u} .

Proposition 5.4.2. *Soit $\vec{u}_0 \in (\dot{M}^{2,3}(\mathbb{R}^3))^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. Soit \vec{u} une solution adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg définies sur $(0, +\infty)$ et vérifiant les majorations suivantes*

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, R > 0, t > 0} \frac{1}{R + \sqrt{\frac{t}{T_0}}} \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}(t, x)|^2 dx \leq C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2 \quad (5.64)$$

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0} \sqrt{\frac{T_0}{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{\frac{t}{T_0}}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 dx ds < C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2. \quad (5.65)$$

alors pour tout $T > 0$ et tout compact $K \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \in L^1_t L^\infty_x((0, T) \times K)$.

Démonstration. Nous définissons la fonction $w_K \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ égale à 1 sur $\{x \in \mathbb{R}^3 | d(x, K) \leq 1\}$. Nous souhaitons contrôler, dans $(0, T) \times K$:

$$\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - B(w_K \vec{u}, \vec{u}) - B((1 - w_K) \vec{u}, \vec{u}) \quad (5.66)$$

Nous savons que $|e^{t\Delta} \vec{u}_0| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$ (inégalité vue dans le chapitre 2) De par la définition de w_K et les estimations usuelles L^2_{uloc} (pavage de l'espace en cubes d'arêtes 1), nous avons :

$$|B((1 - w_K) \vec{u}, \vec{u})| \leq C \int_0^t \int_{|x-y| \geq 1} \frac{1}{|x-y|^4} |\vec{u}(s, y)| dy ds \leq C' t \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^2_{uloc}}^2 \quad (5.67)$$

Il reste à contrôler $B(w_K \vec{u}, \vec{u})$: si K_1 désigne le support de w_K , on a $\vec{u} \in (L^2 \dot{H}^1)^3$ sur $(0, T) \times K_1$ donc $\vec{u} \otimes \vec{u} \in (L^1 \dot{B}^{\frac{1}{2}, 1})^{3 \times 3}$ donc $\frac{1}{\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (w_K \vec{u} \otimes \vec{u}) \in (L^1 \dot{B}^{\frac{3}{2}, 1})^3$ sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$.

5.4. EQUATIONS DE NAVIER STOKES

Comme $\dot{B}_2^{\frac{3}{2},1} \subset L^\infty$, il vient

$$\int_0^T \|\vec{u}\|_\infty^2 dt \leq \int_0^T \|\vec{u}\|_{\dot{B}_2^{\frac{3}{2},1}}^2 dt \leq C_K \int_0^T \int_{K_1} |\vec{u}(x,t)|^2 + |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(x,t)|^2 dx dt < \infty \quad (5.68)$$

Ceci termine la preuve. □

Lorsque la donnée initiale est dans E_2^3 (E_2 désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans L_{loc}^2), on peut montrer que, p.p. $t > 0$, $\vec{u}(t, \cdot)$ est dans L^∞ .

De plus, si \vec{u}_0 est homogène (nécessairement $\vec{u}_0 \in E_2$, voir [34]) alors $\vec{u}(1, \cdot)$ est une fonction bornée (cf [36]).

Grujić a de son côté prouvé dans [25] que toute solution auto-similaire adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg vérifiait : $\vec{u}(1, \cdot)$ est bornée sur tout compact de \mathbb{R}^3 .

Chapitre 6

Conclusion

L'étude du modèle modifié de Vishik et Fursikov a fourni des solutions globales aux équations de Navier-Stokes et adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg lorsque la donnée initiale est grande dans $\dot{M}^{2,3}$ (ainsi que dans L^2). Dans les deux cas, pour prouver ces convergences, l'idée a été de contrôler la pression grâce au théorème de régularité maximale du noyau de la chaleur, en utilisant les propriétés relatives aux opérateurs d'intégrale singulière.

6.1 Une approximation adaptée au formalisme des solutions "mild"

Contrairement à l'approximation de Leray, ce modèle est inadapté au formalisme des solutions milds lorsque la donnée initiale est petite dans un espace critique. La présence de la pénalisation $\alpha|\vec{u}|^2\vec{u}$ est un outil essentiel pour établir une égalité d'énergie mais empêche les majorations habituelles via le formalisme des solutions "mild". Une première question est de savoir s'il est possible, en conservant cette expression de la pression, d'adapter cette approximation pour construire des solutions auto-similaires (lorsque la donnée initiale est petite) et qui convergent vers les équations de Navier-Stokes, via le formalisme des solutions "mild".

Si on enlève cette pénalisation et si l'on écrit le terme bilinéaire sous la forme de divergence d'un produit tensoriel (forme généralement utilisée pour l'étude des solutions "mild"), l'approximation devient

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_\eta &= \Delta \vec{u}_\eta - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\eta \otimes \vec{u}_\eta) + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\eta) \\ \vec{u}(0, \cdot) &= \vec{u}_0. \end{cases} \quad (6.1)$$

6.1. APPROXIMATION SOLUTIONS "MILD"

La pression est toujours donnée par $p_\eta = -\frac{1}{\eta}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_\eta$ et $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_\eta \neq 0$.

L'espace de Besov $\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}$ (lorsque $q \in [1,3)$) est adapté à la recherche de solutions auto-similaires (on peut remarquer que $\frac{1}{|x|} \in \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}$ lorsque $q \geq 1$) : en le considérant, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 6.1.1. *Soit $q \in [1,3)$. Il existe une constante C_q telle que, pour tout $\vec{u}_0 \in (\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty})^3$ tel que $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_0 = 0$ et $\|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \leq C_q$ alors :*

(A) (Existence pour les équations de Navier-Stokes) *Les équations de Navier-Stokes ont une unique solution $\vec{u} \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ telle que*

$$\sup_{t>0} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \leq 2\|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \quad (6.2)$$

La pression est donnée par $\vec{\nabla}p = -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j (u_i u_j)$.

(B) (Existence de solutions au modèle approché) *Pour tout $\eta > 0$, les équations (6.1) ont une unique solution $\vec{u}_\eta \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ tel que*

$$\sup_{t>0} \|\vec{u}_\eta(t, \cdot)\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \leq 2\|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \quad (6.3)$$

(C) (Auto-similarité) *Si \vec{u}_0 est homogène alors \vec{u}_η et \vec{u} sont auto-similaires.*

(D) (Convergence) *Lorsque $\eta \rightarrow 0$, le couple solution (\vec{u}_η, p_η) des équations (6.1) converge vers le couple (\vec{u}, p) solution des équations de Navier-Stokes.*

Démonstration. Pour prouver (A), (B) (et donc (C)) l'idée est de contrôler les termes (en particulier la pression) grâce à l'opérateur A du théorème de régularité maximale du noyau de la chaleur : dans le principe, c'est exactement ce qui a été fait pour montrer la convergence de la pression dans les cas L^2 et $\dot{M}^{2,3}$. On rappelle que $Af = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta f(s, \cdot) ds$. Le couple (\vec{u}, p) est solution des équations de Navier-Stokes avec $\vec{u} \in (\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty})^3$ et $p \in \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2,\infty}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \vec{u} &= e^{t\Delta}\vec{u}_0 - A(\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\cdot(\vec{u} \otimes \vec{u})) - A(\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}p) \\ p &= -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}\cdot(\vec{u} \otimes \vec{u}). \end{cases} \quad (6.4)$$

Nous souhaitons appliquer l'algorithme du point fixe à l'opérateur bilinéaire

$$C(\vec{u}, \vec{v}) = A(\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\cdot(\vec{u} \otimes \vec{v})) - A(\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}(\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}\cdot(\vec{u} \otimes \vec{v}))). \quad (6.5)$$

Pour ce faire, nous utilisons les estimations suivantes, dûes au paraproduit de Bony et aux inégalités de Bernstein (on pourra se référer à [13] ou [34])

$$\|fg\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2,\infty}} \leq C_q \|f\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \quad (6.6)$$

CHAPITRE 6. CONCLUSION

$$\left\| \frac{1}{\Delta} \partial_i f \right\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}} \leq C_q \|f\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}} \quad (6.7)$$

$$\left\| \frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j f \right\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}} \leq C_q \|f\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}} \quad (6.8)$$

$$\|Af\|_{L_t^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}} \leq C_q \|f\|_{L_t^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}} \quad (6.9)$$

et

$$\|Af\|_{L_t^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}} \leq C_q \|f\|_{L_t^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}} \quad (6.10)$$

Si \vec{u}_0 est petit en norme $(\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty})^3$ alors nous pouvons trouver une solution \vec{u} satisfaisant $\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - C(\vec{u}, \vec{u})$ et vérifiant (A).

Pour (B), on procède de la même façon : le couple (\vec{u}_η, p_η) est solution de (6.1) si et seulement si

$$\begin{cases} \vec{u}_\eta &= e^{t\Delta} \vec{u}_0 - A\left(\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\eta \otimes \vec{u}_\eta)\right) - A\left(\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} p_\eta\right) \\ p_\eta(t) &= \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{(t-s)(1+\frac{1}{\eta})\Delta} \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\eta \otimes \vec{u}_\eta) \, ds. \end{cases} \quad (6.11)$$

Nous rappelons que la deuxième formulation est obtenue en prenant la divergence de \vec{u}_η dans la première équation (sachant que $p_0 = 0$) :

$$\partial_t p_\eta = \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \Delta p_\eta + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_\eta \otimes \vec{u}_\eta). \quad (6.12)$$

Pour faire apparaître l'opérateur A dans l'expression de p_η , introduisons l'opérateur $(\tau_\lambda f)(t, x) = f(\tau t, x)$. Par le changement de variable $\sigma = s(1 + \frac{1}{\eta})$, on obtient

$$p_\eta = \frac{1}{1 + \eta} \tau_{1+\frac{1}{\eta}} A\left(\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} \cdot (\tau_{1+\frac{1}{\eta}}^{-1} \vec{u}_\eta \otimes \tau_{1+\frac{1}{\eta}}^{-1} \vec{u}_\eta)\right) \quad (6.13)$$

Nous pouvons conclure : les estimations précédentes ajoutées à

$$\|\tau_\lambda f\|_{L_t^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}} = \|f\|_{L_t^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}} \quad (6.14)$$

et

$$\|\tau_\lambda f\|_{L_t^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}} = \|f\|_{L_t^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}} \quad (6.15)$$

induisent (B) et donc (C).

Montrons (D). De par (B), \vec{u}_η est uniformément borné dans $(L^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty})^3$ tout comme p_η dans $L_t^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}$ alors ils (chaque composante scalaire) appartiennent à un ensemble relativement compact de $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$.

Pour montrer la convergence, il suffit de prouver que si (\vec{v}, q) est une limite d'une certaine suite $(\vec{u}_{\eta_k}, p_{\eta_k})$ alors $\vec{v} = \vec{u}$ et $q = p$. De par l'unicité obtenue en (A), il suffit même de prouver que (\vec{v}, q) est solution des équations de Navier-Stokes. Cela se fait comme dans les

cas L^2 et $\dot{M}^{2,3}$: les passages à la limite de $\partial_t \vec{u}_{\eta_k}$ et $\Delta \vec{u}_{\eta_k}$ ne posent pas de problème. Pour le terme bilinéaire, nous avons besoin d'une convergence forte : comme \vec{u}_η est borné dans $(L^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty})^3$ et $\partial_t \vec{u}_\eta$ l'est dans $(L^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-3, \infty})^3$, il existe $\alpha < 0 < \beta$ tels que $\vec{u}_\eta \in (L^2 \dot{H}^\beta)^3$ et $\partial_t \vec{u}_\eta \in (L^2 H^\alpha)^3$ ce qui assure la convergence forte dans $L^2_{t,x}(K)$ pour tout compact K . Ainsi \vec{v} vérifie $\partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v}) - \vec{\nabla} q$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ puisque $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \lim_{\eta_k \rightarrow 0} \eta_k p_{\eta_k} = 0$ (p_η est uniformément borné dans $L^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-2, \infty}$) et est petite en norme $(L^\infty \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty})^3$; comme \vec{v} est alors régulière pour tout $t > 0$, on a donc $\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$. \square

6.2 Perspectives

Suite à ces travaux, trois axes de recherche paraissent envisageables :

- 1) La méthode de construction de solutions globales, proposée dans le premier paragraphe du chapitre 5 (lorsque la donnée initiale est dans un espace adapté à la recherche des solutions auto-similaires, par exemple $(\dot{M}^{2,3})^3$) permet d'envisager d'autres modèles approchant les équations de Navier-Stokes préservant le changement d'échelle et une égalité d'énergie : enlever la condition liant α et η pourrait peut-être s'avérer intéressant dans l'idée de les faire tendre indépendamment vers 0.
- 2) Lorsque la donnée initiale est dans $(\dot{M}^{2,3})^3$, considérons l'ensemble suivant :

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \in (L^\infty L^2)((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)_{loc} \cap (L^2 H^1)((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)_{loc}; \\ \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p; \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0; \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0; \\ \sup_{R>0, x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \frac{1}{R + \sqrt{\frac{t}{T_0}}} \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}(t, x)|^2 dx \leq C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2; \\ \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \sqrt{\frac{T_0}{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{\frac{t}{T_0}}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 dx ds < C_0 \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2; \\ \vec{u} \text{ est adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg} \end{array} \right\}.$$

(où $T_0 = T(\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}})$ et C_0 une constante indépendante de \vec{u}_0).

C'est un compact (puisque nous avons toutes les majorations pour appliquer le passage à la limite faible et le lemme de Fatou nous assure la préservation des inégalités d'énergie) réduit à un point lorsque la donnée initiale est petite (c'est une conséquence du théorème (5.4.1)) : ceci nous donne donc une "classe d'unicité" plus large que celle obtenue par le formalisme des solutions "mild". Le modèle scalaire (étudié dans le chapitre 2) répond-il à cette classe d'unicité? Nous avons déjà construit une solution globale vérifiant une inégalité d'énergie (de type Scheffer). La question devient donc : existe-t-il un critère de

CHAPITRE 6. CONCLUSION

Caffarelli, Kohn et Nirenberg associé à cette équation ?

3) Pour chercher à construire des solutions auto-similaires lorsque la donnée initiale est grande dans $(\dot{M}^{2,3})^3$, il semble difficile de travailler directement sur le compact Σ . En effet, l'auto-similarité étant intimement liée à l'unicité, l'étude directe des équations de Navier-Stokes fournit peu d'indications car nous n'avons même pas d'égalité d'énergie. En travaillant à l'étage supérieur (celui correspondant aux solutions des équations d'une approximation), les chances de conclure semblent plus grandes. Prenons l'exemple des équations modifiées de Vishik et Fursikov et regardons l'ensemble compact :

$$\Sigma_{\alpha,\eta} = \left\{ \begin{aligned} &\vec{u}_{\alpha,\eta} \in (L^\infty L^2)((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)_{loc} \cap (L^2 H^1)_{loc} \cap (L^4 L^4)_{loc}; \\ &\partial_t \vec{u}_{\alpha,\eta} = \Delta \vec{u}_{\alpha,\eta} - (\vec{u}_{\alpha,\eta} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\alpha,\eta} - \alpha |\vec{u}_{\alpha,\eta}|^2 \vec{u}_{\alpha,\eta} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\alpha,\eta}); \\ &\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0; \\ &\sup_{R>0, x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \frac{1}{R + \sqrt{\frac{t}{T_0, \eta}}} \int_{|x-x_0| \leq R} |\vec{u}(t, x)|^2 dx \leq C_0 (1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2); \\ &\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t>0} \sqrt{\frac{T_0, \eta}{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{\frac{t}{T_0, \eta}}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 dx ds < C_0 (1 + \|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}^2) \end{aligned} \right\}.$$

où $T_0 = T(\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}, \eta)$ et C_0 une constante indépendante de \vec{u}_0 .

Si nous trouvons des solutions auto-similaires à cet étage (pour toutes valeurs de $\alpha > 0$ et $\eta > 0$) alors, par passage à la limite faible (il y a convergence faible dans $L^\infty L^2(wdx)$), nous aurions aussi des solutions auto-similaires aux équations de Navier-Stokes. A ce stade, la régularité connue sur $\vec{u}_{\alpha,\eta}$ permet l'obtention d'une égalité d'énergie (et d'un résultat partiel d'unicité) et nous affranchit des opérateurs d'intégrale singulière : en effet, le théorème de régularité maximale du noyau de la chaleur n'est utile que lors du passage à la limite de la pression, principale difficulté pour faire converger le modèle. Il faudrait donc trouver une idée dissociant la recherche de l'unicité à celle des solutions auto-similaires et fournissant des indications topologiques nouvelles concernant ce compact $\Sigma_{\alpha,\eta}$: il ne reste plus qu'à la trouver...l'étude de fonctionnelles pouvant être un axe de recherche.

6.2. PERSPECTIVES

Annexe A

Commutateur de Calderón - Continuité du projecteur de Leray

A.1 Commutateur de Calderón

Nous souhaitons montrer dans ce paragraphe que si ϕ désigne une fonction-test alors le commutateur $[\phi, \Lambda]$ est un opérateur de Calderón-Zygmund, donc continu de L^p dans L^p . Nous rappelons que ces commutateurs ont permis d'estimer a priori la vitesse lorsque la donnée initiale est L^2_{uloc} dans l'équation scalaire étudiée dans le chapitre 2 : cet outil permet de gagner une dérivée dans les estimations. Rappelons, à cet effet, certaines définitions qui seront utiles dans ce paragraphe et l'annexe B.

Définition A.1.1. *Un opérateur d'intégrale singulière de classe ϵ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ pour lequel il existe un noyau K défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - D$ (où D désigne la diagonale $\{x = y\}$) vérifiant :*

i) Pour tous f et g dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tels que $\text{Supp}f \cap \text{Supp}g$ alors

$$\langle Tf, g \rangle = \int \int K(x, y) f(y) \bar{g}(x) \, dy \, dx$$

ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n} \text{ pour } x \neq y \tag{A.1}$$

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq \frac{C|x - x'|^\epsilon}{|x - y|^{n+\epsilon}} \text{ pour } |x - x'| \leq \frac{|x - y|}{2} \tag{A.2}$$

$$|K(x, y) - K(x, y')| \leq \frac{C|y - y'|^\epsilon}{|x - y|^{n+\epsilon}} \text{ pour } |y - y'| \leq \frac{|x - y|}{2} \tag{A.3}$$

A.1. COMMUTATEUR DE CALDERÓN

On dit que K est un noyau de convolution lorsque $K(x, y) = K(x - y)$.

Un opérateur de Calderón-Zygmund est un opérateur d'intégrale singulière borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lorsque $f \in L^2$ et à support compact alors un opérateur T de Calderón-Zygmund peut s'écrire sous la forme $Tf(x) = \int K(x - y)f(y) dy$ pour presque tout x en dehors du support de f .

Deux exemples usuels (et fréquemment utilisés dans ce mémoire) de tels opérateurs sont celui de Riesz et du projecteur de Leray. Un résultat essentiel est que tout opérateur de Calderón-Zygmund est continu de L^p dans L^p pour $1 < p < \infty$ et de L^∞ dans BMO .

Rappelons le théorème de David et Journé, qui permet de prouver qu'un opérateur d'intégrale singulière est de Calderón-Zygmund sans devoir montrer qu'il est borné dans L^2 . Introduisons les espaces faiblement continus.

Définition A.1.2. *Un opérateur linéaire T de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est dit faiblement continu s'il existe une constante $C > 0$ et un entier N tels que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pour $R > 0$ et toutes fonctions f et g dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B(0; 1)$ on ait :*

$$| \langle T(f_{x_0,R}) | g_{x_0,R} \rangle | \leq C \left(\sum_{|\alpha| \leq N} R^{|\alpha|} \| \partial^\alpha f_{x_0,R} \|_2 \right) \left(\sum_{|\alpha| \leq N} R^{|\alpha|} \| \partial^\alpha g_{x_0,R} \|_2 \right) \quad (\text{A.4})$$

avec $f_{x_0,R} = f(R^{-1}(x - x_0))$ et $g_{x_0,R} = g(R^{-1}(x - x_0))$.

Définition A.1.3. *Soit T un opérateur d'intégrale singulière. On définit $T(1) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}$ par*

$$\langle T(1), \psi \rangle = \lim_{R \rightarrow +\infty} \langle T(\phi(\frac{x}{R})) | \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \int \psi(x) dx = 0. \quad (\text{A.5})$$

où ϕ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ arbitraire égale à 1 au voisinage de 0.

Le théorème de David et Journé [20] nous dit alors que :

Théorème A.1.4. *Soit T un opérateur d'intégrale singulière. T est borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si T est faiblement borné et $T(1), T^*(1)$ appartiennent l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$.*

Nous allons utiliser ce théorème pour prouver que le commutateur de Calderón $[\lambda, \phi]$ (avec $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) est un opérateur de Calderón-Zygmund.

A cet effet, rappelons que :

Lemme A.1.5. *Lorsque $0 < \beta < 2$, $\Lambda^\beta u = c_\beta v.p. \int \frac{u(x-y) - u(x)}{|y|^{n+\beta}} dx$ pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

ANNEXE A. COMMUTATEUR ET PROJECTEUR

Remarque : La valeur principale est inutile lorsque $0 < \beta < 1$. En effet, pour $|y| \leq 1$, on a $\frac{|u(x-y)-u(y)|}{|y|^{n+\beta}} \leq \frac{\|\vec{\nabla}u\|_\infty}{|y|^{n-1+\beta}}$ alors que pour $|y| \geq 1$, on a $\frac{|u(x-y)-u(y)|}{|y|^{n+\beta}} \leq \frac{2\|u\|_\infty}{|y|^{n+\beta}}$.

Lorsque $1 \leq \beta < 2$, le terme à l'infini ne pose pas de problème (car est intégrable) mais près de l'origine, pour $\epsilon \leq |x-y| \leq 1$, on a :

$$\frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+\beta}} = \frac{\vec{\nabla}u(x) \cdot (x-y)}{|x-y|^{n+\beta}} + O\left(\frac{1}{|x-y|^{n+\beta-2}}\right).$$

Comme $\int_{\epsilon \leq |x-y| \leq 1} \frac{\vec{\nabla}u(x) \cdot (x-y)}{|x-y|^{n+\beta}} dy = 0$, l'intégrale converge à l'origine dès lors que $\beta < 2$.

Démonstration. On définit la distribution $\langle T, u \rangle = v.p. \int \frac{u(x)-u(0)}{|x|^{n+\beta}} dx$. Comme $T*u = \langle T, u(\cdot - x) \rangle$, la question posée devient : a-t-on $\widehat{T} = c_\beta \widehat{|\xi|^\beta}$ au sens des distributions ? On vérifie (par changement de variable) que $\lambda^{-n} \langle T(\frac{x}{\lambda}), u \rangle = \lambda^\beta \langle T, \phi \rangle$ et que pour toute rotation $R \langle T, u(Rx) \rangle = \langle T, u \rangle$. Autrement dit, T est radiale et homogène de degré $(n + \beta)$. Par passage en Fourier, \widehat{T} est homogène de degré β donc $\widehat{T} \widehat{|\xi|^{-\beta}}$ est constante dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on a alors $\widehat{T} = C_\beta \widehat{|\xi|^{-\beta}} + R$ avec R radiale et homogène de degré $\beta > 0$. Comme R est à support dans $\{0\}$, c'est une somme (de dérivées) de masses de Dirac de degré $\beta > 0$, donc R est nulle. On a bien l'expression voulue. \square

Passons maintenant au résultat de cette partie :

Théorème A.1.6. *Le commutateur de Calderón $T = [\Lambda, \phi]$ (où $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) est un opérateur de Calderón-Zygmund et donc borné de L^p dans L^p pour $1 < p < \infty$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, un calcul direct montre que, lorsque $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (à valeurs réelles) alors le noyau de l'opérateur T est donné par (en dehors de la diagonale $\{x = y\}$)

$$\langle T(f), g \rangle = C \int \int \frac{f(y)(\phi(y) - \phi(x))}{|y-x|^{n+1}} g(x) dx dy$$

Le noyau de T est donc donné (en dehors de la diagonale) par la fonction $K(x, y) = C \frac{\phi(y) - \phi(x)}{|y-x|^{n+1}}$. Sachant que $\vec{\nabla}\phi$ est borné, c'est un opérateur d'intégrale singulière. Appliquons le théorème de David et Journé.

T est faiblement continu : en remarquant que $[\Lambda, \phi] = [\Lambda, \phi - \phi(x_0)]$ et en reprenant les notations de la définition (A.1.2), on a :

$$|\langle T(f_{x_0,R}) | g_{x_0,R} \rangle| \leq C \|\vec{\nabla}\phi\|_\infty R \|\vec{\nabla}(f_{x_0,R})\|_2 \|\vec{\nabla}(g_{x_0,R})\|_2$$

les transformées de Riesz étant continues de L^2 dans L^2 . D'autre part $T(1) = -T^*(1)$: si nous montrons que $T^*(1) = \sum_{i=1}^n R_i \partial_i \phi$ alors $T^*(1) \in BMO$ vu que les transformées

A.2. ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ DU PROJECTEUR DE LERAY

de Riesz envoient L^∞ dans BMO .

Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\int u \, dx = 0$: on écrit

$$[\Lambda, \phi]u = \sum_{i=1}^{i=n} \partial_i R_i(\phi u) - \sum_{i=1}^n \partial_i(\phi R_i u) + \sum_{i=1}^n (\partial_i \phi) R_i(u).$$

L'intérêt de cette décomposition est d'annuler par passage à la limite tous les termes ayant une dérivée. En effet, pour une fonction test ρ , lorsque p est un entier tel que $1 < p < \infty$ et q désigne son conjugué, on a successivement :

$$| \langle \rho(\frac{x}{R}) | \partial_i R_i(\phi u) \rangle | \leq C \| \phi u \|_p \| \partial_i \rho \|_q R^{-1 + \frac{n}{q}}$$

$$| \langle \rho(\frac{x}{R}) | \partial_i(\phi R_i u) \rangle | \leq C \| \phi \|_\infty \| u \|_p \| \partial_i \rho \|_q R^{-1 + \frac{n}{q}}$$

Pour que ces expressions tendent vers 0, il suffit de prendre $q > n$ soit $p \in]1; \frac{n}{n-1}[$. Nous obtenons donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \langle \rho(\frac{x}{R}) | T(u) \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \langle \rho(\frac{x}{R}) | \sum_{i=1}^n (\partial_i \phi) R_i(u) \rangle$$

ce qui donne l'expression de $T^*(1)$ souhaitée (car $R_i^* = -R_i$ et ϕ est à valeurs réelles). \square

En conséquence, le commutateur de Calderón-Zygmund est continu de L^p dans L^p ($1 < p < \infty$) avec une norme majorée par $\| \vec{\nabla} \phi \|_\infty$.

A.2 Étude de la continuité du projecteur de Leray

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier la continuité du projecteur de Leray dans les espaces étudiés dans cette thèse. Nous nous plaçons dans \mathbb{R}^n (avec $n \geq 2$).

A.2.1 L'espace L^2_{uloc}

Appelons L le noyau de l'opérateur de convolution $(Id - \mathbb{P}) = \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla}$. Nous savons que $L = \vec{\nabla} \otimes \frac{C_n x}{|x|^n} = \frac{C_n}{|x|^{n+2}} (\delta_{i,j} - n x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Nous avons évidemment (tout du moins formellement) :

$$(Id - \mathbb{P}) \vec{f} = (v.p.L) * \vec{f} = (v.p.L(x) \mathbb{1}_{|x| \leq 1}) * \vec{f} + (L(x) \mathbb{1}_{|x| \geq 1}) * \vec{f}.$$

Lemme A.2.1. *L'opérateur de convolution avec le noyau $v.p.L(x) \mathbb{1}_{|x| \leq 1}$ est continu de $(L^2_{uloc})^n$ dans lui-même.*

Démonstration. Comme tout se passe localement (car le noyau est à support compact), nous allons utiliser la continuité de \mathbb{P} sur $(L^2)^n$. Traitons composante par composante

ANNEXE A. COMMUTATEUR ET PROJECTEUR

(par abus de langage, nous noterons toujours L le terme $L_{i,j}$) : Soit $f \in L^2_{uloc}$. On écrit

$$\begin{aligned}
\|f * (v.p.L(x)\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\|_{L^2(B(x_0,1))} &= \|f\mathbb{1}_{B(x_0,2)} * (v.p.L(x)\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\|_{L^2(B(x_0,1))} \\
&\leq \|f\mathbb{1}_{B(x_0,2)} * (v.p.L(x))\|_{L^2} \\
&\quad + \|f\mathbb{1}_{B(x_0,2)} * (v.p.L(x)\mathbb{1}_{|x|\geq 1})\|_{L^2(B(x_0,1))} \\
&\leq \|f\|_{L^2(B(x_0,2))} + \|f\mathbb{1}_{B(x_0,2)} * (v.p.L(x)\mathbb{1}_{|x|\geq 1})\|_{L^\infty(B(x_0,1))} \\
&\leq \|f\|_{L^2(B(x_0,2))} + C \int_{B(x_0,2)} |f(y)| \, dy \\
&\leq C\|f\|_{L^2_{uloc}}
\end{aligned}$$

Nous avons aussi utilisé le fait que le noyau $(v.p.L(x)\mathbb{1}_{|x|\geq 1})$ est borné. \square

Proposition A.2.2. *Le projecteur de Leray n'est pas continu de $(L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n))^n$ dans lui-même, ni même modulo les constantes.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, il reste à montrer que la convolution avec $L(x)\mathbb{1}_{|x|\geq 1}$ n'est pas continue sur $(L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n))^n$. Pour cela, il suffit de travailler sur une composante de L ; considérons par exemple (pour enlever la partie identité)

$$L_{1,2}(x) = \frac{-nC_n x_1 x_2}{|x|^{n+2}}.$$

Notons, lorsque $f \in (L^2_{uloc})^n$, l'opérateur $Tf(x) = \int_{|y|\geq 1} f(x-y) \frac{y_1 y_2}{|y|^{n+2}} \, dy$.

Pour exhiber un contre-exemple, considérons $f_N(x) = \mathbb{1}_{[-N;0]^n}$. On a bien entendu :

$$\|f_N\|_{L^2_{uloc}} = 1.$$

Soit $x \in [1; 2]^n$. On a

$$Tf_N(x) = \int_{y \in x + [0, N]^n} \frac{y_1 y_2}{|y|^{n+2}} \, dy \geq \int_{y \in [2, N]^n} \frac{y_1 y_2}{|y|^{n+2}} \, dy.$$

Posons $N = 2^p$ et décomposons l'intégrale sur une somme de cubes :

$$\begin{aligned}
Tf_N(x) &\geq \sum_{k=1}^{k=p-1} \int_{y \in [2^k, 2^{k+1}]^n} \frac{y_1 y_2}{|y|^{n+2}} \, dy \\
&\geq \sum_{k=1}^{k=p-1} \int_{z \in [1, 2]^n} \frac{z_1 z_2}{|z|^{n+2}} \, dz = (p-1)A.
\end{aligned}$$

par changement de variables $y = 2^k z$, en notant $A > 0$ la valeur de la dernière intégrale.

Ainsi $\|Tf_N\|_{L^2_{uloc}} \geq \|Tf_N\|_{L^2([1; 2]^n)} \geq (p-1)A \geq C \ln N$.

Ceci montre qu'il n'y a pas continuité dans $(L^2_{uloc})^n$. Avec le même exemple, nous pouvons aller un peu plus loin et montrer que la continuité n'est pas assurée si on enlève les constantes.

Lorsque $|x| \rightarrow +\infty$, on a $|Tf_N(x)| \rightarrow 0$. En effet, il suffit d'appliquer le passage à la limite sous l'intégrale (possible car Tf_N est la convolée de deux fonctions $L^2(\mathbb{R}^n)$ puisqu'on intègre en dehors de 0).

A.2. ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ DU PROJECTEUR DE LERAY

Ainsi, lorsque R est suffisamment grand on a $\|Tf_N\|_{L^2([R;R+1]^n)} \leq 1$.

Pour toute constante c , il vient :

$$\begin{aligned} \|Tf_N - c\|_{L^2_{uloc}} &\geq \max(\|Tf_N - c\|_{L^2([1;2]^n)}; \|Tf_N - c\|_{L^2([R;R+1]^n)}) \\ &\geq \frac{1}{2}(\|Tf_N - c\|_{L^2([1;2]^n)} - \|Tf_N - c\|_{L^2([R;R+1]^n)}) \\ &\geq \frac{(p-1)A-1}{2} \end{aligned}$$

Ceci montre aussi que T n'est pas continu de $L^2_{uloc} \rightarrow L^2_{uloc}/\{c^{tes}\}$. □

A.2.2 L'espace à poids $L^p(w)$

Lemme A.2.3. *Lorsque $0 < \lambda < n$, le projecteur de Leray est continu de $(L^p(wdx))^n$ dans $(L^p(wdx))^n$ avec $1 < p < \infty$.*

Nous rappelons que le poids $w(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\lambda}{2}}$ a été introduit dans le chapitre $\dot{M}^{2,3}$. Comme $w_\lambda \in \mathcal{A}_p$ (voir l'annexe B sur les classes de Muckenhoupt) alors le projecteur de Leray (opérateur de Calderón-Zygmund) est continu de $(L^p(wdx))^n$ dans $(L^p(wdx))^n$. Ce lemme nous a été utile dans le cas $p = 2$ pour montrer la convergence de l'approximation vers les équations de Navier-Stokes. On peut remarquer que la continuité ne perdure pas si l'exposant $\lambda > n$.

Lemme A.2.4. *Lorsque $\lambda > n$, le projecteur de Leray n'est pas continu de $(L^2(wdx))^n$ dans lui-même.*

La raison vient du fait que le poids w n'appartient plus à la classe de \mathcal{A}_2 .

Démonstration. Le même contre-exemple que dans L^2_{uloc} fonctionne ici. Considérons toujours $f_N = \mathbb{1}_{[-N;0]^n}$. On a bien entendu $\|f_N\|_{L^2(wdx)} < \infty$.

Comme $Tf_N(x) \geq (p-1)A$, alors $\|Tf_N\|_{L^2(wdx)} \geq \ln N$ où $A' = A(\int (1 + |x|^2)^{-\frac{\lambda}{2}} dx)^{\frac{1}{2}}$. Autrement dit, $\|Tf_N\|_{L^2(wdx)}$ tend vers ∞ .

Pour achever la preuve, il reste à montrer que l'opérateur de convolution avec le noyau $v.p.L(x)\mathbb{1}_{|x|\leq 1}$ est continu sur $(L^2(wdx))^n$.

Nous traitons composante par composante : soit $f \in L^2(wdx)$. Cela se vérifie en décomposant l'intégrale sur une somme de cubes d'arête 1 pour utiliser la continuité de \mathbb{P} dans L^2 (car tout se passe localement) :

$$\begin{aligned} \|f * v.p.L(x)\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\|_{L^2(wdx)}^2 &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{\|f * v.p.L(x)\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\|_{L^2(k+[0;1]^n)}^2}{(1+|k|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{\|f\|_{L^2(k+[-1;2]^n)}^2}{(1+|k|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(wdx)}^2 \end{aligned} \tag{A.6}$$

□

A.2.3 L'espace $\dot{M}^{p,q}$

Proposition A.2.5. *Le projecteur de Leray est continu de $(\dot{M}^{p,q})^n$ dans lui-même lorsque $1 < p \leq q < \infty$.*

Remarque : Pour $p = q$, c'est évident puisque l'on retrouve les espaces L^p .

Démonstration. Soit $f \in \dot{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Étudions $Rf = \int K(x,y)f(y)dy$ où K est tel que $|K(x,y)| \leq C \frac{1}{|x-y|^n}$.

Soit $B = B(x, R)$. Comme d'habitude, nous décomposons $f = \mathbb{I}_{3B}f + \mathbb{I}_{c_3B}f = f_1 + f_2$. La partie locale se traite facilement car $f_1 \in L^p$: par continuité du projecteur de Leray de L^p dans lui-même, on a $\|Rf_1\|_{L^p(B)} \leq \|Rf_1\|_{L^p} \leq C(p)\|f_1\|_{L^p}$, donc :

$$\|Rf_1\|_{\dot{M}^{p,q}} \leq C'(p)\|f\|_{\dot{M}^{p,q}}.$$

Pour étudier Rf_2 lorsque $x \in B$, on remarque que : $Rf_2(x) = \int_{|x-y|>2R} \frac{f(y)}{|x-y|^n} dy$. Nous allons alors majorer la norme L^∞ de R_2 en intégrant sur des couronnes :

$$\begin{aligned} |Rf_2(x)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j R < |x-y| < 2^{j+1} R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \\ &\leq 2^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^n} \int_{2^j R < |x-y| < 2^{j+1} R} |f(y)| dy \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, $\int_{B(x;2^{j+1}R)} |f(y)| dy \leq (2^j R)^{n(1-\frac{1}{p})} \|f\|_{L^p(B(x;2^{j+1}R))}$, d'où :

$$|Rf_2(x)| \leq C_n R^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{\dot{M}^{p,q}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-nj\frac{1}{q}}$$

La somme converge et nous avons, grâce à $\|Rf_2\|_{L^p(B)} \leq C'_n R^{\frac{n}{p}} \|Rf_2\|_{\infty}$, la deuxième estimation voulue : $\|Rf_2\|_{\dot{M}^{p,q}} \leq C'_n \|f\|_{\dot{M}^{p,q}}$. \square

A.2.4 L'espace $L^{p,\infty}$, $1 < p < \infty$

Proposition A.2.6. *Le projecteur de Leray est continu de $(L^{p,\infty})^n$ dans lui-même lorsque $1 < p < \infty$.*

Démonstration. Nous ne pouvons utiliser directement de l'interpolation

$$L^{p,\infty} = [L^1, L^\infty]_{1-\frac{1}{p}, \infty}$$

vu que la continuité du projecteur de Leray n'est pas assurée dans ces cas limites. Nous utilisons alors $L^{p,\infty} = [L^{p_0}, L^{p_1}]_{\theta, \infty}$ où $\theta = \frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$ avec $1 < p_0 < p < p_1$, ce qui permet de conclure. \square

A.2. ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ DU PROJECTEUR DE LERAY

Annexe B

Classes de Muckenhoupt

B.1 Définition et premières propriétés

Définition B.1.1. Soit f une fonction positive localement intégrable non nulle. On dit que $f \in \mathcal{A}_p$ (appelée p -classe de Muckenhoupt) lorsque $1 < p < +\infty$ s'il existe une constante positive A telle que pour toute boule B , f satisfasse l'inégalité

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B f(x) \, dx\right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B f(x)^{-\frac{p'}{p}} \, dx\right)^{\frac{p}{p'}} \leq A \quad (\text{B.1})$$

(avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$)

Remarques

Si $w \in \mathcal{A}_p$ alors sa dilatée $w_\delta \in \mathcal{A}_p$ ($w_\delta(x) = w(\delta x)$, pour $\delta > 0$).

De même, si $w \in \mathcal{A}_p$ alors sa translatée $\tau_h w \in \mathcal{A}_p$ ($\tau_h w(x) = w(x - h)$).

Si $w \in \mathcal{A}_p$ alors $\sigma = w^{-\frac{p'}{p}} \in \mathcal{A}'_p$. Cette propriété de "dualité" montre essentiellement que le passage de w à σ inverse l'ordre des facteurs dans l'inégalité ((B.1)).

Une définition équivalente est donnée par la proposition ci-dessous.

Proposition B.1.2. On dit qu'un poids $w \in \mathcal{A}_p$ si et seulement si w est localement intégrable et vérifie

$$(f_B)^p \leq \frac{c}{w(B)} \int_B f^p w(x) \, dx \quad (\text{B.2})$$

pour toute fonction positive f et toute boule B .

Nous notons $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) \, dx$ et $w(B) = \int_B w(x) \, dx$.

Démonstration. Soit $w \in \mathcal{A}_p$. Ecrivons

$$f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f w^{\frac{1}{p}} w^{-\frac{1}{p}} \, dx \quad (\text{B.3})$$

B.1. DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

L'inégalité de Hölder appliquée aux exposants p et p' donne

$$\begin{aligned} (f_B)^p &\leq |B|^{-p} [\int_B f^p w \, dx] [\int_B w^{-\frac{p'}{p}} \, dx]^{\frac{p}{p'}} \\ &\leq \frac{A}{w(B)} |B|^{\frac{p}{p'} - p + 1} \int_B f w^{\frac{1}{p}} \, dx \text{ d'après (B.1)} \\ &= \frac{A}{w(B)} \int_B f w^{\frac{1}{p}} \, dx. \end{aligned}$$

Réciproquement, nous souhaitons appliquer (B.2) avec $f = w^{-\frac{p'}{p}}$. En effet, $f^p w = w^{-p'+1} = w^{-\frac{p'}{p}}$. Si nous avons $\int_B w^{-\frac{p'}{p}} \, dx < \infty$ alors nous obtiendrions :

$$\frac{1}{|B|^p} w(B) \left(\int_B w(x)^{-\frac{p'}{p}} \, dx \right)^{p-1} \leq C \quad (\text{B.4})$$

qui est la forme souhaitée. Pour surmonter cette difficulté, prenons pour $f = (w + \epsilon)^{-\frac{p'}{p}}$ (avec $\epsilon > 0$). Sachant que

$$\int_B (w + \epsilon)^{-\frac{p'}{p}} \, dx < \infty$$

, nous pouvons appliquer la remarque précédente et obtenir

$$w(B) \int_B (w + \epsilon)^{-\frac{p'}{p}} \, dx)^{\frac{p}{p'}} \leq C \quad (\text{B.5})$$

Nous pouvons maintenant passer à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et la formule (B.1) en découle. □

Cette caractérisation est essentielle car nous verrons qu'elle permet d'assurer que si $w \in \mathcal{A}_p$ alors la mesure $w(x)dx$ a la propriété de "double mesure". En effet, soient deux boules $B_1 = \{x : |x - y| < \delta\}$ et $B_2 = \{x : |x - y| < 2\delta\}$. En appliquant (B.1.2) à $B = B_2$ et $f = \mathbb{1}_{B_1}$, nous obtenons $w(B_2) \leq 2^{np} c w(B_1)$.

Définissons \mathcal{A}_∞ comme les mesures $w(x)dx$ ayant la propriété de double-mesure :

Définition B.1.3. *On dit que $w \in \mathcal{A}_\infty$ si, pour tout α tel que $0 < \alpha < 1$ il existe β , $0 < \beta < 1$ tel que pour toutes boules B et tout sous-ensemble $F \subset B$, on a :*
 $|F| \geq \alpha |B| \Rightarrow w(F) \geq \beta w(B)$.

On remarque alors que si $w \in \mathcal{A}_p$ alors $w \in \mathcal{A}_\infty$: soit F un sous-ensemble contenu dans B , considérons $f = \mathbb{1}_F$ dans la proposition (B.1.2). Celle-ci nous assure alors que $(\frac{|F|}{|B|})^p \leq c \frac{w(F)}{w(B)}$, d'où $w(F) \geq \frac{\alpha^p}{c} w(B)$.

Dans la suite de cette annexe, nous nous intéressons aux poids (w et w_1) utilisés dans le dernier chapitre de cette thèse. Nous nous plaçons dans \mathbb{R}^n et le poids est donné par $w(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^\lambda}$ où $\lambda \in (0, n)$ (conditions satisfaites par les poids utilisés dans le chapitre 5).

ANNEXE B. CLASSES DE MUCKENHOUP

Lemme B.1.4. *Pour tout $p \in (1, \infty]$, nous avons $w \in \mathcal{A}_p$.*

Démonstration. Nous le prouvons pour p fini, le cas \mathcal{A}_∞ découle de ce qui vient d'être fait.

Soit B la boule $B(x_0, R)$. Considérons deux cas :

- ou bien $|x_0| \leq 10R$ alors on peut se ramener à $x_0 = 0$ quitte à intégrer sur une boule de rayon $11R$.

On a alors : $\frac{1}{|B|} \int_B w(x) \, dx = \frac{C}{R^n} \int_0^R \frac{s^{n-1}}{(1+s^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \, ds$.

La dernière intégrale, d'intégrande positive, diverge et est donc équivalente en $+\infty$ à $R^{n-\lambda}$. Il existe $M > 1$ tel que, lorsque $R > M$: $\frac{1}{|B|} \int_B w(x) \, dx \leq 2R^{-\lambda}$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{\frac{-1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} &= \left(\frac{C}{R^n} \int_0^R s^{n-1} (1+s^2)^{\frac{\lambda}{2(p-1)}} \, ds \right)^{p-1} \\ &\leq C' R^\lambda \text{ car } 1 < M < R \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Le produit des intégrales est alors majoré par une constante indépendante de R (elle ne dépend que de p et de la dimension n).

Si $R \leq M$, comme d'un côté $w(x) \leq 1$ et de l'autre

$|w(x)|^{\frac{-1}{p-1}} = (1 + |x|^2)^{\frac{\lambda}{2(p-1)}} \leq (1 + M^2)^{\frac{\lambda}{2(p-1)}}$, on a aussi la majoration souhaitée :

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x) \, dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |w(x)|^{\frac{-1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} \leq (1 + M^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

- ou bien $|x_0| > 10R$, comme on intègre sur $|x - x_0| \leq R$, on a $|x_0| - R \leq |x| \leq |x_0| + R$, soit : $\frac{9}{10}|x_0| < |x| < \frac{11}{10}|x_0|$. En utilisant la propriété $|x| < |y| \Rightarrow w(y) < w(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x) \, dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |w(x)|^{\frac{-1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} &\leq w\left(\frac{9x_0}{10}\right) w^{-1}\left(\frac{11x_0}{10}\right) \\ &\leq 2^{\frac{\lambda}{2}} w\left(\frac{11x_0}{10}\right) \times w^{-1}\left(\frac{11x_0}{10}\right) = C(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dans ce cas, tout se comporte comme si le poids w était constant sur la boule B . Ceci achève la preuve. Nous remarquons que l'exposant λ doit être strictement majoré par la dimension de l'espace pour satisfaire la conclusion du lemme. \square

B.2 Continuité des opérateurs d'intégrale singulière

Dans cette partie, nous nous proposons de prouver qu'un opérateur de Calderón-Zygmund T est continu de $L^p(wdx)$ dans $L^p(wdx)$ (notamment que le projecteur de Leray l'est de $L^2(wdx)$ dans $L^2(wdx)$, résultat utilisé dans le chapitre 5). En reprenant la définition des opérateurs de Calderón-Zygmund (Annexe A), nous nous intéressons à ceux pour lesquels $\epsilon = 1$ dans la définition (c'est le cas du projecteur de Leray vu que

B.2. CONTINUITÉ DES OPÉRATEURS D'INTÉGRALE SINGULIÈRE

son noyau K vérifie $|\partial_x K(x)| \leq A|x|^{-n-1}$ lorsque $x \neq 0$). La démonstration se déroule en trois étapes. Tout d'abord, nous allons montrer que l'opérateur maximal défini par $(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{C_n}{r^n} \int_{|y|\leq r} |f(x-y)| dy$ est continu de $L^p(w dx)$ dans lui-même.

Nous montrerons ensuite comment passer de l'opérateur M à T^* . L'opérateur T^* est défini comme suit :

Définition B.2.1. Soit K le noyau de l'opérateur T . Notons $K_\epsilon = K(x)\mathbb{I}_{|x|\geq\epsilon}$ la troncature de K . Pour $f \in \mathcal{D}$, on notera $T_\epsilon f(x) = (K_\epsilon * f)(x)$ et $T_* f(x) = \sup_{\epsilon>0} |T_\epsilon f(x)|$.

Enfin, nous concluons sur l'opérateur T . Nous rappelons les liens unissant ces trois opérateurs, dont les démonstrations se trouvent notamment dans le premier chapitre de [60].

$$T_* f(x) \leq A[M(Tf)(x) + Mf(x)]$$

$$|Tf(x)| \leq T_* f(x) + c|f(x)|$$

où les constantes A et c ne dépendent pas de la fonction choisie. Nous utiliserons aussi les lemmes de recouvrement de Vitali et Withney, dont on peut trouver les énoncés et démonstrations dans le même chapitre.

B.2.1 Étape 1 : Étude de Mf

Théorème B.2.2. L'opérateur M vérifie $\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x) dx \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx$, pour tout $f \in L^p(w dx)$.

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme B.2.3. Soit $M_w f(x) = \sup_{\delta>0} \frac{1}{w(B(x,\delta))} \int_{B(x,\delta)} |f(y)|w(y) dy$. Si $f \in L^1(w dx)$ alors

$$w\{x : M_w f(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha} \int |f(x)|w(x) dx, \forall \alpha > 0 \quad (\text{B.8})$$

Démonstration. Définissons $M_w f(x) = \sup_{\delta>0} \frac{1}{w(B(x,\delta))} \int_{B(x,\delta)} |f(y)|w(y) dy$. Montrons que si $f \in L^1(w dx)$ alors

$$w\{x : M_w f(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha} \int |f(x)|w(x) dx, \forall \alpha > 0 \quad (\text{B.9})$$

Notons $E_\alpha = \{x : M_w f(x) > \alpha\}$ et considérons $E \subset E_\alpha$ où E est un sous-ensemble compact. Par définition de E_α , pour chaque $x \in E$, il existe une boule B_x telle que $x \in B_x$ et $w(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)|w(y) dy$. Comme $x \in B_x$, par compacité de E , on peut sélectionner un ensemble fini de ces boules recouvrant E . De cet ensemble, le lemme de Vitali (que

ANNEXE B. CLASSES DE MUCKENHOUP

l'on peut appliquer car w a la propriété de "double mesure") nous autorise à considérer un sous-ensemble disjoint $(B_k)_k$ recouvrant E et satisfaisant $w(E) \leq c \sum_{k=1}^{k=m} w(B_k)$. En sommant $w(B_k)$ on obtient :

$$w(E) \leq \frac{c}{\alpha} \int_E |f(y)|w(y) \, dy \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|w(y) \, dy \quad (\text{B.10})$$

En prenant la borne supérieure sur tous les ensembles compacts tels que $E \subset E_\alpha$, on obtient $w\{x : M_w f(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha} \int |f(x)|w(x) \, dx$, $\forall \alpha > 0$. \square

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du théorème en utilisant le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

La proposition (B.1.2) montre que si $w \in \mathcal{A}_p$ alors

$$(f_B)^p \leq \frac{c}{w(B)} \int_B f^p w(x) \, dx \quad (\text{B.11})$$

pour toute fonction positive f et toute boule B . En prenant la borne supérieure sur toutes les boules B centrées en x , il vient

$$(Mf(x))^p \leq cM_w(|f|^p)(x)$$

Or pour tout $p > 1$, $w \in \mathcal{A}_p$: en remplaçant f par $|f|^p$ et α par $\frac{\alpha^p}{c}$ dans le lemme précédent, on obtient alors :

$$w\{x : Mf(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha^p} \int |f(x)|^p w(x) \, dx \quad \forall \alpha > 0 \quad (\text{B.12})$$

On utilise alors le théorème de Marcinkiewicz vu que M envoie $L^p(wdx)$ dans $L^{p^*}(wdx)$ pour tout $p > 1$: cela prouve le théorème (on pouvait aussi remarquer que M envoie $L^\infty(wdx)$ dans lui-même).

Remarque : Comme notre poids appartient à tous les \mathcal{A}_p , la démonstration de ce théorème est simplifiée. Dans le cas général où $w \in \mathcal{A}_p$ pour un certain $p \in (1, \infty)$, la conclusion reste vraie grâce à l'inégalité de Hölder inversée. Moralement, celle-ci nous dit que si $w \in \mathcal{A}_p$ alors on peut toujours trouver un exposant $1 < p_1 < p$ tel que $w \in \mathcal{A}_{p_1}$.

B.2.2 Étape 2 : Passage de Mf à T_*f .

Comme w a la propriété de double-mesure, l'opérateur T_* vérifie une estimation faible de type

$$w\{x : T_*f(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha} \int |f(x)|w(x) \, dx \quad \forall \alpha > 0 \quad (\text{B.13})$$

B.2. CONTINUITÉ DES OPÉRATEURS D'INTÉGRALE SINGULIÈRE

pour tout $f \in L^1$ (voir [60], chapitre 1). Ce résultat sera utilisé dans cette section.

L'objectif est de donner un contrôle de T_*f en termes de M . Si nous arrivons à trouver trois constantes a , b et c appropriées vérifiant

$$w\{x : T_*f(x) > \alpha; Mf(x) \leq c\alpha\} \leq aw\{x : T_*f(x) > b\alpha\}, \forall \alpha > 0 \quad (\text{B.14})$$

le lemme suivant nous assurera un contrôle de $\|T_*f\|_{L^p(wdx)}$ pourvu que l'on ait $\|T_*f\|_{L^p(wdx)} < \infty$.

Lemme B.2.4. *Soient F et G deux fonctions positives satisfaisant*

$$w\{x : F(x) > \alpha; G(x) \leq c\alpha\} \leq aw\{x : F(x) > b\alpha\}, \forall \alpha > 0. \quad (\text{B.15})$$

Supposons qu'il existe $p \in (1, \infty)$ tel que $\|F\|_{L^p(wdx)} < \infty$. Si $a < b^p$ alors il existe une constante $A = A(a, b, c)$ telle que $\|F\|_{L^p(wdx)} \leq A\|G\|_{L^p(wdx)}$.

Démonstration. Nous utiliserons la caractérisation suivante

$$\|F\|_{L^p(wdx)}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} w\{x : F(x) > \alpha\} d\alpha \quad (\text{venant de } p \int_0^{|F(x)|} \alpha^{p-1} d\alpha = |F(x)|^p).$$

L'hypothèse du lemme implique immédiatement que

$$w\{x : F(x) > \alpha\} \leq aw\{x : F(x) > b\alpha\} + w\{x : G(x) > c\alpha\}. \quad (\text{B.16})$$

En multipliant (B.16) par $p\alpha^{p-1}$ et en intégrant en α , la caractérisation évoquée de $\|F\|_{L^p(wdx)}^p$ donne :

$$\|F\|_{L^p(wdx)}^p \leq ab^{-p} \|F\|_{L^p(wdx)}^p + c^{-p} \|G\|_{L^p(wdx)}^p \quad (\text{B.17})$$

(dans les intégrales de droite, nous avons effectué les changements de variables $\alpha' \rightarrow b\alpha$ et $\alpha' \rightarrow c\alpha$). Il suffit alors de prendre $A = \frac{c^{-p}}{1-ab^{-p}}$. La condition entre a et b se lit sur la dernière égalité. \square

Nous nous intéressons maintenant à la proposition essentielle (et la plus éprouvante) de cette étape :

Proposition B.2.5. *Il existe a tel que, si $a < 1$, pour tout $b < 1$, il est possible de trouver $c > 0$ tel que*

$$w\{x : T_*f(x) > \alpha; Mf(x) \leq c\alpha\} \leq aw\{x : T_*f(x) > b\alpha\}, \forall \alpha > 0 \quad (\text{B.18})$$

Démonstration. Dans la démonstration, la constante A pourra changer d'une ligne à l'autre sans que cela n'ait de conséquence sur le résultat final.

Comme $T_\epsilon f(x)$ est continu pour tout $\epsilon > 0$ ($f \in L^1$), l'ensemble

$$O = \{x : T_*f(x) = \sup_\epsilon |T_\epsilon f(x)| > b\alpha$$

ANNEXE B. CLASSES DE MUCKENHOUP

est un ouvert de \mathbb{R}^n dont le complémentaire n'est pas vide (noté F). Le lemme de recouvrement de Whitney nous dit qu'il est possible de recouvrir O par une union disjointe de "cubes" fermés Q_j dont le diamètre est comparable à la distance de Q à F .

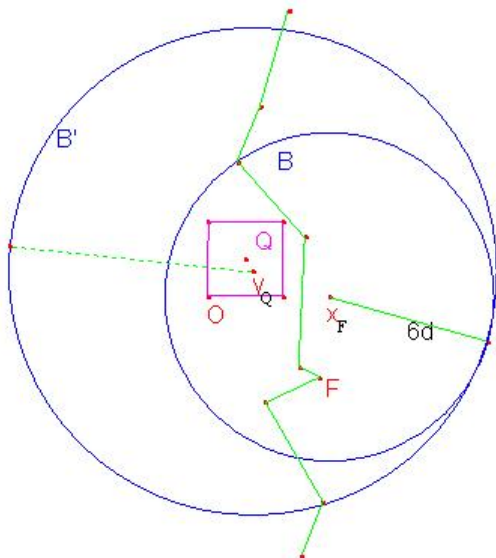
Première partie : Nous allons d'abord prouver que sur un tel cube, il existe une constante A telle que pour tout $0 < b < 1$ et $c > 0$,

$$|\{x : T_*f(x) > \alpha; Mf(x) \leq c\alpha\}| \leq \frac{Ac}{1-b}|Q|. \quad (\text{B.19})$$

avec A indépendant de j .

Notons d son "diamètre". Comme Q est un cube de Whitney, il est possible de trouver un point x_F dans $F =^c O$ tel que $\text{dist}(x_F; Q) \leq 4d$ (et $T_*f(x_F) \leq b\alpha$). Considérons $B = B(x_F; 6d)$: elle est choisie de telle façon que $Q \subset B$ et chaque point de Q a une distance à cB supérieure ou égale à d .

Choisissons un point $y_Q \in Q$ tel que $Mf(y_Q) \leq c\alpha$ (s'il n'y a aucun point vérifiant cette condition alors l'inégalité (B.19) devient évidente). Soit B' la plus petite boule centrée en y_Q et contenant B : il existe une constante $A > 0$ telle que $|B'| \leq A|Q|$ (en effet $\text{dist}(x_F; y_Q) \leq 5d$).



Maintenant que nous avons choisi un voisinage adapté à Q , pour démontrer l'inégalité portant sur le cube, nous allons utiliser l'estimation de type faible portant sur T_* (rappelée au début de l'étape 2).

Partageons $f = \mathbb{1}_B f + \mathbb{1}_{^c B} f = f_1 + f_2$. Comme $T_*f \leq T_*f_1 + T_*f_2$, on a :

$$\{x : T_*f(x) > \alpha\} \subset \{x : T_*f_1(x) > b_1\alpha\} \cup \{x : T_*f_2(x) > b_2\alpha\} \quad (\text{B.20})$$

B.2. CONTINUITÉ DES OPÉRATEURS D'INTÉGRALE SINGULIÈRE

dès lors que $b_1 + b_2 = 1$ (b_1 et b_2 seront déterminés ultérieurement). Étudions T_*f_1 et T_*f_2 .

On sait que

$$|\{x : T_*f_1(x) > b_1\alpha\}| \leq \frac{A}{b_1\alpha} \int |f_1(x)| \, dx$$

D'autre part

$$\int |f_1(x)| \, dx = \int_B |f| \, dx \leq \int_{B'} |f| \, dx \leq c\alpha|B'| \leq Ac\alpha|Q|.$$

Nous avons utilisé, dans l'avant-dernière inégalité, le fait que $Mf(y_Q) \leq c\alpha$. Ainsi :

$$|\{x : T_*f_1(x) > b_1\alpha\}| \leq \frac{Ac}{b_1}|Q|$$

Il reste à traiter le cas T_*f_2 correspondant à la partie où le support de f est en-dehors de B .

Montrons que $|T_\epsilon f_2(x_F) - T_\epsilon f_2(x)| \leq AMf(y_Q)$, lorsque $x \in Q$.

On écrit :

$$|T_\epsilon f_2(x_F) - T_\epsilon f_2(x)| \leq \int_{{}^c B} |K_\epsilon(x_F - y) - K_\epsilon(x - y)| |f(y)| \, dy \quad (\text{B.21})$$

Comme

$$\begin{aligned} |K_\epsilon(x_F - y) - K_\epsilon(x - y)| |f(y)| &\leq \frac{C|x - x_F|}{|x - y|^{n+1}} |f(y)| \\ &\leq \frac{Ad}{|y - y_Q|^{n+1}} |f(y)| \end{aligned}$$

(on rappelle que $|x - x_F| \leq 5d$ car $\text{dist}(x_F; Q) \leq 4d$; de plus $|y - y_Q| \leq \frac{1}{2}|x - y|$, vu que x et y_Q sont dans Q et au moins la distance d de y). Comme ${}^c B$ est constitué des points y tels que $|y - y_Q| \geq d$, alors nous pouvons décomposer l'intégrale en une somme de couronnes comme suit :

$$\begin{aligned} |T_\epsilon f_2(x_F) - T_\epsilon f_2(x)| &\leq Ad \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k d \leq |y| \leq 2^{k+1} d} \frac{|f(y - y_Q)|}{|y|^{n+1}} \, dy \\ &= Ad (\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}) Mf(y_Q). \end{aligned}$$

Cela fournit l'estimation voulue sur $|T_\epsilon f_2(x_F) - T_\epsilon f_2(x)|$.

Par définitions de B et de f_2 , on a $T_\epsilon f_2(x_F) = T_{\epsilon'} f(x_F)$ où $\epsilon' = \max(6d, \epsilon)$. Nous avons donc $|T_{\epsilon'} f(x_F) - T_\epsilon f_2(x)| \leq AMf(y_Q)$. Par passage à la borne supérieure sur ϵ , on a donc prouvé, pour $x \in Q$: $T_*f_2(x) \leq T_*f(x_F) + AMf(y_Q) \leq b\alpha + Ac\alpha$.

Nous souhaitons que $b\alpha + Ac\alpha \leq b_2\alpha$: ainsi l'ensemble $\{x \in Q : T_*f_2(x) > b_2\alpha\}$ sera vide. Pour cela, il suffit de prendre $b_2 \geq b + Ac$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} |\{x \in Q : T_*f(x) > \alpha; Mf(x) \leq c\alpha\}| &\leq |\{x \in Q : T_*f_1(x) > b_1\alpha\}| \\ &\leq \frac{Ac}{b_1}|Q| \end{aligned}$$

ANNEXE B. CLASSES DE MUCKENHOUP

avec $b_1 + b_2 = 1$ et $b_2 \geq b + Ac$.

Posons maintenant $b_1 = \frac{1-b}{2}$ (nous avons bien $0 < b < 1$) et $b_2 = \frac{1+b}{2}$.

Si $\frac{1+b}{2} \geq b + Ac$ alors ce qui a été fait auparavant est applicable et nous obtenons automatiquement l'inégalité désirée :

$$|\{x \in Q : T_*f(x) > \alpha; Mf(x) \leq c\alpha\}| \leq \frac{2Ac}{1-b}|Q| \quad (\text{B.22})$$

Sinon, nous avons $\frac{Ac}{1-b} > \frac{1}{2}$ et l'inégalité souhaitée est évidente en prenant $A' = 2A$; en effet $1 < \frac{A'c}{1-b}$ et

$$|\{x \in Q : T_*f(x) > \alpha; Mf(x) \leq c\alpha\}| \leq |Q| < \frac{A'c}{1-b}|Q|. \quad (\text{B.23})$$

Cela termine la partie 1.

Deuxième partie : Nous passons à la mesure w . Comme elle a la propriété de "double mesure" : si $r < 1$ est fixé alors il existe $\delta < 1$ tel que $|E| \leq r|Q| \Rightarrow w(E) \leq \delta w(Q)$. Revenons à l'inégalité (B.19). Prenons $E = \{x \in Q : T_*f(x) > \alpha; Mf(x) \leq c\alpha\}$. Etant donné b ($0 < b < 1$), choisissons c (suffisamment petit) tel que $\frac{Ac}{1-b} \leq r$. On a donc $w(E) \leq \delta w(Q)$. Il nous reste à sommer sur tous les $Q = Q_j$ pour achever la preuve de la proposition. \square

Remarque : Nous n'avons utilisé que la propriété $w \in \mathcal{A}_\infty$: cette condition était donc suffisante pour prouver cette proposition.

Théorème B.2.6. *Soit $p \in (1, +\infty)$: il existe une constante $A = A(p, w)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) \, dx \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p w(x) \, dx \quad (\text{B.24})$$

Démonstration. Dans la proposition précédente, comme $a < 1$, on peut toujours choisir $b < 1$ tel que $a < b^p$. On applique alors le lemme (B.2.4). Celui-ci nous dit que le théorème sera prouvé si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) \, dx < \infty. \quad (\text{B.25})$$

Comme f est à support compact, nous pouvons supposer que f est à support dans $\{x : |x| \leq R\}$.

Lorsque $|x| \geq 2R$, nous majorons $T_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y)f(y) \, dy$. De $|y| \leq R$, on a $|x-y| \geq R \geq \frac{|x|}{2}$. Ainsi $|T_\epsilon f(x)| \leq \frac{A}{|x|^n}$ avec A indépendant de ϵ ; par passage à la borne supérieure $|T_*f(x)| \leq \frac{A}{|x|^n}$. Loin de l'origine, on a donc

$$\int_{|x| \geq 2R} |T_*f|^p w(x) \, dx \leq \int \frac{w(x)}{(1+|x|)^{np}} < \infty \quad (\text{B.26})$$

B.3. RÉGULARITÉ MAXIMALE

(rappelons que $w(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{\lambda}{2}}}$, $\lambda \in (0, n)$).

Ainsi, $|Tf(x)| \leq T_*f(x) + c|f(x)|$ montre aussi que Tf est bornée loin de l'origine.

Lorsque $|x| \leq 2R$, nous pouvons directement majorer Tf . En effet, $f \in \mathcal{D}$ et T est une distribution tempérée alors Tf est continue (donc bornée sur $B(0, 2R)$) et en conséquence sur \mathbb{R}^n .

Comme Tf et f sont dans L^∞ et que M envoie L^∞ dans L^∞ , la relation

$$T_*f(x) \leq A[M(Tf)(x) + Mf(x)] \quad (\text{B.27})$$

nous assure que T_*f est aussi bornée lorsque $|x| \leq 2R$. Donc $T_*f \in L^p(B(0, 2R), wdx)$.

On a donc l'hypothèse requise qui permet de terminer la preuve du théorème. \square

Remarque : Sous la seule hypothèse $w \in \mathcal{A}_\infty$, le théorème ci-dessus reste vrai moyennant l'assurance de $\int_{\mathbb{R}^3} |Mf(x)|^p w(x) dx < \infty$. En effet, si $f \in \mathcal{D}$ est non nulle alors $Mf(x) \geq \frac{A}{1+|x|^n}$ et nécessairement $\int \frac{w(x)}{(1+|x|)^{np}} dx < \infty$.

B.2.3 Étape 3 : Conclusion

Théorème B.2.7. *Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund. Pour tout $f \in L^p(wdx)$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \quad (\text{B.28})$$

Démonstration. Après ce qui vient d'être fait, ce théorème est évident. Comme $|Tf(x)| \leq T_*f(x) + c|f(x)|$, l'étape précédente montre que le théorème est vérifié pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$. Mais chaque fonction de $L^p(wdx)$ peut être approchée (dans sa norme) par une fonction de \mathcal{D} est dense dans $L^p(wdx)$ (en effet, toute fonction $g \in L^p(wdx)$ s'écrit sous la forme $g = fw^{-\frac{1}{p}}$ où $f \in L^p$). On conclut par densité. \square

B.3 Régularité maximale du noyau de la chaleur dans

$L^p L^p(wdx)$.

Nous terminons cette annexe en prouvant le théorème essentiel qui permet au modèle de converger lorsque la donnée initiale est dans $(\dot{M}^{2,3})^3$.

Considérons l'opérateur $A : f \mapsto Af(t, x) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta f(s, \cdot) ds$. Nous souhaitons montrer que c'est un opérateur de Calderon-Zygmund de \mathbb{R}^{n+1} muni de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{n+1} et de la quasi-distance $d((t, x), (s, y)) = (|x - y|^2 + |t - s|)^{\frac{1}{4}}$ (elle vérifie seulement $d((t, x), (s, y)) \leq K(d((t, x), (u, v)) + d((u, v), (s, y)))$ avec $K \leq 2^{\frac{1}{4}}$) et appliquer les

ANNEXE B. CLASSES DE MUCKENHOUP

résultats du deuxième paragraphe. Trois remarques s'imposent pour que l'analogie ait lieu :

i) Le poids $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n)$ peut être vu comme un poids de \mathbb{R}^{n+1} . En effet $(t, x) \mapsto w(t, x) = w(x) \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

ii) La démonstration effectuée dans la section précédente est aussi valable si nous n'avons qu'une quasi-distance au lieu de la distance euclidienne choisie. En effet, les lemmes de recouvrement de Vitali et Whitney (ainsi que la géométrie qui en découle) et les hypothèses sur le noyau de l'opérateur de l'intégrale singulière sont démontrés dans un cadre beaucoup plus général dans [60]. En conséquence, les liens entre les trois opérateurs perdurent sous ces hypothèses plus restrictives. A cet effet, on notera que l'hypothèse portant sur les modules de Dini pour montrer $T_*f(x) \leq A[MTf(x) + f(x)]$ est satisfaite grâce à la condition portant sur les "dérivées" des opérateurs de Calderón-Zygmund.

iii) Les estimations portant sur les noyaux des intégrales singulières sont déterminées par le volume d'une boule. Dans le cas de la distance euclidienne sur \mathbb{R}^n , le volume d'une boule $B(x, r)$ est en r^n , d'où un contrôle du noyau en $|x - y|^{-n}$. Dans le cas de notre quasi-distance, celui d'une boule est $|B((t, x), r)| = Cr^{n+2}$ (invariance par translation et changement de variables $x' \rightarrow rx$ et $t' \rightarrow \sqrt{rt}$).

Montrons alors le théorème suivant :

Théorème B.3.1. *L'opérateur A est borné de $L^p((0, T), (L^p(wdx)))$ dans $L^p((0, T), (L^p(wdx)))$ pour $T \in (0, \infty]$, lorsque $1 < p < \infty$.*

Démonstration. Nous avons déjà vu dans le lemme (2.2.2) du chapitre 2 que nous pouvions supposer $T = \infty$ et définir Af sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, quitte à prolonger f et Af par 0.

Comme nous l'avons vu, nous allons interpréter A comme un opérateur de Calderón-Zygmund sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ muni de la mesure $w(x) dx$ de Lebesgue sur \mathbb{R}^{n+1} et avec la quasi-distance $d((t, x), (s, y)) = (|x - y| + |t - s|)^{\frac{1}{4}}$. Rappelons que le noyau L de l'opérateur A est donné par :

$$L((t, x), (s, y)) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t - s) \frac{1}{(t - s)^{\frac{n+2}{2}}} (\Delta K) \left(\frac{x - y}{\sqrt{t - s}} \right). \quad (\text{B.29})$$

où K désigne le noyau de la chaleur. Si $|x - y| \leq \sqrt{t - s}$ alors

$$|L((t, x), (s, y))| \leq \frac{\|\Delta K\|_{\infty}}{(t - s)^{\frac{n+2}{2}}}. \quad (\text{B.30})$$

Sinon, nous avons

$$|L((t, x), (s, y))| \leq \frac{\||z|^{n+2} \Delta K(z)\|_{\infty}}{|x - y|^{n+2}}. \quad (\text{B.31})$$

B.3. RÉGULARITÉ MAXIMALE

Ainsi, nous obtenons que

$$|L((t, x), (s, y))| \leq \frac{C}{d((t, x), (s, y))^{n+2}}. \quad (\text{B.32})$$

En procédant exactement de la même façon, nous avons les estimations sur les dérivées partielles.

$$|\partial_t L((t, x), (s, y))| \leq \frac{C}{d((t, x), (s, y))^{n+4}}. \quad (\text{B.33})$$

et

$$|\partial_{x_j} L((t, x), (s, y))| \leq \frac{C}{d((t, x), (s, y))^{n+3}}. \quad (\text{B.34})$$

Pour (a, b) petits devant $d((t, x), (s, y))$, on obtient :

$$|L((t, x), (s, y)) - L((t + a, x + b), (s, y))| \leq C \left(\frac{|a|}{d((t, x), (s, y))^{n+4}} + \frac{|b|}{d((t, x), (s, y))^{n+3}} \right). \quad (\text{B.35})$$

ce qui implique

$$|L((t, x), (s, y)) - L((t + a, x + b), (s, y))| \leq \frac{C' d((t, x), (t + a, x + b))}{d((t, x), (s, y))^{n+3}} \quad (\text{B.36})$$

On obtiendrait le même contrôle à partir par rapport à (s, y) : A répond donc à toutes les hypothèses du deuxième paragraphe. On peut donc conclure que A est borné de $L^p_{wdx}(\mathbb{R}^{n+1})$ dans lui-même donc de $L^p(\mathbb{R}, L^p(wdx))$ dans lui-même. \square

Nous pouvons donc appliquer ce résultat pour $p = \frac{3}{2}$ dans le chapitre 4.

Nous avons au passage (quasiment) démontré le théorème de régularité maximale utilisé dans le chapitre 3, pour contrôler la pression :

Théorème B.3.2. *L'opérateur A défini par $f(t, x) \mapsto Af(t, x) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta f(s, \cdot) ds$ est borné de $L^p((0, T), L^q(\mathbb{R}^3))$ dans lui-même (indépendamment de T) pour tout $T \in (0, +\infty]$, $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$.*

Démonstration. En effet, nous avons déjà vu que Af pouvait s'étendre à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et que A était borné de $L^2 L^2$ dans lui-même. La démonstration du théorème précédent montre alors qu'il l'est aussi de $L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ dans lui-même. Pour montrer que A est borné de $L^p(L^q)$ dans lui-même, il suffit maintenant de l'interpréter comme une opérateur sur \mathbb{R} . Le noyau $L(t, s)$ considéré est alors $\Delta e^{(t-s)\Delta}$. On a alors les estimations suivantes $\|L\|_{op(L^q, L^q)} = \frac{C}{t-s}$ et $\|\partial_t L\|_{op(L^q, L^q)} = \frac{C}{(t-s)^2}$: comme l'opérateur est borné dans $L^q L^q$ alors il l'est aussi dans $L^p L^q$. \square

Bibliographie

- [1] O. Barraza, *Self similar solutions in weak L^p -spaces of the Navier-Stokes equations*, Rev. Math. Iberoamericana **12** (1996), 411–439.
- [2] A. Basson, *Homogeneous statistical solutions and Local energy inequality for 3D Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys **266** (2006), 17–35.
- [3] A. Basson, *Solutions spatialement homogènes et adaptées au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg des équations de Navier-Stokes (thèse)*, Univ. Evry, 2006.
- [4] H. Beirão da Vega, *On the construction of suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations via a general approximation theorem.*, J. Math. Pures Appl **64** (1985), 321–334.
- [5] ———, *On the suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations in the whole space.*, J Math. Pures et Appl. **64** (1985), 77–86.
- [6] J. Bergh et Löfström J., *Interpolation spaces.*, Springer-Verlag, 1976.
- [7] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **14** (1981), 209–246.
- [8] G. Bourdaud, *Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev Homogènes*, Manuscripta Math. **60** (1988), 93–130.
- [9] L. Caffarelli, R. Kohn, et L. Nirenberg, *Partial Regularity of Suitable Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–831.
- [10] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation : the complex method*, Studia Math. **24** (1964), 113–190.
- [11] ———, *Commutators of singular integral operators*, Proc. Nat. Acadm. Science **53** (1965), 1092–1099.
- [12] A. P. Calderón et Zygmund A., *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–132.
- [13] M. Cannone, *Ondelettes, Paraproducts et Navier-Stokes*, Diderot Editeurs, Arts et Sciences, Paris, New York, Amsterdam, 1995.

- [14] M. Cannone et F. Planchon, *Self-similar solutions for Navier-Stokes in \mathbb{R}^3* , Comm. P.D.E. **21** (1996), 179–193.
- [15] J.-M. Chemin, *Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible*, SIAM J. Math. Anal **23** (1992), 20–28.
- [16] J. Y. Chemin, *Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel*, J. d'Analyse Math. **77** (1999), 27–50.
- [17] R. R. Coifman et Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Société Mathématique de France, 1978.
- [18] P. Constantin, *Near identity transformations for the Navier-Stokes equations*, Handbook of Mathematical Fluid Dynamics (2003), 117–141.
- [19] P. Constantin et C. Foias, *Navier-Stokes equations*, Univ. of Chicago Press, 1988.
- [20] G. David et J.-L. Journé, *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. **120** (1984), 371–397.
- [21] P. Federbush, *Navier and Stokes meet the wavelets*, Comm. Math. Phys **155** (1993), 219–248.
- [22] Furioli G., P.-G. Lemarié-Rieusset, et E. Terraneo, *Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnelles limites pour navier-stokes.*, Rev. Math. Iberoamericana **16** (2000), 605–667.
- [23] I. Gallagher, *The tridimensional Navier-Stokes equations with almost bidimensional data : stability, uniqueness and life span.*, IMRN 18 (1999), 919–935.
- [24] Y. Giga et T. Miyakawa, *Navier-Stokes flow in \mathbb{R}^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces.*, Comm. P.D.E. (1989), 577–618.
- [25] Z. Grujic, *Regularity of forward-in-time self similar solutions to the 3D Navier-Stokes equations*, Discrete **14** (2006), 837–843.
- [26] G.-H. Hardy et J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications.*, Acta Math. **54** (1930), 81–116.
- [27] T. Kato, *Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471–480.
- [28] T. Kato, *Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces*, Bol. Soc ; Brasil. Math. **22** (1992), 127–155.
- [29] H. Koch et D. Tataru, *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Adv. Math. **157** (2001), 22–35.

BIBLIOGRAPHIE

- [30] H. Kozono et Y. Taniuchi, *Bilinear estimates in BMO and Navier-Stokes equations*, Math. Z. **235** (2000), 191–200.
- [31] F. Lelièvre, *A scaling and energy equality preserving approximation for the 3D Navier-Stokes equations*, Preprint (2010).
- [32] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Quelques remarques sur les équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^3* , Séminaire X-EDP, Ecole Polytechnique (1998).
- [33] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Weak infinite-energy solutions for the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3* , C. R. Acad. Sc. **serie I** (1999), 1133–1138.
- [34] ———, *Recent Developments in the Navier-Stokes Problem*, Research Notes in Mathematics, vol. 431, Chapman & Hall / CRC, 2002.
- [35] P.-G. Lemarié-Rieusset, *The Navier-Stokes equations in the critical Morrey-Campanato space*, Revista Matematica Iberoamericana **23** (2007), 897–930.
- [36] P.-G. Lemarié-Rieusset et F. Lelièvre, *Suitable solutions for the Navier-Stokes problem with an homogeneous initial value*, Prep (2010).
- [37] J. Leray, *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique.*, J. Math. Pures Appl **12** (1933), 1–82.
- [38] ———, *Essai sur les mouvements plan d'un liquide visqueux que limitent des parois.*, J. Math. Pures Appl. **13** (1934), 331–418.
- [39] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta. Math. **64** (1934), 193–284.
- [40] P. L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Incompressible Models*, vol. 1, Clarendon Press, Oxford Science Publications, Oxford, 1996.
- [41] ———, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Compressible Models*, vol. 2, Clarendon Press, Oxford Science Publications, Oxford, 1998.
- [42] J. E. Littlewood et R. Paley, *Theorems on Fourier series and power series (ii).*, Proc. London Math. Soc. **42** (1937), 52–89.
- [43] G.G. Lorentz, *Some new functional spaces*, Ann. Math. **51** (1950), 37–55.
- [44] F. Marchand, *Application de techniques d'analyse harmonique réelle à l'étude d'une classe d'équations quasi-géostrophiques (thèse)*, Univ. Evry, 2006.
- [45] J. Marcinkiewicz, *Sur l'interpolation d'opérateurs*, C.R.Acad. Sci.Paris (1939), 1272–1273.
- [46] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, 1992.

BIBLIOGRAPHIE

- [47] Y. Meyer, *Wavelets, Paraproduct and Navier-Stokes equations*, Current developments in mathematics 1996, International Press (1999).
- [48] Y. Meyer et R. R. Coifman, *Wavelets : Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge University Press, 1997.
- [49] B. Muckenhoupt, *On certain singular integrals*, Pacific. J. Math. **10** (1960), 239–261.
- [50] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.
- [51] B. Muckenhoupt, *The equivalence of two conditions for weight functions.*, Studia Math **49** (1976), 101–106.
- [52] M. Ruzicka V. Sverak Necas, J., *On Leray's self similar solutions of the Navier-Stokes equations*, Acta Math. **176** (1996), 283–294.
- [53] F. Oru, *Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non linéaire.*, Thèse, ENS Cachan (1998).
- [54] F. Planchon, *Solutions globales et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes.*, Thèse, Ecole Polytechnique (1996).
- [55] P. Plecháč et V. Sverák, *Singular and Regular solutions of a non linear parabolic system*, Nonlinearity **161** (2003), 2083–2097.
- [56] G. Pradolini et O. Salinas, *Commutators of singular integrals on spaces of homogeneous type*, Czech. Math. J. (2007), 75–93.
- [57] V. Scheffer, *Hausdorff measures and the Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys **55** (1977), 97–112.
- [58] J. Serrin, *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **88** (1962), 209–222.
- [59] E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton Univ.Press, 1970.
- [60] E. M. Stein, *Harmonic Analysis Real methods, Orthogonality, and Oscillatory integrals*, Princeton Univ.Press, 1993.
- [61] M. E. Taylor, *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes equations and other evolution equations.*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 1407–1456.
- [62] R. Temam, *Navier-Stokes equations*, North Holland, 1977.
- [63] T.-P. Tsai, *On Leray's self similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates*, Arch. Rational Mech. Anal. **143** (1998), 29–51.

BIBLIOGRAPHIE

- [64] M. Vishik et A. Fursikov, *Solutions statistiques homogènes des systèmes différentiels paraboliques et du système de Navier-Stokes*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa (1977), 531–576.
- [65] ———, *Translationnally homogeneous statistical solutions and individual solutions with infinite energy of a system of Navier-Stokes equations*, Siberian Math. Journal **19** (1978), 710–729.
- [66] ———, *Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1988).
- [67] W. von Wahl, *The Equations of Navier–Stokes and Abstract Parabolic Equations*, Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1985.
- [68] J. Wu, *The 2D dissipative quasi-geostrophic equation*, Appl. Math. Lett. **15** (2002), 925–930.
- [69] S. Matsui Y. Giga et O. Sawada, *Global existence of Two-Dimensional Navier-Stokes flow with nondecaying initial vorticity*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics **3** (2001), 302–315.